CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Dans la même collection :

OPTOÉLECTRONIQUE, par G. BROUSSAUD. 1974, 360 pages, 242 figures.

LES TUBES HYPERFRÉQUENCES, par A. LEBLOND.
Tome I. — *Principes, tubes et circuits.* 1972, 310 pages, 99 figures.
Tome II. — *Optique électronique. Onde de charge spatiale. Bruit* (amplificateurs O et M) 1972, 302 pages, 105 figures.

PHYSIQUE DES LIGNES DE HAUTE FRÉQUENCE ET D'ULTRA-FRÉQUENCE, par P. GRIVET.
Tome I. — *Paramètres primaires et secondaires. Ondes progressives. Impulsions.* 1969 456 pages, 246 figures.
Tome II. — *Circuits et amplificateurs micro-ondes.*
Fascicule 1. 1974, 516 pages, 273 figures.
Fascicule 2. 1974,

PHYSIQUE DES DISPOSITIFS A SEMI-CONDUCTEURS, par A. VAPAILLE.
Tome I. — *Électronique du silicium homogène.* 1970, 340 pages, 202 figures, 10 tableaux

---

PERTURBATIONS ÉLECTRONIQUES ET VIBRATIONNELLES LOCALISÉES DANS LES SOLIDES IONIQUES, pa Y. FARGE et M. FONTANA. 1974, 256 pages, 86 figures.

MÉTHODES ET TECHNIQUES DE TRAITEMENT DU SIGNAL, et applications aux mesures physique par J. MAX et collaborateurs.
Tome I. — *Principes et appareillages de traitement en temps réel.* 1972, 332 page 208 figures.

INTRODUCTION AUX PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT LINÉAIRE DANS LES SEMI-CONDUCTEURS, pa J. TAVERNIER et D. CALECKI. 1970, 238 pages, 33 figures.

MONOGRAPHIES D'ÉLECTRONIQUE PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION
DU PROFESSEUR PIERRE GRIVET

ONDES ÉLASTIQUES DANS LES SOLIDES

APPLICATION AU TRAITEMENT DU SIGNAL

PAR

E. DIEULESAINT ET D. ROYER

E. DIEULESAINT
Ingénieur E.S.E. — Docteur ès Sciences
Laboratoire Central de Recherches
THOMSON-C.S.F.
École Supérieure de Physique et de Chimie

D. ROYER
Ingénieur E.P.C.I.
École Supérieure
de Physique et de Chimie

PRÉFACE DU Pr P. GRIVET

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
120, Boulevard Saint-Germain, Paris 6e
1974

LIBRARY OF CONGRESS CATALOG CARD NUMBER : 74-76399
ISBN : 2-225 40139-X

Imprimé en France

PRÉFACE

AVEC CE BRILLANT OUVRAGE, MM. DIEULESAINT *et* ROYER *ouvrent très pédagogiquement à la curiosité des jeunes chercheurs et ingénieurs, un domaine difficile de la science des ondes, celui des ondes « électromécaniques » dans les solides. Il n'a été exploré que tout récemment, mais on y trouve déjà des moyens nouveaux et efficaces pour le radar, le sonar, le filtrage et la transmission des signaux d'informations variées.*

Ce livre vient aussi heureusement combler une lacune de l'enseignement scientifique français, à la fois regrettable et surprenante. C'est qu'en effet, les découvertes de base sont l'œuvre déjà ancienne de deux grands physiciens de notre pays. A la fin du siècle dernier, en 1880, Pierre et Jacques CURIE *découvrirent puis analysèrent en détail l'effet « piézoélectrique », par lequel on peut créer des forces importantes dans le volume d'un cristal comme le quartz en lui appliquant des tensions électriques modérées. En 1916, Paul* LANGEVIN, *aidé de* CHILOWSKY *découvrit dans ses recherches militaires, la « dynamique » de cet effet, en excitant électriquement les vibrations d'un quartz de* CURIE, *puis en faisant rayonner efficacement une face du cristal dans l'eau de mer; il créa le premier faisceau d' « ultrasons », réalisant ainsi un premier « sonar » de haute qualité. Il fut employé dès 1916 au repérage des sous-marins, comme au sondage précis des fonds marins.*

L'intérêt scientifique pour ces phénomènes se développa encore dans l'après-guerre et un courant soutenu de recherches, pures et appliquées, civiles et militaires, fit germer dans plusieurs pays d'autres découvertes aux applications importantes, celle des résonateurs et générateurs, puis des filtres piézoélectriques dans les années 20-30 (W. G. CADY, *U.S.A., 1919*), *celle de la modulation de la lumière par les ultrasons* (L. BRILLOUIN, R. LUCAS *et* P. BIQUARD, *1932;* DEBYE *et* SEARS *aux U.S.A.*).

Mais toutes ces richesses restèrent quasiment ignorées dans l'enseignement jusqu'à la fin de la Deuxième Guerre mondiale. En particulier en France, on chercherait vainement un livre qui tente d'en-

richir l'enseignement supérieur du fruit de ces découvertes en les mettant à la portée des étudiants et en exposant pédagogiquement les doctrines qui en sont nées et qui pourtant faisaient l'objet de traités magistraux d'importance historique, tels ceux de W. Voigt *(1910), de* W. G. Cady *(1946), de* W. P. Mason *(1942-1958).*

Cette malheureuse lacune dans les conquêtes de notre littérature pédagogique expliquerait à elle seule, la forme que MM. Dieulesaint *et* Royer *ont choisi de donner à leur exposé sur les ondes* « électromécaniques ». *Ils ont construit les premiers chapitres de leur livre, comme une introduction précise aux phénomènes de base et aux méthodes analytiques très particulières qui sont nécessaires pour les décrire mathématiquement et en établir simplement la théorie. C'est ainsi que le lecteur se voit initié de manière concise mais progressive et adéquate :*

— aux principes de la cristallographie, car le couplage piézoélectrique est l'apanage de la catégorie de cristaux, dénués de « centre de symétrie »,

— aux notions de symétrie ponctuelle, indispensables pour simplifier les équations de manière appropriée aux types particuliers de cristaux qui conviennent le mieux aux diverses méthodes d'expérimentation,

— au calcul tensoriel qui reste néanmoins nécessaire pour exprimer analytiquement des lois de l'élasticité dynamique dans les cristaux anisotropes, si l'on veut atteindre toute la clarté souhaitable par l'économie de l'écriture.

Ces chapitres préliminaires, d'une pédagogie soigneuse, éprouvée et efficace, permettront au lecteur d'accéder agréablement jusqu'à la connaissance des ondes électromécaniques, dites de surface, les plus compliquées, mais aussi les plus utiles aujourd'hui. Ces caractères tiennent à ce qu'elles se propagent à la limite de deux milieux, comme les vagues de la mer, mais ici la richesse des applications, aussi bien que la précision de l'expérimentation et de la théorie, en font une étude des plus fascinantes.

Le livre se termine par un exposé très complet des principales mais déjà nombreuses applications de toutes ces ondes. Le lecteur y appréciera particulièrement le talent pédagogique et la hauteur de jugement des auteurs, qui, ici comme dans le reste de l'ouvrage, ont su équilibrer harmonieusement le souci de donner des vues d'ensemble attrayantes, avec le soin de mener le lecteur jusqu'aux détails de réalisation. Tout au long de ce livre, comme dans cette dernière partie, ils ont pu s'aider de l'exemple de problèmes, avec solutions, bien choisis.

Le rare ensemble de qualités que réunit cet ouvrage doit valoir à ses auteurs un succès mérité, auprès des jeunes chercheurs et ingénieurs du temps présent. Je souhaite aussi que les lecteurs y puisent la conviction que toute découverte si révolutionnaire et féconde soit-elle, à l'égal de celle des frères Curie *ou de* Paul Langevin, *doit être cultivée et défendue, longtemps et dans un patient travail pour parvenir à son plein épanouissement, puis se fondre dans le progrès général de la culture scientifique de son temps; professeurs et chercheurs doivent se sentir également concernés dans cet effort et y trouver à la fois un motif et un objet de leur élan créateur.*

P. Grivet.

REMERCIEMENTS

Je remercie la Direction Technique Générale de la Compagnie THOMSON-CSF, en la personne de M. Dugas, directeur scientifique, qui a autorisé la publication de ce livre. Il repose, en effet, sur des travaux en partie effectués au laboratoire d'Acoustoélectricité de cette société dont j'ai eu la charge. C'est bien cordialement que je remercie les ingénieurs qui ont été responsables des différentes sections : J. Trotel (transducteurs), J. Schmitt (amplificateurs), Ph. Defranould (lignes à ondes de volume), P. Hartemann (lignes à ondes de surface), R. Torguet (modulateurs et déflecteurs de lumière) et G. Coussot (filtres) ainsi que leurs collaborateurs J. Bauza et O. Menager; tous les techniciens, en particulier A. Soufache.

Notre entreprise a été encouragée par M. J. E. Picquendar, alors directeur au Centre de Recherches et M. M. Carpentier, alors directeur technique du département Radar. Je leur dis ma gratitude.

Il m'est aussi agréable d'exprimer ma reconnaissance :

— aux ingénieurs des services Radar et des services Tubes Électroniques pour leur coopération avec le laboratoire au cours des essais puis du développement industriel des lignes à ondes élastiques;

— aux collègues du Centre de Recherches et de la division Piézoélectricité (C. E. P. E.) qui m'ont aidé en diverses occasions;

— aux représentants des organismes d'état comme la Délégation à la Recherche Scientifique et Technique (D. G. R. S. T.), la Direction des Recherches et Moyens d'Essais (D. R. M. E.) avec lesquels j'ai eu des discussions techniques lors de l'élaboration des programmes de recherches;

— aux scientifiques français et étrangers qui m'ont adressé leurs publications, spécialement à B. Auld de l'université de Stanford qui m'a envoyé une partie du manuscrit de son livre avant sa parution;

— à P. Laurenceau de l'École Supérieure de Physique et de Chimie qui m'a toujours amicalement conseillé;

— à Madame H. Jablonska pour avoir vérifié plusieurs calculs;

— à M. R. Lyon-Caen qui m'a fait part de son expérience d'auteur.

Daniel Royer est heureux de joindre ses remerciements aux miens.

Le professeur P. Grivet nous honore en accueillant ce livre dans sa collection et en écrivant la préface. Nous le remercions respectueusement.

E. D.

TABLE DES MATIÈRES



AVANT-PROPOS

Ce livre s'adresse aux étudiants du niveau de la maîtrise de physique, aux élèves des grandes écoles, aux ingénieurs et aux professeurs de physique curieux de techniques nouvelles. Prévenons le lecteur de l'esprit dans lequel a été élaboré cet ouvrage qui n'a pas subi l'épreuve de l'enseignement.

L'étude de la propagation des ondes élastiques dans les solides anisotropes exige des connaissances sur la symétrie des cristaux et sur les tenseurs qui traduisent leurs réponses aux actions extérieures ; par ailleurs, l'exposé des applications au traitement du signal fait souvent appel à la transformation de Fourier. Les échanges de vue que nous avons eus avec des étudiants et des ingénieurs de formations différentes nous ont convaincus de l'utilité de clarifier ces notions. Ceci explique le contenu des trois premiers chapitres.

Le chapitre 4 contient la définition des déformations et des contraintes, le calcul de l'énergie potentielle élastique et le dénombrement des composantes des tenseurs élastiques des cristaux. Il n'est pas indispensable, lors d'une première lecture, d'approfondir les démonstrations relatives à la réduction de ces tenseurs.

Le chapitre 5 qui traite de la propagation des ondes élastiques est fondamental. Pour les milieux illimités, l'analyse se termine par le tracé de la surface des lenteurs de cristaux tels que le silicium, le rutile, le corindon... A partir de ces exemples, le lecteur peut résoudre d'autres cas pratiques. En ce qui concerne les milieux de dimensions finies, l'étude a été restreinte à la propagation sur un substrat plan (ondes de Rayleigh) et dans un milieu stratifié élémentaire constitué d'une couche sur un substrat (ondes de Love). En conséquence, les problèmes de réflexion et de réfraction des ondes élastiques n'ont été, au préalable, développés que dans des conditions simples utiles surtout à l'étude de ces deux types d'ondes.

Les guides d'ondes sont exclus de notre préoccupation. Dans notre esprit, ce qui a été dit au premier chapitre permet au lecteur de comprendre les applications assez anciennes des ondes guidées par un ruban (ondes de Lamb) dont il est question, brièvement, dans le dernier chapitre.

La piézoélectricité modifie les conditions de propagation et autorise, sous certaines conditions de symétrie, la propagation d'une onde de surface particulière (onde de Bleustein-Gulyaev). Ces points font l'objet de la deuxième partie du chapitre 6 dont la première est réservée à la définition des effets piézoélectriques et à leurs expressions tensorielles. Si le lecteur peut surseoir à certaines démonstrations, notamment à celles établissant

les restrictions imposées par la symétrie aux tenseurs piézoélectriques, il est important qu'il sache interpréter les résultats résumés dans les différents tableaux.

Le chapitre 7 se rapporte à la génération des ondes élastiques. Seuls sont examinés les deux principaux transducteurs piézoélectriques : le résonateur chargé pour les ondes de volume, le transducteur à peignes interdigités pour les ondes de surface. La mise en équation du fonctionnement de ce dernier est compliquée et, malgré plusieurs hypothèses simplificatrices, certains calculs sont longs. Les lecteurs impatients peuvent, après avoir compris le principe de génération des ondes de Rayleigh, aborder directement la méthode des sources discrètes.

Les ondes élastiques interagissent avec les ondes lumineuses. Cette propriété a été exploitée, surtout depuis l'avènement du laser, non seulement pour dévier ou moduler un faisceau lumineux mais aussi pour relever les caractéristiques du faisceau d'ondes élastiques. Les conditions de cette interaction sont précisées dans le chapitre 8.

Les applications des ondes élastiques au traitement du signal sont groupées dans le dernier chapitre par fonctions : retard, compression d'impulsion, filtrage... La plage de fréquences couverte s'étend de quelques mégahertz à plusieurs gigahertz. Ce domaine est en constante évolution, aussi notre but n'est-il que d'illustrer des principes et non de citer des performances. Ainsi avons-nous choisi, pour imager le texte, des photographies de lignes fonctionnant à fréquence assez basse pour que les détails des transducteurs apparaissent.

Bien que les applications présentées se rapportent à l'électronique, ce livre devrait intéresser les ingénieurs qui emploient les ondes élastiques dans d'autres disciplines, en métallurgie pour détecter les défauts de pièces, en médecine pour déceler des corps étrangers ou des tumeurs...

C'est avec regret que nous avons laissé de côté certains sujets comme le couplage entre électrons et ondes élastiques, toutefois les phénomènes d'amplification qui en résultent n'ont pas encore, à ce jour, dépassé le stade du laboratoire.

Les exercices avec solution détaillée proposés à la fin de chaque chapitre complètent l'exposé.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES ONDES. SIGNAUX. SYSTÈMES LINÉAIRES

Ce premier chapitre comprend trois parties principales.

La première rappelle les grandeurs caractéristiques des ondes planes progressives, stationnaires, guidées et la définition de la vitesse d'un groupe d'ondes.

La deuxième traite de la propagation des ondes élastiques et de la manière d'établir leur équation de propagation dans un milieu continu (fluide) et dans un milieu discontinu (solide examiné à l'échelle atomique). Le but de cette deuxième partie est de prévenir le lecteur du point de vue adopté dans ce livre : le milieu de propagation des ondes élastiques est solide, le plus souvent anisotrope (cristal) mais il est toujours considéré comme continu et intrinsèquement non dispersif puisque le domaine de fréquences étudié, inférieur à 10 GHz, se situe très loin de la fréquence de coupure des cristaux.

La troisième partie se rapporte à la décomposition spectrale d'un signal et explique le lien entre la réponse en fréquence et la réponse à une impulsion brève d'un système linéaire et invariant dans le temps. Ces notions qui font appel à la transformation de Fourier, sont indispensables à la compréhension du chapitre 9 qui décrit les applications. L'exposé des propriétés de l'impulsion de Dirac et de la transformation de Fourier n'est pas mathématiquement rigoureux. Le recours à la théorie des distributions, l'énoncé des conditions de convergence auraient détourné l'attention du lecteur du sujet : correspondance entre analyse temporelle et analyse spectrale; d'autre part les signaux physiques satisfont aux critères d'existence des intégrales rencontrées.

1. 1. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ONDES

Une rupture locale des conditions d'équilibre d'un milieu crée en général une perturbation qui se propage : c'est une onde progressive. La description d'une onde fait intervenir des paramètres : vitesse, fréquence, vecteur

nde dont la définition ne dépend pas de la nature de l'ébranlement. rsque le milieu est limité, l'onde progressive se réfléchit sur les bords. apparaît une onde stationnaire ou une onde guidée. Précisons ces ions.

1. 1. 1. — *Expression d'une onde plane progressive*

Une façon d'observer la progression d'un phénomène consiste à egistrer en un point fixe la variation, en fonction du temps, d'une ndeur caractéristique.

Pour un observateur placé au point d'abscisse x_0, le phénomène se nifeste par le niveau u de cette grandeur à l'instant t_0 (fig. 1. 1). nettons que l'ébranlement ne se modifie pas au cours de sa propagation, t pas atténué par exemple, et se déplace à vitesse constante V; alors iveau u est le même au point x et à l'instant t tels que :

$$x = x_0 + V(t - t_0)$$

bien :

$$t - \frac{x}{V} = t_0 - \frac{x_0}{V}.$$

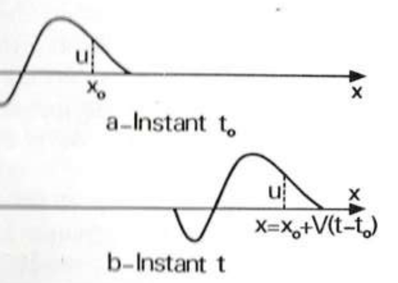


FIG. 1. 1. — *Progression d'un ébranlement.* Repéré par le niveau u au point x_0 et à l'instant t_0, l'ébranlement, se propageant à la vitesse V atteint, à l'instant t, le point x tel que

$$x = x_0 + V(t - t_0)$$

Toute fonction $u(x, t)$ qui décrit le phénomène ne dépend que du pement $t - x/V$ puisqu'elle prend la même valeur quels que soient x pourvu que la quantité $t - x/V$ soit constante :

$$\boxed{u(x, t) = F\left(t - \frac{x}{V}\right)} \qquad (1.\ 1)$$

Cette fonction $F(t - x/V)$ représente une onde progressant dans le sens if de l'axe des abscisses. Si la propagation a lieu suivant le sens tif :

$$u(x, t) = F\left(t + \frac{x}{V}\right).$$

L'ébranlement résultant de la propagation, dans le même milieu et en sens opposés, de deux ondes est :

$$u(x, t) = F_1\left(t - \frac{x}{V}\right) + F_2\left(t + \frac{x}{V}\right).$$

Parmi toutes les ruptures d'équilibre possibles, les vibrations sinusoïdales autour d'une position moyenne ont une grande importance car les autres perturbations résultent de la superposition de telles oscillations.

Considérons l'onde acoustique émise par une membrane plane animée d'un déplacement sinusoïdal

$$u_M = A \cos \omega t.$$

A une distance x, cette onde s'exprime par :

$$u = A \cos \omega\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

u désigne le déplacement d'un « plan » d'air, mais il pourrait aussi bien représenter la variation de pression ou de densité dans une tranche parallèle au plan de la membrane.

Si T désigne la période de la vibration, la fréquence $f = 1/T$ est reliée à la pulsation ω par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Il revient au même d'écrire :

$$u = A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

où la longueur d'onde $\lambda = VT$ est la distance parcourue par l'ébranlement pendant une période. Comme le phénomène se retrouve inchangé au bout du temps T, λ représente, à un instant donné, la distance qui sépare deux états identiques du fluide (air), par exemple deux maxima consécutifs de la grandeur u.

Il est aussi utile d'écrire :

$$u = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{V}\right) = A \cos(\omega t - kx)$$

où $k = \omega/V = 2\pi/\lambda$ est appelé le nombre d'onde. Le terme kx mesure, à un instant donné, le déphasage au point x du phénomène par rapport à l'origine, ici le déphasage entre la vibration de la tranche d'air à l'abscisse x et la vibration de la membrane.

Appelons φ la phase globale de l'onde :

$$\varphi = \omega t - kx$$

le nombre d'onde k est lié à la variation de la phase φ avec la distance x à un instant donné :

$$k = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t \qquad (1.\ 2)$$

tandis que la pulsation ω représente la variation de la phase φ en fonction du temps en un point donné :

$$\omega = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x \qquad (1.\ 3)$$

Il existe ainsi une correspondance temps-espace.

Temps		*Espace*	
Période T .... Pulsation ω	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	Longueur d'onde λ .... Nombre d'onde k	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

La vitesse de propagation $V = \omega/k$ est appelée vitesse de phase : c'est la vitesse à laquelle doit se déplacer un observateur pour voir à chaque instant la vibration dans le même état de phase : $\omega(t - x/V) = C^{te}$. L'onde lui apparaît immobile.

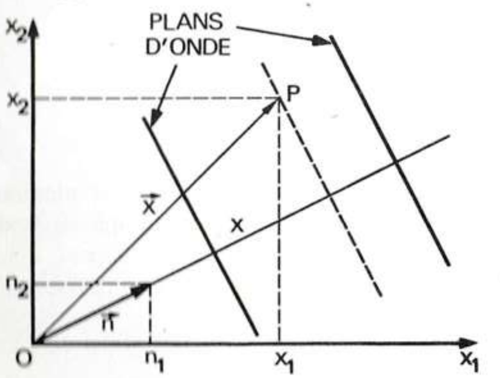


FIG. 1. 2. — *Onde plane.*
En un point quelconque P repéré par le vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$, la vibration créée par l'onde se propageant suivant le vecteur unitaire $\vec{n}$ est

$$u(\vec{x}, t) = F\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{V}\right)$$

Dans l'exemple précédent, les particules situées dans un plan parallèle à celui de la membrane vibrent en phase et le mouvement en tout point de ce plan d'onde est connu dès que la distance x du plan à l'origine est donnée. L'expression de l'état vibratoire d'un point quelconque P repéré par le vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ joignant l'origine à ce point fait intervenir le vecteur unitaire $\vec{n}$ perpendiculaire aux plans d'onde (fig. 1. 2). « L'abscisse » x du point P est la projection sur $\vec{n}$ du vecteur $\vec{x}$:

$$x = \vec{n} \cdot \vec{x}.$$

Remplaçons x par cette valeur dans l'expression 1. 1 il vient :

$$\boxed{u = F\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{V}\right).} \qquad (1.\ 4)$$

Le développement de l'expression 1. 4 dans un système d'axes orthonormés fait intervenir les coordonnées x_1, x_2, x_3 du point (composantes du vecteur $\vec{x}$) et les cosinus directeurs n_1, n_2, n_3 de la direction de propagation (composantes du vecteur $\vec{n}$) :

$$u = F\left(t - \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{V}\right).$$

Dans le cas de l'onde plane sinusoïdale :

$$u = A \cos \omega\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{V}\right)$$

ou encore

$$u = A \cos (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$$

en introduisant le vecteur d'onde

$$\vec{k} = \frac{\omega}{V}\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = k\vec{n}.$$

L'amplitude A de l'onde a été supposée constante. Il est clair que si la propagation se fait avec atténuation ou amplification, l'amplitude dépend du point d'observation P, c'est-à-dire de $\vec{x}$:

$$u = A(\vec{x}) \cos (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}).$$

Représentation complexe des fonctions sinusoïdales. — Bien que réelles, les grandeurs rencontrées en physique se représentent souvent par des nombres complexes. Cette utilisation des nombres complexes, fréquente pour les phénomènes sinusoïdaux, repose sur le fait que toute relation linéaire à coefficients réels entre des nombres complexes s'applique séparément à leurs parties réelles et à leurs parties imaginaires. Les équations de la physique sont justement très souvent linéaires avec coefficients réels.

Dans le cas d'une grandeur sinusoïdale :

$$u = A \cos (\omega t + \Phi)$$

l'intérêt de la représentation complexe :

$$u_c = A\, e^{i(\omega t + \Phi)} \qquad \text{telle que} \qquad u = \mathrm{Re}[u_c]$$

(le symbole $\mathrm{Re}[u_c]$ désigne la partie réelle de u_c) vient des propriétés de la fonction exponentielle :

— dans une somme de vibrations de même fréquence, les termes dépendant du temps $e^{i\omega t}$ se mettent en facteur :

$$\Sigma u_c = e^{i\omega t}\, \Sigma A\, e^{i\Phi};$$

— dériver par rapport au temps équivaut à multiplier par $i\omega$:

$$\frac{du_c}{dt} = i\omega u_c;$$

— le carré de l'amplitude A de la vibration est :

$$A^2 = u_c u_c^*$$

u_c^* étant la fonction complexe conjuguée de u_c.
Une onde plane sinusoïdale s'exprime en notation complexe par

$$u_c = A\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}.$$

1. 1. 2. — *Réflexion d'une onde plane progressive*

Lorsque le milieu de propagation n'est pas illimité et homogène, en particulier lorsque ses propriétés varient brusquement à l'échelle de la longueur d'onde, l'onde peut être réfléchie partiellement ou totalement. C'est aussi le cas à la frontière entre deux milieux présentant des propriétés différentes. Les conditions aux limites sur la surface de séparation qui dépendent de la nature de l'onde en général sont plus simples si l'ébranlement ne peut pas se propager dans l'un des milieux et si une des grandeurs caractéristiques de la vibration, nulle d'un côté de la frontière, doit être aussi sur celle-ci par raison de continuité.

1. 1. 2. 1. — **Incidence normale. Onde stationnaire.** — Quand l'onde incidente :

$$u_I(x, t) = F_I\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

arrive perpendiculairement à la surface de séparation des deux milieux, l'onde réfléchie se propage en sens inverse :

$$u_R(x, t) = F_R\left(t + \frac{x}{V}\right).$$

Faisons l'hypothèse que la vibration est nulle à chaque instant sur la frontière (*) (parfaitement réfléchissante). En prenant l'origine des abscisses sur celle-ci :

$$u_I(0, t) + u_R(0, t) = 0 \qquad \forall t$$

(*) Il n'est pas indispensable de préciser la nature de l'onde, ni celle de la frontière, pourvu qu'il existe une grandeur caractéristique s'annulant à la frontière. Par exemple s'il s'agit d'une onde élastique, le déplacement des particules s'annule sur une paroi rigide, la variation de pression s'annule sur une surface libre. Autres exemples : à l'extrémité d'une ligne ouverte l'intensité de courant est nulle, à l'extrémité d'une ligne en court-circuit la différence de potentielle est nulle; sur une paroi parfaitement conductrice le champ électrique tangentiel d'une onde électromagnétique est nul. Il est aussi implicitement admis que la grandeur se conserve lors de la réflexion. Le problème complexe de la réflexion des ondes élastiques à la frontière de deux solides est abordé au paragraphe 5. 3.

soit :

$$F_R(t) = -F_I(t) \qquad \forall t.$$

Il s'ensuit que l'onde réfléchie :

$$u_R = -F_I\left(t + \frac{x}{V}\right)$$

est à chaque instant symétrique de l'onde incidente par rapport à l'origine.

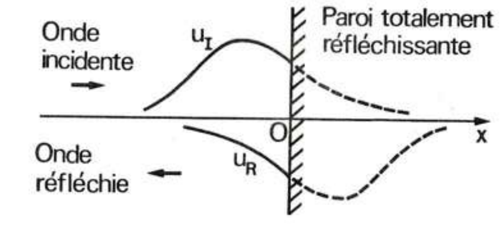


FIG. 1. 3. — *Réflexion totale d'une onde progressive.*
L'ébranlement réfléchi est symétrique de l'ébranlement incident par rapport à l'origine O prise sur la paroi.

L'onde résultant de cette réflexion totale est :

$$u = u_I + u_R = F_I\left(t - \frac{x}{V}\right) - F_I\left(t + \frac{x}{V}\right).$$

En régime sinusoïdal

$$u = A\left[\cos\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) - \cos\omega\left(t + \frac{x}{V}\right)\right]$$

$$u = 2A \sin\omega t \sin\frac{\omega x}{V}$$

la vibration est le produit de deux fonctions distinctes, l'une dépendant du temps, l'autre de l'espace. Tout aspect de propagation disparaît, il s'établit une onde stationnaire caractérisée par le fait que tous les points vibrent

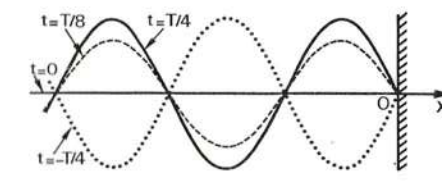


FIG. 1. 4. — *Onde stationnaire.*
La réflexion totale d'une onde progressive sinusoïdale crée un système d'ondes stationnaires.

en phase avec des amplitudes différentes comme le montre la figure 1. 4 où sont représentés quelques états vibratoires successifs. Les points d'abscisses x tels que

$$\frac{\omega x}{V} = -n\pi \qquad n = 0, 1, 2, 3,...$$

où la vibration est constamment nulle sont appelés nœuds. A mi-chemin

valle entre deux nœuds, ou deux ventres, successifs est égal à une demi-longueur d'onde.

Si la réflexion n'est pas totale, l'amplitude A_R de l'onde réfléchie est plus faible que celle de l'onde incidente (A_I) car une partie de cette onde est transmise dans l'autre milieu. L'onde résultante :

$$u = A_I \cos \omega \left(t - \frac{x}{V}\right) - A_R \cos \omega \left(t + \frac{x}{V}\right)$$

$$u = (A_I - A_R) \cos \omega \left(t - \frac{x}{V}\right) + A_R \left[\cos \omega \left(t - \frac{x}{V}\right) - \cos \omega \left(t + \frac{x}{V}\right)\right]$$

est la somme d'une onde progressive et d'une onde stationnaire :

$$u = (A_I - A_R) \cos \omega \left(t - \frac{x}{V}\right) + 2A_R \sin \omega t \sin \frac{\omega x}{V}$$

L'habitude a été prise de définir le taux d'ondes stationnaires (T.O.S.) par le rapport des valeurs maximales et minimales de la vibration :

$$\text{T.O.S.} = \frac{A_I + A_R}{A_I - A_R} \qquad (1.\ 5)$$

Le T.O.S. qui est infini en régime d'ondes stationnaires pures et égal à un pour une onde progressive, est directement lié au coefficient de réflexion $r = A_R/A_I$

$$\text{T.O.S.} = \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Examinons maintenant le cas d'une onde astreinte à se déplacer entre deux parois parallèles parfaitement réfléchissantes d'abscisses $x = 0$ et $x = -L_1$. Pour que l'onde stationnaire :

$$u = 2A \sin \omega t \sin \frac{\omega x}{V}$$

soit nulle aussi sur la frontière $x = -L_1$, il faut que :

$$\frac{\omega L_1}{V} = n\pi \qquad n \text{ entier}$$

ou bien

$$f = n \frac{V}{2L_1}.$$

FIG. 1. 5. — *Résonateur.* Premiers modes de vibration d'un résonateur constitué de deux parois parfaitement réfléchissantes.

Seules les ondes stationnaires dont la fréquence est un multiple de $V/2L_1$ peuvent exister. Les premiers modes propres de ce résonateur sont représentés sur la figure 1. 5. Les modes d'ordre pair (impair) sont antisymétriques (symétriques) par rapport au plan médian.

1. 1. 2. 2. — Incidence oblique. Onde guidée. — Supposons maintenant que le vecteur d'onde incident $\vec{k}$ ne soit plus normal aux parois. Dans le système d'axes choisi (fig. 1. 6) l'onde incidente s'exprime par :

$$u_I = A \cos (\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2).$$

Soit $\vec{k'}$ le vecteur d'onde de l'onde réfléchie totalement par le plan $x_1 = 0$

$$u_R = -A \cos (\omega t - k'_1 x_1 - k'_2 x_2).$$

Pour que la vibration résultante :

$$u = 2A \sin \left(\omega t - \frac{k_1 + k'_1}{2} x_1 - \frac{k_2 + k'_2}{2} x_2\right) \sin \left(\frac{k_1 - k'_1}{2} x_1 + \frac{k_2 - k'_2}{2} x_2\right)$$

soit nulle en tout point du plan $x_1 = 0$, il faut $k'_2 = k_2$ et pour satisfaire à la conservation du nombre d'onde ($k = k' = \omega/V$) : $k'_1 = \pm k_1$. Seule la solution $k'_1 = -k_1$ conduit à une valeur non identiquement nulle :

$$u = 2A \sin (\omega t - k_2 x_2) \sin k_1 x_1.$$

Les vecteurs d'onde incident et réfléchi sont symétriques par rapport à la surface réfléchissante.

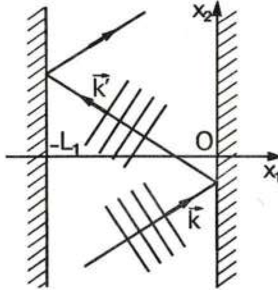


FIG. 1. 6. — *Réflexion sous incidence oblique.* L'onde se déplace dans la direction Ox_2 par réflexions successives sur les deux parois parallèles.

Pour que u s'annule aussi sur la deuxième frontière d'abscisse $x_1 = -L_1$, il faut :

$$k_1 = n \frac{\pi}{L_1} \qquad n = 1, 2, 3,...$$

L'expression définitive :

$$u = 2A \sin (\omega t - k_2 x_2) \sin \frac{n\pi}{L_1} x_1$$

est celle d'une onde se propageant suivant ox_2 dans le couloir délimité par les parois $x_1 = 0$ et $x_1 = -L_1$ qui constituent des plans nodaux. C'est une onde guidée par les parois réfléchissantes dont la vitesse de phase $V_G = \omega/k_2$ est supérieure à celle de l'onde libre $V = \omega/k$; en effet, dans l'axe du guide le défilement des plans d'ondes est plus rapide puisque ceux-ci se déplacent obliquement. A chaque valeur de l'entier n correspond un

mode; le n-ième possède, entre les parois du guide, $n - 1$ plans nodaux équidistants et parallèles à celles-ci (fig. 1. 7).

Le vecteur d'onde $k_G = k_2$ de l'onde guidée est relié à celui de l'onde libre par :

$$k_G^2 = k^2 - k_1^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2.$$

La plus petite valeur possible pour $k : k_c = \pi/L_1$ correspond à une longueur d'onde maximale : $\lambda_c = 2L_1$ dite longueur d'onde de coupure. Seules des ondes de fréquences supérieures à la fréquence de coupure $f_c = V/2L_1$ peuvent se propager dans le guide, en effet pour $f < f_c$ le vecteur d'onde k_G est imaginaire et l'onde est absorbée à son entrée dans le guide.

FIG. 1. 7. — *Propagation d'une onde guidée.* Une onde guidée présente des plans nodaux sur les parois et aussi à l'intérieur du guide si l'ordre n du mode est supérieur à 1. Ici $n = 2$ (premier mode anti-symétrique).

Un guide d'onde est un exemple de structure dispersive dans laquelle la vitesse de propagation de l'onde dépend de sa fréquence; *l'effet de dispersion est lié à la géométrie du guide* (*). La pulsation ω n'est pas proportionnelle au nombre d'onde k_G. La relation entre ces deux grandeurs, appelée relation de dispersion (**) :

$$\omega = Vk = V\left[k_G^2 + \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (1.\ 6)$$

est représentée, en coordonnées réduites, sur la figure 1. 8 pour les premiers modes. Le guide est très dispersif au voisinage de la fréquence de coupure t de ses multiples.

Si nous disposons deux nouveaux plans réflecteurs en $x_2 = 0$ et $x_2 = - L_2$, le régime qui s'établit résulte de la superposition de l'onde ncidente

$$u_I = 2A \sin(\omega t - k_2 x_2) \sin\left(\frac{n_1\pi}{L_1} x_1\right)$$

(*) Il existe toutefois dans une plaque mince un mode d'onde élastique non dispersif pelé mode d'ordre zéro (voir paragr. 9. 3. 3) qui n'a pas d'équivalent en électromagnétisme.

(**) Si plusieurs ondes peuvent se propager à des vitesses différentes dans le matériau et la réflexion sur les parois donne lieu à une conversion d'une onde en une autre, la tion de dispersion est plus compliquée. C'est le cas général pour les ondes élastiques.

et de l'onde réfléchie sur le plan $x_2 = 0$

$$u_R = - 2A \sin(\omega t + k_2 x_2) \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right).$$

L'onde stationnaire :

$$u = u_1 + u_R = - 4A \sin k_2 x_2 \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \cos \omega t$$

doit s'annuler pour $x_2 = - L_2$, ce qui impose :

$$k_2 = \frac{n_2 \pi}{L_2} \qquad n_2 = 1, 2, 3, ...$$

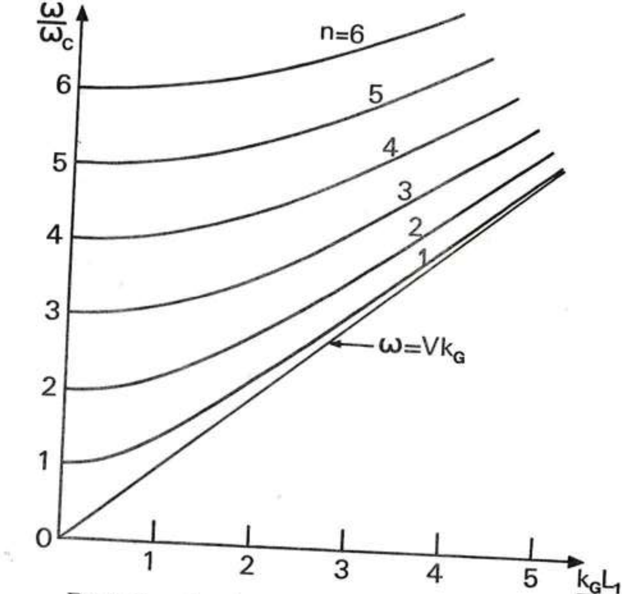


FIG. 1. 8. — *Courbes de dispersion d'un guide d'onde.* A la fréquence angulaire ω, la vitesse de phase réduite V_G/V du n-ième mode est égale à la pente de la droite joignant l'origine au point représentatif sur la courbe de ce mode.

Les fréquences permises pour cette vibration

$$u = - 4A \sin\left(\frac{n_1 \pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi x_2}{L_2}\right) \cos \omega t$$

sont données par :

$$\frac{\omega^2}{V^2} = k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

soit :

$$f = \frac{V}{2}\left[\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{1. 7}$$

Seuls peuvent exister dans cette cavité bidimensionnelle des modes de vibration dont la fréquence est une des fréquences propres données par la relation (1. 7). Pour passer au modèle tridimensionnel, il suffit de fournir à l'onde la possibilité de s'échapper suivant une direction Ox_3 perpendiculaire au plan x_1Ox_2. Cette onde guidée de vecteur d'onde k_3 a pour expression :

$$u_I = 4A \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L_2}\right) \cos(\omega t - k_3x_3).$$

Si on ferme le guide en $x_3 = 0$ par une paroi réfléchissante, l'interférence entre l'onde incidente u_I et l'onde réfléchie

$$u_R = -4A \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L_2}\right) \cos(\omega t + k_3x_3)$$

engendre une onde stationnaire de fréquence quelconque :

$$u = 8A \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L_2}\right) \sin k_3x_3 \cos \omega t.$$

La cavité parallélépipédique obtenue en fermant la dernière extrémité par une paroi à $x_3 = -L_3$, n'admet que les modes de vibration de la forme :

$$u = 8A \sin\left(\frac{n_1\pi x_1}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi x_2}{L_2}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi x_3}{L_3}\right) \sin \omega t$$

et de fréquences

$$f = \frac{V}{2}\left[\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Note. — Attention, ces formules simples pour guides ou résonateurs supposent que la réflexion sur les parois ne modifie pas l'onde. Elles sont vraies pour une onde élastique se propageant dans un fluide compris entre des parois mais le lecteur comprendra mieux plus tard, après avoir lu le paragraphe 5. 2, qu'elles ne sont pas valables, en général, pour une onde élastique se propageant à l'intérieur d'un solide car celle-ci se transforme partiellement à la réflexion en plusieurs ondes de polarisations et de vitesses différentes. Toutefois, une exception existe : il s'agit d'une onde qui crée un déplacement de particules parallèle aux frontières et perpendiculaire aux vecteurs d'ondes. Les formules 1. 6, 1. 7 et les courbes de la figure 1. 8 sont applicables à cette onde qui se conserve à la réflexion. Nous nous y rapporterons en citant au paragraphe 9. 3. 3 les guides dispersifs à ruban à onde « transversale ».

1. 1. 3. — *Vitesse d'un groupe d'ondes*

Jusqu'ici nous avons considéré uniquement des ondes monochromatiques, c'est-à-dire des vibrations sinusoïdales de durée illimitée, d'amplitude et de fréquence fixes. Prises isolément ces ondes pures offrent en pratique peu d'intérêt; en effet, un observateur qui regarde défiler une onde monochromatique ne recueille pas plus de renseignements de sa propagation monotone que de l'observation de l'écoulement régulier d'un fluide homogène. La transmission d'une information exige une anomalie, une modification de certaines grandeurs caractéristiques. Un fleuve peut apporter un message sous la forme d'un tronc d'arbre qui flotte ou d'une variation de débit. De même, le transport d'une information par une onde exige la variation d'un au moins de ses paramètres : amplitude, phase. Cette onde complexe, support d'information, n'est plus monochromatique puisque son amplitude ou sa fréquence est modulée par le signal à transmettre (voir paragr. 1. 3. 2), mais elle résulte de la superposition d'une infinité d'ondes monochromatiques d'amplitudes et de fréquences différentes (paquet ou groupe d'ondes). En prenant comme variable le nombre d'onde k

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{i(\omega t - kx)}\, dk \tag{1. 8}$$

où $A(k)$ est la densité d'amplitude du paquet d'ondes.

Deux cas sont à distinguer suivant que le milieu de propagation est ou n'est pas dispersif. Pour un parcours x_0 dans un milieu *non dispersif* où la vitesse de propagation V est indépendante de la fréquence, chaque composante du groupe est retardée de la même quantité $t_0 = x_0/V$. Au bout de ce temps t_0 le groupe se retrouve inchangé à la sortie du milieu. Ainsi dans un milieu non dispersif une onde complexe se propage sans déformation. Cette propriété se traduit de plusieurs manières :

— la vitesse de propagation est indépendante de la fréquence;

— le déphasage $\Phi = -\omega x_0/V$ dû à un parcours x_0 est proportionnel à la fréquence;

— le retard de groupe, défini par $\tau_g = -\dfrac{d\Phi}{d\omega} = \dfrac{x_0}{V}$, est indépendant de la fréquence.

Examinons maintenant la propagation d'un groupe d'ondes dans un milieu *dispersif*. En pratique la fréquence f_0 de l'onde porteuse est grande devant celle du signal, si bien que la densité d'amplitude $A(k)$ ne prend de valeur notable que dans une petite région autour de la valeur $k_0 = \omega_0/V(\omega_0)$. Dans ces conditions, il suffit de développer au premier ordre la relation de dispersion autour de k_0 :

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} (k - k_0).$$

La quantité $V_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$ a la dimension d'une vitesse. En portant dans l'expression 1. 8, il vient :

$$u(x, t) = e^{i[\omega(k_0) - k_0 V_g]t} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{-ik(x - V_g t)}\, dk$$

ce qui s'écrit encore :

$$u(x, t) = e^{i\Omega_0 t} F(x - V_g t) \qquad (1.\ 9)$$

en posant $u(x, 0) = F(x)$ et $\Omega_0 = \omega(k_0) - k_0 V_g$.

L'expression 1. 9 montre que pendant le temps t le groupe d'ondes s'est déplacé de $x = V_g t$. Ainsi dans un milieu dispersif, un paquet d'ondes centré sur le nombre d'onde k_0 se propage à la vitesse

$$\boxed{V_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}} \qquad (1.\ 10)$$

appelée vitesse de groupe.

Bien que le résultat précédent ne le révèle pas, à cause de la limitation au premier ordre du développement de la relation de dispersion (ce qui revient à confondre localement la courbe $\omega(k)$ avec sa tangente), le paquet d'ondes se déforme au cours de sa propagation. Par exemple, certaines ondes élémentaires formant le début du groupe, parties très tôt mais voyageant lentement, peuvent être rattrapées par d'autres ondes parties plus tard mais se déplaçant plus vite. Le maximum de ce groupe où la position relative des ondes varie sans cesse, se situe à l'instant t au point x tel que les ondes d'amplitudes les plus élevées interfèrent de façon constructive. Pour cela il faut que les composantes de nombre d'onde voisin de k_0 soient en phase, ce qui se traduit par :

$$\varphi(k) = \omega(k)t - kx = C^{te} \qquad \text{pour} \qquad k = k_0$$

ou bien

$$\left(\frac{d\varphi}{dk}\right)_{k_0} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} t - x = 0.$$

Nous retrouvons, par cette méthode dite de la phase stationnaire, que le paquet d'ondes se déplace à la vitesse de groupe V_g donnée par la formule 1. 10.

S'il n'y a pas d'atténuation, cette vitesse est aussi la vitesse de transport de l'énergie localisée dans le paquet d'ondes.

A titre d'exemple, reprenons le cas du guide d'onde du paragraphe 1. 1. 2. 2. La relation 1. 6 fournit immédiatement la vitesse d'un groupe d'ondes guidées :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk_G} = V k_G \left(k_G^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_1^2}\right)^{-1/2}$$

Comme la vitesse de phase est :

$$V_G = \frac{\omega}{k_G} = \frac{V}{k_G}\left(k_G^2 + \frac{n^2\pi^2}{L_1^2}\right)^{1/2}$$

le produit :

$$V_g V_G = V^2$$

est constant et égal au carré de la vitesse de propagation de l'onde libre. Les variations de ces deux vitesses en fonction de la fréquence sont représentées sur la figure 1. 9.

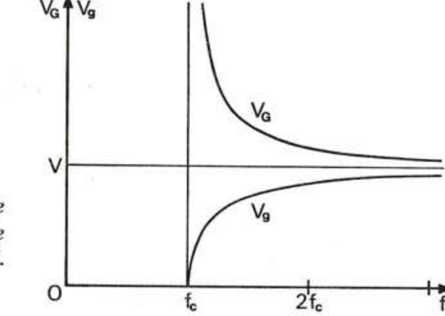


FIG. 1. 9. — *Dans un guide d'ondes la vitesse de phase V_G est supérieure à la vitesse V de l'onde libre, la vitesse de groupe V_g est inférieure à V.*

1. 2. — PROPAGATION DES ONDES ÉLASTIQUES

Les notions précédentes se rapportent aux ondes en général, quels que soient la nature de la vibration et le mécanisme de propagation. Les ondes élastiques sont des *ondes de matière :* résultant de déplacements de particules, elles n'existent que dans les milieux fluides ou solides, contrairement aux ondes électromagnétiques qui se propagent aussi dans le vide. Leur propagation est régie par l'équation de la mécanique de Newton. Nous l'explicitons d'abord pour un fluide dont les particules sont libres et puis pour un solide dont les atomes sont liés. Le premier cas est traité à l'échelle macroscopique, le deuxième à l'échelle atomique.

1. 2. 1. — Milieu continu. Aspect macroscopique

Reprenons l'exemple de l'onde plane émise dans un fluide (air) par une membrane plane vibrante. Lorsque celle-ci est au repos, la pression dans le fluide est uniforme et égale à p_0. En se déplaçant, par exemple dans le sens des x positifs, la membrane comprime la couche d'air adjacente OA (fig. 1. 10). Cette situation est instable : le fluide se détend en comprimant à son tour la tranche voisine AB. L'onde progresse ainsi de proche en proche par une succession de compressions et de détentes, la pression $p(x, t)$ dépend donc de l'abscisse x et du temps. Les forces

agissant sur une tranche quelconque MN limitée par les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ ne s'équilibrent plus, celle-ci se met en mouvement et vient en M'N'.

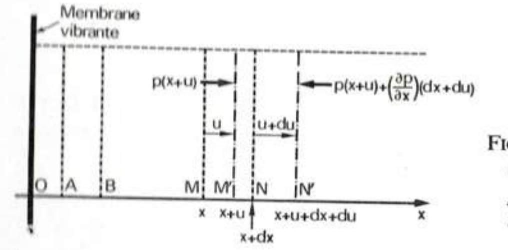


FIG. 1. 10. — *La vibration d'une membrane dans un fluide crée une onde longitudinale qui se propage en comprimant puis en détendant les tranches de fluide* OA, AB,... MN.

Soit $u(x, t)$ le déplacement à l'instant t du plan M d'abscisse x, simultanément le déplacement de la section N est $u + \mathrm{d}u$, avec :

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x.$$

Si s est la surface de la section considérée, la force exercée par le fluide situé à gauche du plan d'onde passant par M' est :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{M}'} = sp(x + u, t)$$

la force exercée par le fluide à droite de N' est :

$$\mathrm{F}_{\mathrm{N}'} = -\, sp(x + u + \mathrm{d}x + \mathrm{d}u, t) = -\, s\left[p(x + u, t) + \frac{\partial p}{\partial x}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}u)\right].$$

La résultante des forces de pression agissant sur la portion M'N' du fluide :

$$\mathrm{dF} = \mathrm{F}_{\mathrm{M}'} + \mathrm{F}_{\mathrm{N}'} = -\, s\,\frac{\partial p}{\partial x}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}u)$$

$$\mathrm{dF} = -\, s\,\frac{\partial p}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$$

communique une accélération $\gamma = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ à la masse $\mathrm{d}m = \rho_0 s\, \mathrm{d}x$ de la tranche MN (ρ_0 désigne la masse volumique du fluide au repos, c'est-à-dire sous la pression p_0). En appliquant l'équation fondamentale de la dynamique $\mathrm{dF} = \gamma\, \mathrm{d}m$ il vient :

$$\rho_0 s\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x = -\, s\,\frac{\partial p}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\,\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (1.\ 11)$$

en écrivant la pression $p(x + u, t)$ au niveau de la tranche M'N' sous la forme :

$$p(x + u, t) = p_0 + \Delta p.$$

L'écart de pression Δp par rapport à la valeur au repos p_0 est relié par le coefficient de compressibilité χ du fluide à la variation de volume Δv de la tranche MN :

$$\chi = -\,\frac{1}{v}\left(\frac{\Delta v}{\Delta p}\right).$$

Ce coefficient, toujours positif, suffit à caractériser les propriétés élastiques d'un fluide non visqueux. Le volume considéré est passé de $\mathrm{d}v_0 = s\,\mathrm{d}x$ sous la pression p_0 (position MN) à $\mathrm{d}v = s\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x$ sous la pression $p_0 + \Delta p$ (position M'N'). La dilatation est :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\mathrm{d}v - \mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}v_0} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

En reportant la variation de pression : $\Delta p = -\,\frac{1}{\chi}\frac{\partial u}{\partial x}$ dans 1. 11, il vient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right). \qquad (1.\ 12)$$

La relation de linéarité entre la variation de pression et la dilatation n'est valable que si celle-ci est petite devant l'unité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1.$$

Avec cette hypothèse, l'équation 1. 12 devient en posant $\mathrm{V}^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi}$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{V}^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.} \qquad (1.\ 13)$$

La surpression $\Delta p = -\,\frac{1}{\chi}\frac{\partial u}{\partial x}$ satisfait à la même équation différentielle ainsi que la masse volumique. Cette équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution dans le temps et dans l'espace du déplacement du fluide a été obtenue en considérant l'action de proche en proche d'une tranche de fluide sur ses voisines. Toute fonction $u(x, t)$ de la forme :

$$u(x, t) = \mathrm{F}\left(t \pm \frac{x}{\mathrm{V}}\right)$$

satisfait à l'équation 1. 13. Ainsi l'ébranlement se déplace à la vitesse V.

L'équation 1. 13, appelée équation de propagation des ondes est très générale, elle s'applique à des ébranlements de natures différentes (mécanique, électrique).

REMARQUES IMPORTANTES.

1° *Polarisation.* — Dans l'exemple du fluide, choisi pour sa simplicité, le déplacement $\vec{u}$ des particules est perpendiculaire aux plans d'ondes, c'est-à-dire parallèle au vecteur d'onde. On dit que la polarisation de l'onde élastique est longitudinale. Il peut en être autrement dans un solide : la vibration peut être perpendiculaire au vecteur d'onde et l'onde est polarisée transversalement (chap. 5). Il faut que le milieu se prête à ce genre de mouvement de cisaillement. Ainsi les fluides non visqueux ne transmettent que les ondes longitudinales.

2° *Fréquence limite.* — Existe-t-il une limite à la fréquence des ondes élastiques se propageant dans un gaz où les molécules sont en perpétuel mouvement? La vibration de la membrane crée une succession de maxima et de minima de pression (ou de masse volumique). L'onde ne peut se propager que si la distance entre un maximum et un minimum successif est grande devant le libre parcours moyen l_m des particules (distance moyenne parcourue par une particule entre deux chocs). Sinon les molécules comblent en un seul trajet la région de densité moindre et la perturbation apportée par l'onde disparaît. Cette condition exige que la longueur d'onde soit grande devant le libre parcours moyen des molécules :

$$\lambda \gg l_m \quad \Rightarrow \quad f \ll \frac{V}{l_m}.$$

Ordre de grandeur. Pour l'oxygène $V = 315$ m/s à 0 °C, $l_m = 4{,}9$ cm sous 10^{-3} mmHg, la fréquence limite est 6 400 Hz.

1. 2. 2. — Chaîne d'atomes. Aspect microscopique

Dans un solide la position d'équilibre des atomes est fixée. Lorsque la longueur d'onde devient très petite, de l'ordre de grandeur des distances interatomiques, le milieu de propagation n'est plus continu à l'échelle des variations spatiales du phénomène, ce qui impose une limite à la fréquence des ondes élastiques. Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence cette limite dans le cas d'un solide monoatomique. Les atomes sont disposés aux nœuds d'un réseau tridimensionnel régulier (paragr. 2. 2. 1) c'est-à-dire aux intersections de trois familles de droites parallèles à trois directions principales $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ supposées perpendiculaires (fig. 1. 11). Une onde élastique plane longitudinale se propageant suivant une de ces directions ($\vec{a}$ par exemple) fait osciller simultanément tous les atomes des plans perpendiculaires au vecteur d'onde, si bien que, les rangées parallèles au vecteur vibrant toutes de la même manière, il suffit de raisonner sur une seule chaîne d'atomes identiques et équidistants (fig. 1. 12).

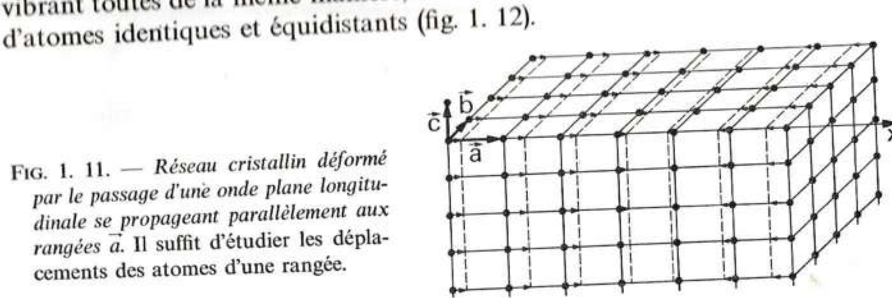


FIG. 1. 11. — *Réseau cristallin déformé par le passage d'une onde plane longitudinale se propageant parallèlement aux rangées $\vec{a}$.* Il suffit d'étudier les déplacements des atomes d'une rangée.

Si dans cette chaîne une particule est déplacée, étant données les forces de liaison, ses deux voisines se mettent en mouvement et ainsi de suite. La chaîne est déformée en même temps que l'ébranlement se propage de proche en proche. Nous limitons les interactions aux premiers voisins en supposant les déformations suffisamment petites pour que les deux forces de rappel F_1 et F_2 agissant sur chaque atome soient proportionnelles à la variation, par rapport à la valeur d'équilibre a, des distances entre cet atome et ses deux premiers voisins.

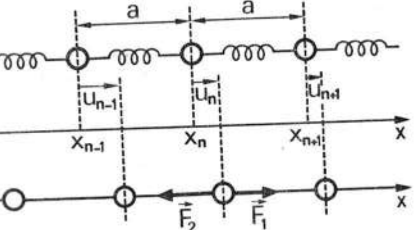


FIG. 1. 12. — *Propagation d'un ébranlement le long d'une chaîne d'atomes.* Les ressorts représentent les forces de liaison entre atomes.

En appelant u_n le déplacement de la particule n d'abscisse x_n au repos, les forces exercées par les atomes $n-1$ et $n+1$ sur le n-ième sont respectivement

$$F_1 = K(u_{n-1} - u_n) \qquad \text{et} \qquad F_2 = K(u_{n+1} - u_n).$$

L'équation du mouvement de la n-ième particule de masse M est :

$$M \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = K(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n). \qquad (1.\ 14)$$

Imposons à une des particules, prise comme origine, une oscillation sinusoïdale :

$$u_0 = A\ e^{i\omega t}.$$

En régime permanent et en l'absence d'atténuation, le mouvement de chaque atome est identique à celui de la source à un déphasage près :

$$u_n = A\ e^{i(\omega t + \Phi_n)}.$$

En substituant, dans l'équation 1. 14, u_n et les expressions analogues de u_{n-1} et u_{n+1} il vient :

$$(-M\omega^2 + 2K)A\, e^{i(\omega t + \Phi_n)} = KA\, e^{i\omega t}\,(e^{i\Phi_{n+1}} + e^{i\Phi_{n-1}})$$

ou bien :

$$-M\omega^2 + 2K = K\left[e^{i(\Phi_{n+1}-\Phi_n)} + e^{i(\Phi_{n-1}-\Phi_n)}\right]. \qquad (1.\ 15)$$

Pour que le second membre de cette équation soit réel comme le premier il faut que le déphasage $\Delta\Phi$ entre deux particules voisines soit constant le long de la chaîne :

$$\Phi_n - \Phi_{n-1} = \Phi_{n+1} - \Phi_n = \Delta\Phi.$$

Comme les atomes sont équidistants au repos, la phase Φ_n est proportionnelle à l'abscisse x_n :

$$\Phi_n = -kx_n \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi = -ka$$

où k est par définition le nombre d'onde (voir formule 1. 2). L'expression du déplacement :

$$u_n = A\, e^{i(\omega t - kx_n)}$$

est celle d'une onde longitudinale se propageant à la vitesse de phase $V = \omega/k$.

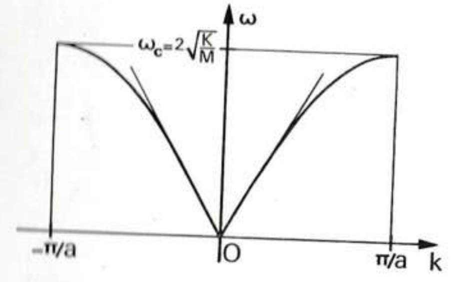


FIG. 1. 13. — *Chaîne monoatomique. Courbes de dispersion ω(k) pour le mode longitudinal.* Pour chaque fréquence inférieure à la fréquence de coupure ω_c deux ondes peuvent se propager en sens inverse avec des nombres d'onde opposés.

En portant $\Delta\Phi = -ka$ dans l'équation 1. 15 nous obtenons la relation de dispersion

$$M\omega^2 = 2K(1 - \cos ka) = 4K \sin^2 \frac{ka}{2}$$

ou encore :

$$\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|.}$$

Cette courbe de dispersion périodique est tracée sur la figure 1. 13 dans l'intervalle $[-\pi/a, +\pi/a]$ appelé première zone de Brillouin. Pour les faibles valeurs du nombre d'onde ($ka \ll 1$) c'est une droite :

$$\omega \simeq \sqrt{\frac{K}{M}}\, ak$$

dont la pente $V_0 = a\sqrt{K/M}$ est la vitesse de propagation des ondes élastiques de basse fréquence. Lorsque la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la distance interatomique a (ka voisin de π), le milieu est dispersif. Comme $|\sin ka/2| < 1$ la fréquence des ondes élastiques pouvant se propager dans un cristal est limitée par la fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{V_0}{\pi a}.$$

Pour cette fréquence la vitesse de groupe $V_g = d\omega/dk$ s'annule car la tangente à la courbe de dispersion est horizontale. Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-ika}$ vaut alors -1 indiquant que deux atomes voisins vibrent en opposition de phase.

Ordre de grandeur. — La vitesse V_0 des ondes élastiques de basse fréquence dans les solides est en général comprise entre 1 000 et 10 000 m/s. Les distances interatomiques sont de quelques Å. Avec $V_0 = 5\,000$ m/s et $a = 5$ Å $= 5 \cdot 10^{-10}$ m la fréquence de coupure est :

$$f_c = 3{,}2 \cdot 10^{12}\ \text{Hz} = 3\,200\ \text{GHz}.$$

Cette valeur est si élevée que le domaine de fréquences : quelques MHz à quelques GHz que nous considérons dans ce livre, se situe au tout début de la courbe de dispersion, là où la fréquence est proportionnelle au nombre d'onde. La longueur d'onde $\lambda = V_0/f$ comprise entre quelques mm et quelques μm (microns) est très grande devant les distances interatomiques, si bien que pour l'onde le milieu apparaît continu.

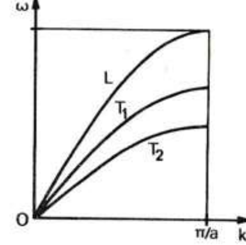


FIG. 1. 14. — *Chaîne monoatomique. Courbes de dispersion* ($k > 0$) *pour les trois modes.*

REMARQUES.

1° *Modes transversaux.* — Le déplacement des particules peut être transversal, par exemple parallèle aux vecteurs de base $\vec{b}$ ou $\vec{c}$ du réseau atomique (fig. 1. 11). Les forces de rappel sont alors différentes si bien que pour la direction de propagation $\vec{a}$, il existe trois courbes de dispersion distinctes (fig. 1. 14) :

— une pour l'onde longitudinale L : déplacement des particules (polarisation) suivant $\vec{a}$;

— une pour l'onde transversale T_1 : polarisation suivant $\vec{b}$;

— une pour l'onde transversale T_2 : polarisation suivant $\vec{c}$.

Pour une autre direction, ces courbes sont différentes car la vitesse de phase dépend de la direction du vecteur d'onde.

Dans le domaine des fréquences basses par rapport à la fréquence de coupure, le cristal n'est pas dispersif pour les ondes élastiques, mais il reste anisotrope.

2° *Branches optiques.* — Si la chaîne comprend deux sortes d'atomes (ex. 1. 6) les résultats précédents restent valables pour le centre de masse de la molécule mais, à une courbe semblable à celle de la figure 1. 13, appelée branche acoustique, s'ajoute une courbe de fréquence élevée, quel que soit le nombre d'onde, appelée branche optique (fig. 1. 26). Ces deux branches se différencient surtout pour les grandes longueurs d'onde ($ka \ll 1$); le mouvement d'ensemble des molécules s'effectue à basse fréquence (branche acoustique), le mouvement des atomes, autour des centres de masse immobiles, s'effectue à une fréquence élevée (branche optique) égale à la fréquence propre de vibration longitudinale de la molécule. Compte tenu des modes transversaux la courbe de dispersion se compose de six branches. Ce résultat se généralise : si la maille contient p atomes, il y a $3p$ branches dont $3p - 3$ branches optiques.

3° *Ondes thermoélastiques.* — Les ondes élastiques examinées ici sont des ondes cohérentes liées à des mouvements d'ensemble des particules, mais il existe dans tout matériau des ondes élastiques naturelles ou thermoélastiques dues aux oscillations désordonnées des atomes qui expliquent son comportement thermique (variation de la chaleur spécifique avec la température).

1. 3. — SIGNAUX. SYSTÈMES LINÉAIRES ET INVARIANTS DANS LE TEMPS

Les dispositifs décrits dans le dernier chapitre traitent, à l'aide d'ondes élastiques, des signaux électriques, c'est-à-dire transforment le signal $s_1(t)$ appliqué à l'entrée en un signal $s_2(t)$ recueilli à la sortie. Quelle que soit la nature du système, filtre électrique, mécanique ou tout autre quadripôle, il est possible d'établir des relations générales entre $s_1(t)$ et $s_2(t)$ à la seule condition que le système soit linéaire et invariant dans le temps.

La linéarité du système assure que si $s'_2(t)$ et $s''_2(t)$ sont les réponses respectives à deux signaux quelconques $s'_1(t)$ et $s''_1(t)$, la réponse à l'entrée $\lambda s'_1(t) + \mu s''_1(t)$ est $\lambda s'_2(t) + \mu s''_2(t)$ pour tout scalaire λ et μ. L'invariance dans le temps signifie que la réponse au signal $s_1(t + \tau)$ est $s_2(t + \tau)$ quels que soient τ et $s_1(t)$.

1. 3. 1. — Signaux réels et signaux fictifs. Impulsion de Dirac

La fonction $s(t)$ représentant la variation dans le temps d'une grandeur physique est réelle, continue et sa durée est limitée. Il est cependant utile d'introduire des fonctions non physiques mais possédant des propriétés mathématiques remarquables. Parmi celles-ci, les plus importantes sont :

— la fonction harmonique complexe $e^{i2\pi ft}$ de fréquence $f = \omega/2\pi$ qui s'étend de $-\infty$ à $+\infty$;

— l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ de durée infiniment brève, de valeur infinie à $t = 0$, d'aire unité;

— l'échelon d'Heaviside $Y(t)$ représentant une marche de hauteur unité à l'instant $t = 0$.

En étudiant la réponse aux deux premiers signaux, nous allons introduire deux fonctions caractéristiques du système et établir les liens entre ces fonctions.

La définition correcte de l'impulsion de Dirac fait appel à la théorie des distributions. Une distribution T est une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables à support borné, qui associe à toute fonction ψ appartenant à $\mathcal{D}$ un scalaire noté $T(\psi)$.

Ainsi une fonction g localement sommable peut servir à définir une distribution T_g par :

$$T_g(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\psi(x)\,dx. \qquad (1.\,16)$$

Il existe d'autres moyens d'engendrer des distributions. La distribution de Dirac δ_{x_0} au point x_0 fait correspondre à toute fonction $\psi(x)$ continue en x_0 sa valeur en ce point

$$\delta_{x_0}(\psi) = \psi(x_0).$$

Au lieu de la distribution δ_{x_0} les physiciens préfèrent utiliser une « fonction » de Dirac $\delta(x - x_0)$ qui définit δ_{x_0} par une relation analogue à 1. 16 :

$$\delta_{x_0}(\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\,\psi(x)\,dx = \psi(x_0) \qquad \forall\,\psi(x) \qquad (1.\,17)$$

Cette équation exige que la fonction de Dirac $\delta(x - x_0)$ soit nulle pour tout $x \neq x_0$:

$$\delta(x) = 0 \qquad \forall\,x \neq 0.$$

La relation 1. 17 s'écrit en conséquence :

$$\psi(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\,dx = \psi(x_0)$$

ce qui impose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta(0) = +\infty.$$

Ces conditions sont contradictoires, ainsi l'intégrale d'une fonction nulle partout sauf en un point est nulle et la distribution δ_{x_0} ne peut être engendrée par une véritable fonction. Cependant, les physiciens représentent $\delta(x)$ par la limite d'une fonction qui ne prend de valeur notable que dans une petite région autour de l'origine où elle présente un maximum

pointe très prononcée et dont l'intégrale reste égale à 1 (fig. 1. 15). Par exemple lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives :

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$$

car le maximum $1/\pi\varepsilon$ croît indéfiniment et la largeur à mi-hauteur 2ε tend vers zéro tandis que l'aire :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \, dx}{\varepsilon^2 + x^2}$$

reste constante puisque en posant $y = x/\varepsilon$ il vient :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} [\text{Arctg } y]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

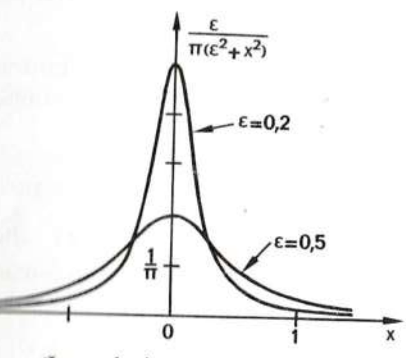


FIG. 1. 15. — *Impulsion de Dirac.*

La limite de la fonction $\frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2 + x^2)}$ lorsque ε tend vers 0_+ satisfait aux conditions imposées à la « fonction » de Dirac.

La relation entre fonctions harmoniques et impulsion de Dirac peut s'énoncer ainsi : la fonction de Dirac résulte de la superposition d'une infinité de signaux harmoniques d'amplitude unité :

$$\boxed{\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f t} \, df.} \qquad (1.\ 18)$$

Cette égalité est à prendre au sens des distributions : l'intégration (formule 1. 16) du produit d'une fonction $\psi(x)$ par l'un ou l'autre membre de cette égalité conduit au même résultat. Pour établir cette égalité remarquons que :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f t} \, df = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi(ift - \varepsilon|f|)} \, df$$

soit :

$$s(t) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{2\pi(it+\varepsilon)f} \, df + \int_{0}^{\infty} e^{2\pi(it-\varepsilon)f} \, df \right]$$

$$s(t) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon + it} + \frac{1}{\varepsilon - it} \right)$$

en définitive :

$$s(t) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2} = \delta(t).$$

L'utilisation de l'impulsion de Dirac comme signal d'entrée équivaut à appliquer au système simultanément l'ensemble des fonctions harmoniques de fréquence $-\infty$ à $+\infty$.

Physiquement, l'impulsion de Dirac est une impulsion brève — devant les constantes de temps du système — qui, appliquée au système, fournit autant de renseignements qu'une analyse point par point en fonction de la fréquence.

1. 3. 2. — Spectre d'un signal. Transformation de Fourier

Les fonctions harmoniques possèdent une propriété fondamentale : elles forment une base complète dans l'espace des fonctions de module sommable et tout signal physique $s(t)$ est décomposable en une infinité d'ondes :

$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \, e^{i2\pi f t} \, df.} \qquad (1.\ 19)$$

L'amplitude $S(f)$ du terme de fréquence f constitue le spectre du signal. Pour déterminer $S(f)$ calculons l'intégrale :

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi\nu t} s(t) \, dt$$

en remplaçant $s(t)$ par son expression 1. 19 :

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{i2\pi(f-\nu)t} \right] df.$$

D'après la formule 1. 18 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi(f-\nu)t} \, dt = \delta(f - \nu)$$

il vient :

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \delta(f - \nu) \, df = S(\nu)$$

et par conséquent en revenant à la variable f :

$$\boxed{S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi f t} \, s(t) \, dt.} \qquad (1.\ 20)$$

Cette relation montre que le spectre en fréquence d'un signal est sa transformée de Fourier. En effet, la transformée de Fourier d'une fonction $g(x)$, sommable en module, est la fonction :

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-i2\pi sx}\, dx$$

nous notons symboliquement :

$$g(x) \supset G(s).$$

Cette relation peut être lue de la droite vers la gauche

$$G(s) \subset g(x).$$

Le symbole $\subset$ représentant la transformation de Fourier inverse dont nous avons établi l'existence précédemment (formule 1. 19) :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s)\, e^{i2\pi sx}\, ds.$$

Un signal physique $s(t)$ étant une fonction réelle du temps :

$$S(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi ft} s(t)\, dt = S^*(f).$$

La partie réelle du spectre est paire

$$\mathrm{Re}[S(-f)] = \mathrm{Re}[S(f)]$$

tandis que la partie imaginaire est impaire (fig. 1. 16)

$$\mathrm{Im}[S(-f)] = -\mathrm{Im}[S(f)].$$

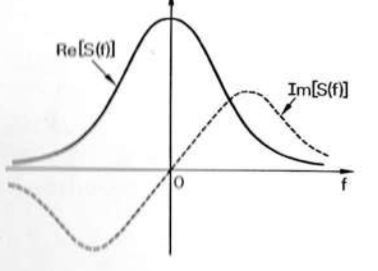


FIG. 1. 16. — *Spectre d'un signal réel.* La partie réelle est paire, la partie imaginaire est impaire.

Il suffit donc de connaître la moitié du spectre (fréquences positives) pour reconstituer un signal réel :

$$s(t) = 2\mathrm{Re} \int_0^{\infty} S(f)\, e^{i2\pi ft}\, df.$$

Si nous faisons maintenant intervenir la parité du signal $s(t)$ en introduisant les parties paire $s_+(t)$ et impaire $s_-(t)$:

$$s(t) = s_+(t) + s_-(t)$$

le spectre se décompose :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_+(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_-(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

ou :

$$S(f) = 2\int_0^{\infty} s_+(t) \cos 2\pi ft\, dt - 2i \int_0^{\infty} s_-(t) \sin 2\pi ft\, dt.$$

Il est réel et pair si le signal est pair $[s_-(t) = 0]$, imaginaire et impair si le signal est impair $[s_+(t) = 0]$.

Étudions l'effet sur le spectre d'un certain nombre de modifications apportées au signal.

SIMILITUDE. — Si $S(f)$ est le spectre de $s(t)$, le spectre de $s(at)$ est $\frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right)$. En effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(at)\, e^{-i2\pi ft}\, dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} s(at)\, e^{-i2\pi \frac{f}{a}(at)}\, d(at) = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right).$$

Une compression dans le temps du signal entraîne une expansion du spectre et inversement.

DÉCALAGE. — Le spectre de $s(t+\tau)$ est $e^{i2\pi f\tau} S(f)$. Démonstration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t+\tau)\, e^{-i2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t+\tau)\, e^{-i2\pi f(t+\tau)}\, e^{i2\pi f\tau}\, d(t+\tau)$$
$$= e^{i2\pi f\tau} S(f).$$

Un décalage du signal, par exemple un retard constant, provoque un déphasage du spectre proportionnel à la fréquence.

DÉRIVATION. — Si $S(f)$ est le spectre de $s(t)$, le spectre de ds/dt est $i2\pi f S(f)$. Démonstration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{dt}\, e^{-i2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

en utilisant le théorème précédent :

$$\frac{ds}{dt} \supset \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{e^{i2\pi f\Delta t} S(f) - S(f)}{\Delta t}\right]$$

$$\frac{ds}{dt} \supset i2\pi f S(f).$$

La dérivation favorise dans le spectre les fréquences élevées, atténue les fréquences basses et supprime le terme de fréquence nulle.

Modulation d'amplitude. — Cherchons le spectre d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 modulé en amplitude par une enveloppe $e(t)$ de spectre $E(f)$:

$$s(t) = e(t) \cos 2\pi f_0 t.$$

La transformée de Fourier de ce signal :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi f t} e(t) \cos 2\pi f_0 t \, dt$$

$$S(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \left[e^{-i2\pi(f - f_0)t} + e^{-i2\pi(f + f_0)t} \right] dt$$

est égale à :

$$S(f) = \frac{1}{2} E(f - f_0) + \frac{1}{2} E(f + f_0).$$

Le spectre d'un signal avec porteuse s'obtient en translatant dans chaque sens d'une quantité égale à la fréquence de la porteuse le spectre de l'enveloppe divisé par deux (fig. 1. 17).

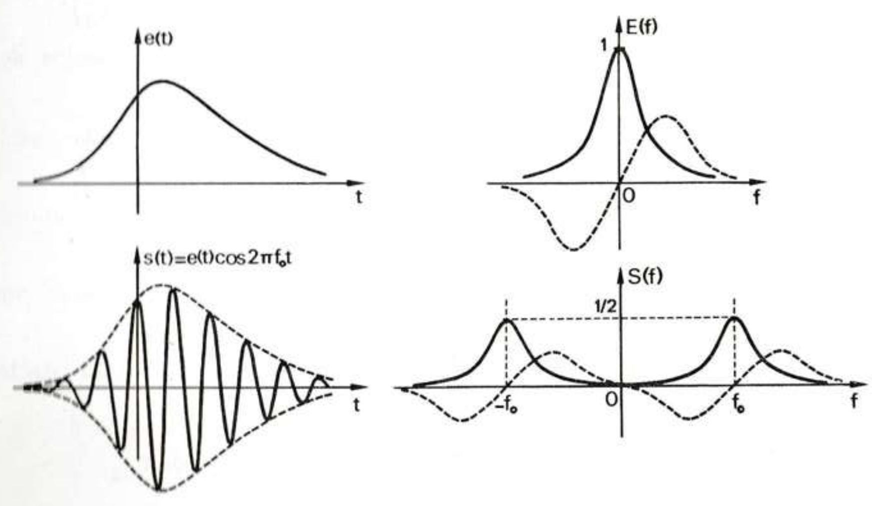


Fig. 1. 17. — *Spectre d'un signal sinusoïdal modulé en amplitude.*
Le spectre s'obtient en translatant dans chaque sens d'une quantité égale à la fréquence de la porteuse le spectre de l'enveloppe divisé par deux.

Modulation de fréquence. — Le résultat précédent se généralise. Soit un signal $s(t) = e(t) \cos \varphi(t)$ modulé en fréquence, c'est-à-dire dont la phase $\varphi(t)$ ne varie pas linéairement en fonction du temps :

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \psi(t).$$

Le spectre (*) de ce signal s'écrit en développant ...

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp i[(\omega_0 - \omega)t + \psi(t)] \, dt$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp - i[(\omega_0 + \omega)t + \psi(t)] \, dt.$$

En désignant par $E(\omega)$ le spectre de $e(t)\, e^{i\psi(t)}$:

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp i[\psi(t) - \omega t] \, dt \qquad (1.\ 21)$$

$S(\omega)$ s'exprime par :

$$S(\omega) = \frac{1}{2} E(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} E^*(-\omega - \omega_0).$$

Lorsque l'enveloppe est paire : $e(-t) = e(t)$ et lorsque la modulation de fréquence

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \frac{d\psi}{dt}$$

est symétrique par rapport à la fréquence centrale ω_0 : $\psi(-t) = \psi(t)$, il vient

$$E(-\omega) = E(\omega)$$

et

$$S(\omega) = \frac{1}{2} E(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} E^*(\omega + \omega_0). \qquad (1.\ 22)$$

Le spectre se compose de deux parties identiques en amplitude mais opposées en phase, centrées sur les fréquences ω_0 et $-\omega_0$.

Ce spectre peut être obtenu avec une bonne approximation par la *méthode de la phase stationnaire*. Les variations au cours du temps de la phase $\alpha(t) = \psi(t) - \omega t$ provoquent des oscillations très rapides de l'exponentielle $e^{i\alpha(t)}$. Ainsi à une fréquence ω_p donnée, la majeure partie de la valeur de l'intégrale 1. 21 provient de l'intervalle entourant l'instant t_p où la phase $\alpha_p(t) = \psi(t) - \omega_p t$ est stationnaire. t_p et ω_p sont donc reliés par :

$$\left(\frac{d\alpha_p}{dt}\right)_{t_p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi'(t_p) = \omega_p = \omega(t_p) - \omega_0 \qquad (1.\ 23)$$

et au voisinage de t_p

$$\alpha_p(t) \simeq \alpha_p(t_p) + \frac{1}{2} \alpha_p''(t_p)(t - t_p)^2.$$

(*) L'emploi momentané de ω allège l'écriture. En toute rigueur, il faudrait utiliser une autre notation pour S et E.

ortant ce développement dans l'intégrale 1. 21 il vient

$$E(\omega_p) \simeq e^{i\alpha_p(t_p)} \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \exp\left[\frac{i}{2}\alpha''_p(t_p)(t-t_p)^2\right] dt.$$

Si les variations de l'enveloppe $e(t)$ sont lentes devant celles de l'expo-
ielle :

$$E(\omega_p) \simeq e(t_p)\, e^{i\alpha_p(t_p)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{i}{2}\alpha''_p(t_p)(t-t_p)^2\right] dt.$$

hangement de variables

$$\alpha''_p(t_p)(t-t_p)^2 = 2\pi y^2 \quad \Rightarrow \quad dt = \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha''_p(t_p)|}}\, dy$$

duit à

$$E(\omega_p) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha''_p(t_p)|}}\, e(t_p)\, e^{i\alpha_p(t_p)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi y^2}\, dy$$

omme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi y^2}\, dy = e^{i\pi/4}$$

$$E(\omega_p) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha''_p(t_p)|}}\, e(t_p) \exp i\left[\frac{\pi}{4} + \alpha(t_p)\right]. \qquad (1.\ 24)$$

revenant à la phase $\psi(t)$

$$E(\omega_p) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{|\psi''(t_p)|}}\, e(t_p) \exp i\left[\frac{\pi}{4} + \psi(t_p) - \omega_p t_p\right] \qquad (1.\ 25)$$

second membre, fonction implicite de la fréquence ω_p par l'intermédiaire
la variable t_p et de la relation 1. 23, est en général une bonne approxi-
ation du spectre $E(\omega)$. L'application de cette formule à un signal modulé
éairement en fréquence fait l'objet de l'exercice 1. 7. Quant au module
spectre il s'exprime simplement par :

$$|E(f-f_0)|^2 \simeq |t'(f)|\, e^2[t(f)] \qquad (1.\ 26)$$

r la relation 1. 23 implique :

$$f_p = f(t_p) - f_0 \qquad \text{et} \qquad \psi''(t_p) = 2\pi f'(t_p) = \frac{2\pi}{t'[f(t_p)]}$$

$f) = \dfrac{dt}{df}$ étant la dérivée du temps en fonction de la fréquence instantanée
signal.

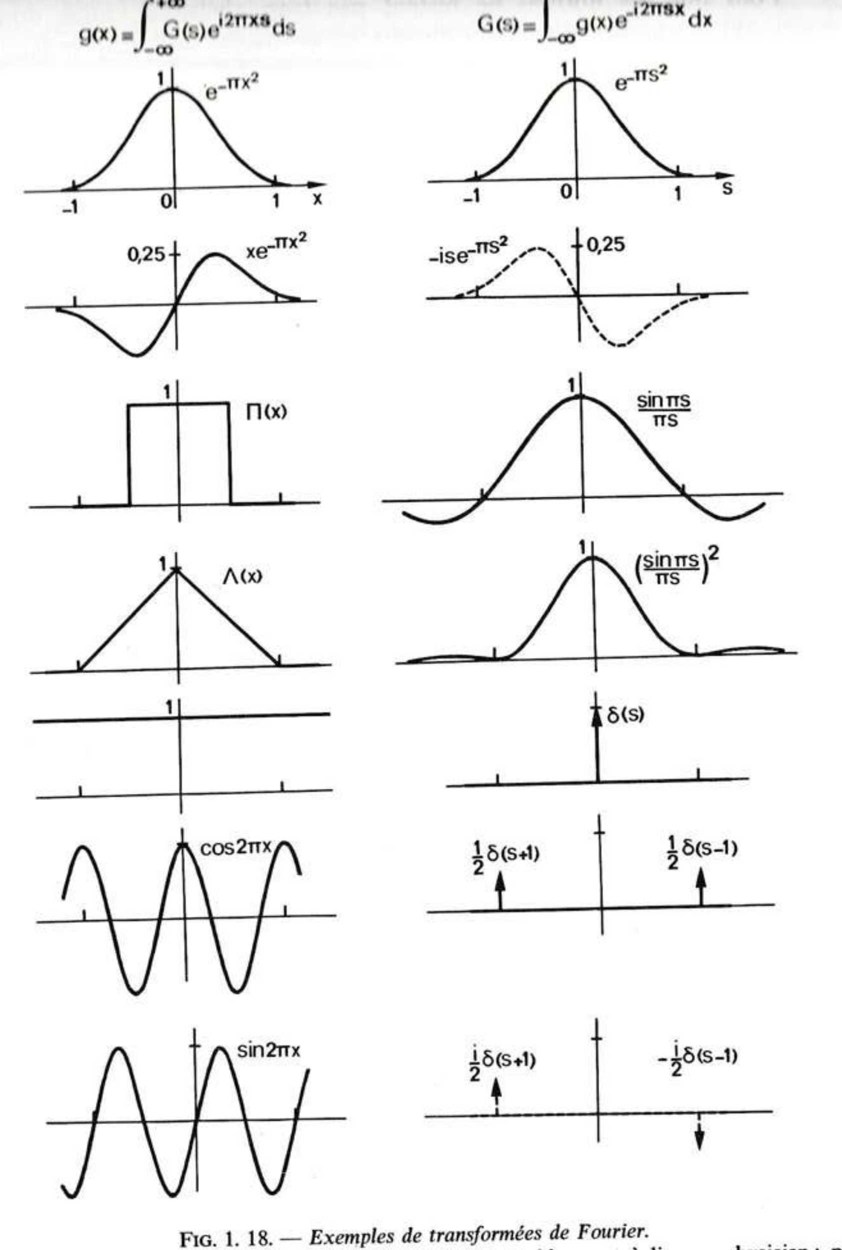


Fig. 1. 18. — *Exemples de transformées de Fourier.*

Signaux et spectres étant toujours limités en pratique ce tableau est à lire en physicien : par exemple une fonction $(\sin x)/x$ a une transformée de Fourier qui se rapproche d'autant plus d'un créneau qu'elle est définie par un plus grand nombre de lobes. La théorie de la transformation de Fourier est plus délicate qu'il ne paraît (voir le livre de E. Roubine cité en bibliographie). D'un point de vue mathématique, la correspondance de la ligne 3, lue de la droite vers la gauche, est incorrecte puisque la fonction $(\sin x)/x$ n'est pas sommable en module; la fonction $(\sin x)/x$ n'a pas de transformée de Fourier.

Pour que ces notions ne restent pas trop abstraites, nous donnons (1. 18) la transformée de Fourier directe et inverse de quelques fonctions variables conjuguées sans dimensions x et s.

Ce tableau fournit rapidement le spectre de signaux usuels. Par exemple ur une impulsion de durée Θ d'amplitude A avec une porteuse de quence f_0 (fig. 1. 19), il suffit de relever à la troisième ligne la trans- mée de Fourier du créneau $\Pi(x)$ de largeur et de hauteur unité :

$$\Pi(x) \supset \frac{\sin \pi s}{\pi s}.$$

signal est de la forme :

$$s(t) = \mathrm{A}\Pi\left(\frac{t}{\Theta}\right) \cos 2\pi f_0 t.$$

n vertu du théorème de similitude, le spectre de l'enveloppe est :

$$\mathrm{E}(f) = \Theta \mathrm{A} \frac{\sin \pi\Theta f}{\pi\Theta f}.$$

n utilisant maintenant le théorème de modulation, il vient :

$$\mathrm{S}(f) = \mathrm{A}\,\frac{\sin[\pi(f+f_0)\Theta]}{2\pi(f+f_0)} + \mathrm{A}\,\frac{\sin[\pi(f-f_0)\Theta]}{2\pi(f-f_0)}. \qquad (1.\ 27)$$

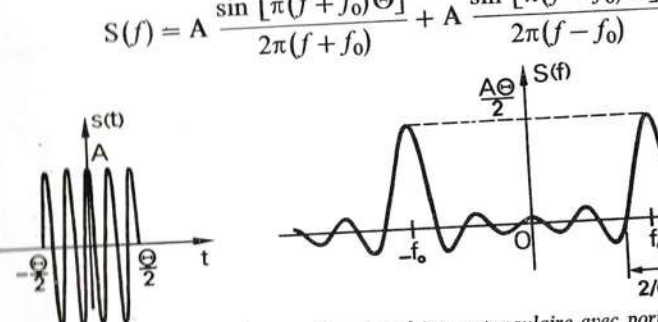


FIG. 1. 19. — *Spectre d'une impulsion rectangulaire avec porteuse.*

L'écart entre les deux zéros voisins de la fréquence centrale f_0 est $2/\Theta$. Au niveau − 3 dB par rapport au maximum, la largeur du spectre est $0{,}885/\Theta$.

La première ligne du tableau montre que la transformée d'une fonction de Gauss est aussi une gaussienne. La deuxième ligne se déduit de la précédente en appliquant le théorème de dérivation.

Nous rappelons que le spectre de l'impulsion de Dirac est égal à 1 pour toutes les fréquences, conformément à la relation 1. 18.

Les deux dernières lignes montrent que le spectre d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 est constitué de deux raies centrées sur $+f_0$ et $-f_0$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier, à titre d'exercice, les relations qui n'ont pas été démontrées.

Étudions maintenant la réponse d'un système linéaire et invariant dans le temps.

1. 3. 3. — *Réponse en fréquence d'un système linéaire et invariant dans le temps*

Si un signal harmonique de fréquence angulaire ω :

$$s_1(t) = e^{i\omega t}$$

a pour réponse $s_2(t)$, la réponse au signal décalé dans le temps :

$$s_1(t+\tau) = e^{i\omega\tau} s_1(t)$$

est, en raison de l'invariance dans le temps et de la linéarité du système :

$$s_2(t+\tau) = e^{i\omega\tau} s_2(t).$$

En posant $t + \tau = t_0$, il vient :

$$s_2(t_0)\, e^{-i\omega t_0} = s_2(t)\, e^{-i\omega t}.$$

Cette relation étant vraie quels que soient les instants t_0 et t, le produit

$$s_2(t)\, e^{-i\omega t} = \mathrm{H}(\omega)$$

est indépendant du temps; sa valeur $\mathrm{H}(\omega)$ est fonction de la pulsation, c'est la réponse en fréquence du système encore appelée fonction de transfert.

En résumé, la réponse à un signal harmonique $s_1(t) = e^{i\omega t}$ est une fonction harmonique de même fréquence :

$$s_2(t) = \mathrm{H}(\omega)\, e^{i\omega t}. \qquad (1.\ 28)$$

L'action du système se traduit par une transformation linéaire dont toute exponentielle $e^{i\omega t}$ est une fonction propre, de valeur propre $\mathrm{H}(\omega)$.

Appliquons une entrée sinusoïdale réelle :

$$s_1(t) = \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

Pour que le signal de sortie :

$$s_2(t) = \frac{1}{2}[\mathrm{H}(\omega)\, e^{i\omega t} + \mathrm{H}(-\omega)\, e^{-i\omega t}]$$

soit aussi réel, il faut $\quad [\mathrm{H}(\omega)\, e^{i\omega t}]^* = \mathrm{H}(-\omega)\, e^{-i\omega t}$

ou encore $\quad \mathrm{H}^*(\omega) = \mathrm{H}(-\omega).$

En faisant apparaître le module et l'argument $\Phi(\omega)$ de $\mathrm{H}(\omega) = |\mathrm{H}(\omega)|\, e^{i\Phi(\omega)}$ il vient :

$$s_2(t) = |\mathrm{H}(\omega)|\, \frac{e^{i(\omega t + \Phi)} + e^{-i(\omega t + \Phi)}}{2}$$

ou

$$s_2(t) = |\mathrm{H}(\omega)| \cos(\omega t + \Phi).$$

La réponse à un signal sinusoïdal d'amplitude unité est un signal sinusoïdal de même pulsation, d'amplitude et de phase égales au module et à l'argument de la réponse en fréquence.

1. 3. 4. — *Réponse impulsionnelle*

La réponse impulsionnelle $h(t)$ encore appelée réponse percutionnelle est la réponse à l'impulsion de Dirac $\delta(t)$.

La relation 1. 17 permet d'écrire pour le signal d'entrée :

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

En raison de la linéarité et de l'invariance dans le temps du système, le signal de sortie est :

$$\boxed{s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau} \,. \qquad (1.\ 29)$$

Cette opération entre $s_1(t)$ et $h(t)$ est appelée *convolution*. Par définition la convolution des deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est la fonction :

$$\mathrm{C}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y \qquad (1.\ 30)$$

qui se note brièvement :

$$\mathrm{C}(x) = f(x) * g(x).$$

Le calcul du produit de convolution se décompose en trois opérations comme le montre la figure 1. 20.

1° renversement et translation de $g(x)$ qui devient $g(x-y)$;
2° produit des fonctions $g(x-y)$ et $f(y)$;
3° calcul de l'aire de ce produit (formule 1. 30).

Le produit de convolution est commutatif (il est aussi associatif) : le changement de variable $u = x - y$ dans l'intégrale donne

$$f*g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u = g*f.$$

Il est intéressant de rapprocher de la fonction de convolution, la fonction de corrélation définie par

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g^*(y-x)\,\mathrm{d}y. \qquad (1.\ 31)$$

étapes que le calcul de $\mathrm{C}(x)$, à la différence près que la fonction g ne doit pas être inversée. Si g est identique à f, $\Gamma(x)$ est l'autocorrélation de la fonction f.

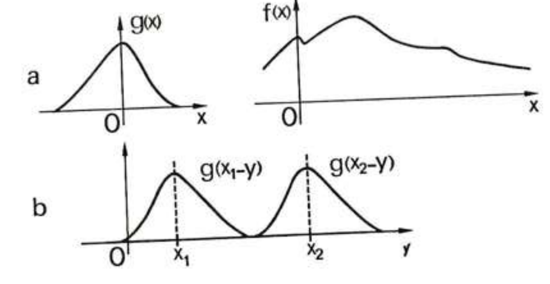
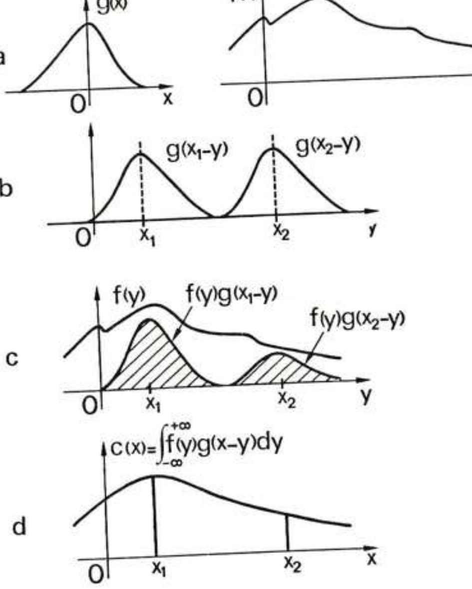



FIG. 1. 20. — *Convolution entre deux fonctions.*
a) fonctions $f(x)$ et $g(x)$;
b) inversion et translation de $g(x)$;
c) produit de $f(y)$ et $g(x-y)$;
d) aire du produit en chaque point.

D'après la relation 1. 29, la réponse à une entrée harmonique $s_1(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$:

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\omega\tau}h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

s'écrit en posant $u = t - \tau$

$$s_2(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega u}h(u)\,\mathrm{d}u.$$

Le coefficient de proportionnalité entre la sortie et l'entrée harmonique n'est autre que la fonction de transfert (relation 1. 28), en conséquence :

$$\boxed{\mathrm{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t}h(t)\,\mathrm{d}t} \,. \qquad (1.\ 32)$$

Ainsi fonction de transfert et réponse impulsionnelle sont liées par la transformation de Fourier :

— la réponse en fréquence d'un système linéaire et invariant est le spectre de sa réponse impulsionnelle

— ou en inversant la relation 1. 32, la réponse impulsionnelle est la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi ft} H(f)\, df . \qquad (1.33)$$

1. 3. 5. — Réponse à un signal quelconque

Nous disposons maintenant de deux méthodes pour déterminer la réponse d'un système linéaire et invariant dans le temps à une action quelconque.

1° L'analyse temporelle fournit $s_2(t)$ par convolution de la réponse impulsionnelle avec le signal d'entrée :

$$s_2(t) = h(t) * s_1(t). \qquad (1.34)$$

2° L'analyse harmonique repose sur la décomposition du signal d'entrée en une somme de fonctions harmoniques :

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f)\, e^{i2\pi ft}\, df.$$

Ce qui conduit, en raison de la linéarité du système, à :

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) H(f)\, e^{i2\pi ft}\, df.$$

Tableau 1. 21. — *Réponse d'un système linéaire et invariant dans le temps.*

ENTRÉE ⟶	SYSTÈME LINÉAIRE ET INVARIANT	⟶ SORTIE
Harmonique : $e^{i2\pi ft}$	$H(f)$	Harmonique : $H(f)\, e^{i2\pi ft}$
Sinusoïdale : $\cos 2\pi ft$	$H(f) = \lvert H(f)\rvert\, e^{i\Phi(f)}$	Sinusoïdale déphasée : $\lvert H(f)\rvert \cos(2\pi ft + \Phi)$
Impulsion de Dirac : $\delta(t)$		Réponse impulsionnelle : $h(t)$
Signal : $s_1(t)$ ↕ de ↕ spectre : $S_1(f)$	convolution avec $h(t)$ ↕ multiplication par $H(f)$	signal : $s_2(t) = h(t) * s_1(t)$ ↕ de ↕ spectre : $S_2(f) = H(f) S_1(f)$

d'entrée par la fonction de transfert du système :

$$S_2(f) = H(f) S_1(f). \qquad (1.35)$$

Cette propriété est aussi une conséquence de la relation 1. 34 car la transformée de Fourier de l'intégrale de convolution de deux fonctions est le produit des transformées de Fourier de chacune des fonctions.

La traversée d'un système linéaire et invariant s'accompagne d'un déphasage $\Phi(\omega)$ égal à l'argument de la réponse en fréquence. Lorsque ce déphasage n'est pas proportionnel à la fréquence, le système est dispersif. Le retard d'un groupe de composantes du signal, de fréquences voisines de ω_0 est défini comme au paragraphe 1. 1. 3 par

$$\tau_g = -\left(\frac{d\Phi}{d\omega}\right)_{\omega_0} . \qquad (1.36)$$

Le tableau 1. 21 résume ces résultats en mettant en évidence par une flèche les couples de fonctions reliées par transformation de Fourier.

1. 3. 6. — Correspondance entre le spectre d'un signal et le diagramme de rayonnement d'une source

L'utilisation de la transformation de Fourier se rencontre dans de nombreux domaines de la physique. Elle met en évidence des couples de variables conjuguées :

— fréquence f et temps t en théorie du signal,

— impulsion $\vec{p}$ et position $\vec{r}$ en mécanique quantique,

— « direction » $\sin \alpha$ et ouverture de la source x/λ comme nous le montrons ci-dessous.

En fait, le rayonnement d'une source recouvre deux problèmes :

— l'émission d'une antenne fournissant elle-même l'énergie rayonnée (élément actif),

— la diffraction d'un faisceau parallèle par une ouverture réémettant l'énergie du faisceau qui l'éclaire (élément passif).

Considérons une source unidimensionnelle suivant l'axe x (fig. 1. 22) et soit :

$$u(x) = A(x) \cos [\omega t + \Phi(x)]$$

la vibration au point P d'abscisse x sur la source. Nous pouvons écrire :

$$u(x) = \mathrm{Re}\,[g_0(x)\, e^{i\omega t}]$$

en désignant par $g_0(x) = A(x)\, e^{i\Phi(x)}$ la distribution des amplitudes complexes sur la source. A une distance r, l'amplitude de la vibration créée par l'élément compris entre x et $x + dx$ est :

$$g_0(x)\, e^{-i2\pi\frac{r}{\lambda}}\, dx$$

λ) représente le retard de phase dû au parcours r. La vibration totale oint M repéré par le vecteur $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$ est la somme :

$$G_0(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x)\, e^{-i2\pi\frac{r}{\lambda}}\, dx. \qquad (1.\ 37)$$

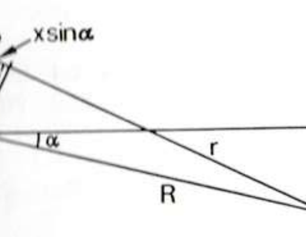


FIG. 1. 22. — *Rayonnement d'une source rectiligne.*
La vibration émise par le point P arrive en M avec un retard de phase égal à $2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \alpha$ par rapport à la vibration émise par le centre de la source.

Loin de la source, c'est-à-dire à une distance R = OM grande devant la gueur de l'antenne, $r(x) \gg x\ \forall\ x$, l'approximation :

$$r = R + x \sin \alpha$$

valable. L'expression 1. 37 :

$$G_0(\vec{R}) = e^{-i\frac{2\pi R}{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x)\, e^{-i2\pi\frac{x}{\lambda}\sin\alpha}\, dx$$

décompose en un facteur $e^{-i\frac{2\pi R}{\lambda}}$ représentant le déphasage à la distance oyenne R et une partie angulaire :

$$G_0(\sin \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x)\, e^{-i2\pi\frac{x}{\lambda}\sin\alpha}\, dx.$$

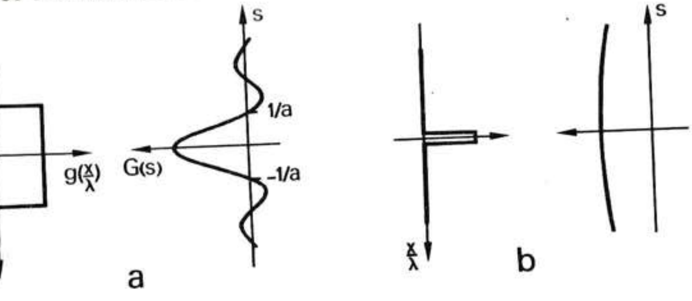
A grande distance, la répartition angulaire $G_0(\sin \alpha)$ du rayonnement t reliée à la distribution d'amplitude de la source $g_0(x)$ par la transforation de Fourier. Pour mettre celle-ci sous la forme classique nous posons = sin α et nous rapportons les abscisses x à la longueur d'onde λ :

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)s}\, d\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{G_0(s)}{\lambda} \quad \text{avec} \quad g\left(\frac{x}{\lambda}\right) = g_0(x).$$

La fonction $G(s)$, proportionnelle à $G_0(s)$, est appelée diagramme de ayonnement ou spectre angulaire de la source. En inversant la transformaon de Fourier, il vient :

$$g\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s)\, e^{i2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)s}\, ds.$$

En fait, l'intervalle d'intégration est limité à [− 1, + 1] car s est le sinus d'un angle; pour que le résultat de cette intégration diffère peu de $g(x/\lambda)$ il faut que $G(s)$ soit pratiquement nulle pour $|s| > 1$, c'est-à-dire que la source soit assez directive.



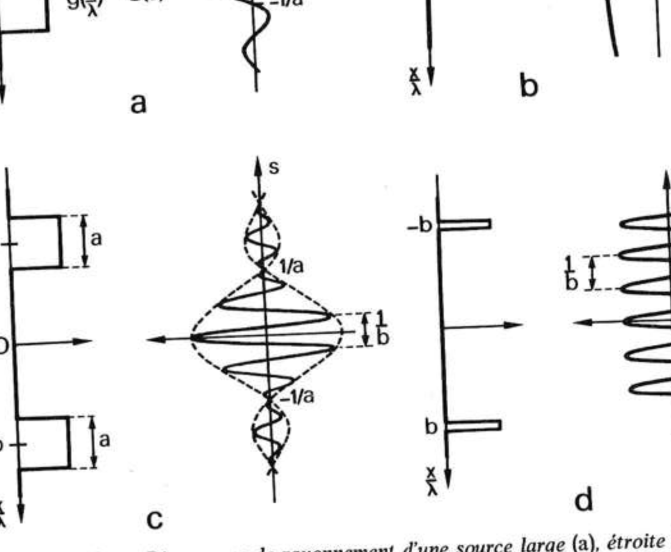


FIG. 1. 23. — *Diagramme de rayonnement d'une source large* (a), *étroite* (b) *et de deux sources synchrones larges* (c), *étroites* (d).

La correspondance suivante précise l'analogie avec signaux et spectres :

Signaux	*Sources*
Temps t	Abscisse en longueur d'onde x/λ
Fréquence f	Direction $s = \sin \alpha$
Signal $s(t)$	Distribution d'amplitude sur la source $g(x/\lambda)$
Spectre $S(f)$	Diagramme de rayonnement $G(s)$.

Les exemples ci-dessous se traitent rapidement en utilisant le tableau des transformées de Fourier (fig. 1. 18) :

— le diagramme de rayonnement d'une antenne de longueur $a\lambda$ est :

$$\frac{\sin \pi s a}{\pi s};$$

— une ouverture de petite dimension devant λ a un spectre angulaire plat;

— le diagramme de rayonnement de deux antennes de longueur a, espacées de $2b\lambda$, est :

$$2\,\frac{\sin \pi sa}{\pi s}\cos 2\pi bs;$$

— deux ouvertures petites par rapport à la longueur d'onde λ produisent un spectre sinusoïdal (expérience des trous d'Young) : $\cos 2\pi bs$.

Ces exemples illustrés sur la figure 1. 23 montrent que plus l'antenne est grande devant la longueur d'onde, plus elle est directive.

Nous avons supposé que la vibration était une grandeur scalaire. Les résultats restent valables pour des vibrations vectorielles car le rayonnement, par hypothèse, est observé loin de la source. Le milieu a été considéré comme isotrope.

BIBLIOGRAPHIE

Propriétés générales des ondes.

J. Bok et P. Morel. — *Cours de physique. Mécanique-Ondes*, Paris : Hermann (1968).
W. C. Elmore and M. A. Heald. — *The physics of waves*, New York : Mc Graw-Hill (1969).

Paquet d'ondes. Vitesse de groupe.

P. Grivet. — *Physique des lignes de haute fréquence et d'ultra haute fréquence*, tome I, chap. 5, p. 195. Paris : Masson et Cie (1969).

Chaîne d'atomes.

L. Brillouin. — *Wave propagation in periodic structures*. New York : Dover (1953).

Théorie des distributions.

L. Schwartz. — *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, p. 76. Paris : Hermann (1965).

Signaux. Transformation de Fourier.

E. Roubine. — *Introduction à la théorie de la communication*, tome I. Paris : Masson et Cie (1970).
R. Bracewell. — *The Fourier transform and its applications*. New York : Mc Graw Hill (1965).

EXERCICES

● **1. 1.** Démontrer la relation

$$\langle \mathrm{Re}[u_1]\cdot\mathrm{Re}[u_2]\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[u_1 u_2^*].$$

Le symbole $\langle\ \rangle$ désigne la valeur moyenne dans le temps et $u_k = A_k\,e^{i(\omega t+\Phi_k)}$ $\quad k = 1, 2.$

Solution.

$$\langle \mathrm{Re}[u_1]\cdot\mathrm{Re}[u_2]\rangle = A_1A_2\,\langle\cos(\omega t+\Phi_1)\cos(\omega t+\Phi_2)\rangle = \frac{A_1A_2}{2}\,\langle\cos(2\omega t+\Phi_1+\Phi_2)+\cos(\Phi_1-\Phi_2)\rangle$$

Comme la valeur moyenne d'un cosinus est nulle :

$$\langle \mathrm{Re}[u_1]\cdot\mathrm{Re}[u_2]\rangle = \frac{A_1A_2}{2}\cos(\Phi_1-\Phi_2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[u_1u_2^*].$$

● **1. 2.** En supposant les compressions adiabatiques ($pv^\gamma = C^{te}$), établir l'expression de la vitesse du son dans un gaz parfait de masse moléculaire M, à la température θ. Application à l'air à 0 °C (M = 29 g, $\gamma = 1{,}4$).

Solution. Le coefficient de compressibilité adiabatique $\chi_\sigma = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_\sigma = \frac{1}{\gamma p_0}$ se déduit de l'équation d'une transformation adiabatique : $pv^\gamma = C^{te}$. En reportant dans la formule $V = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi}}$ il vient pour un gaz parfait $V = \sqrt{\frac{\gamma R\theta}{M}}$. Application : V = 330 m/s.

● **1. 3.** Montrer que le rapport $\Delta p/\dot u$ de la surpression Δp et de la vitesse de vibration des particules $\dot u = \frac{\partial u}{\partial t}$ est une constante pour une onde progressive dans un fluide donné.

Solution. Comme $u = F\left(t - \frac{x}{V}\right)$: $\Delta p = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\chi V}F'$ et $\dot u = F'$ en conséquence $\frac{\Delta p}{\dot u} = \frac{1}{\chi V} = \rho_0 V$. Cette constante $Z = \rho_0 V$ est l'impédance élastique par unité de surface du milieu (une impédance est définie en mécanique par le rapport de la force et de la vitesse).

● **1. 4.** En écrivant la continuité du déplacement u et de la surpression Δp, à la frontière entre deux milieux d'impédances élastiques (exercice 1. 3) différentes Z et Z′, déterminer les coefficients de réflexion A_R/A_I et de transmission A_T/A_I (fig. 1. 24).

FIG. 1. 24. — *Réflexion à la frontière entre deux milieux d'impédances élastiques différentes.*

Solution. La continuité du déplacement sur la frontière $x = 0$ fournit : $A_I + A_R = A_T$. Compte tenu des résultats de l'exercice précédent : $(\Delta p)_I = Z\dot u_I$, $(\Delta p)_R = -Z\dot u_R$, $(\Delta p)_T = Z'\dot u_T$, la continuité de la surpression : $(\Delta p)_I + (\Delta p)_R = (\Delta p)_T$ conduit à

$$Z(A_I - A_R) = Z'A_T.$$

Les coefficients de réflexion et de transmission :

$$\frac{A_R}{A_I} = \frac{Z - Z'}{Z + Z'} \qquad \frac{A_T}{A_I} = \frac{2Z}{Z + Z'}$$

dépendent uniquement du rapport des impédances élastiques. Cas limites :

1) $\frac{Z'}{Z} = \infty$: $\frac{A_R}{A_I} = -1$, $\frac{A_T}{A_I} = 0$, la réflexion est totale et le déplacement s'annule sur une surface rigide. 2) $\frac{Z'}{Z} = 0$, $\frac{A_R}{A_I} = 1$, la réflexion est totale et la surpression Δp s'annule sur une surface libre. Pour $x > 0$, il n'y a pas de matière ($Z' = 0 \Rightarrow \rho' = 0$) et donc pas de déplacement.

• **1. 5.** Montrer que l'équation du mouvement d'une particule 1. 14 se ramène à l'équation de propagation 1. 13 dans un milieu continu lorsque $\lambda \gg a$.

Solution. Si $\lambda \gg a$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est un infiniment petit du :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{a} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{u_n - u_{n-1}}{a} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_n}.$$

L'équation 1. 14 devient

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t} = Ka\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_{n+1}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_n}\right].$$

Le même raisonnement conduit à l'équation 1. 13

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{Ka^2}{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = V_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

puisque $V_0 = a\sqrt{\frac{K}{M}}$ est la vitesse des ondes élastiques de basse fréquence.

• **1. 6.** Considérons une chaîne d'atomes équidistants de masse M_1 pour les atomes de rang pair et $M_2 > M_1$ pour ceux de rang impair (fig. 1. 25). Écrire l'équation du mouvement des atomes de rang $2n$ et $2n+1$. En posant $u_{2n} = A_1\, e^{i(\omega t - 2nka)}$ et $u_{2n+1} = A_2\, e^{i[\omega t - (2n+1)ka]}$ établir la relation $\omega(k)$ et tracer les courbes de dispersion. Étudier les cas $ka \ll 1$ et $ka = \pi/2$.

M1 M2 a 2n 2n+1

FIG. 1. 25. — *Chaîne diatomique.*

Solution. Les équations du mouvement des atomes de rang $2n$ et $2n+1$ sont analogues à 1. 14 :

$$M_1\frac{d^2u_{2n}}{dt^2} = K(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 2u_{2n})$$

$$M_2\frac{d^2u_{2n+1}}{dt^2} = K(u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1}).$$

En portant les expressions des déplacements il vient :

$$\begin{cases} (2K - M_1\omega^2)A_1 - (2K\cos ka)A_2 = 0 \\ -(2K\cos ka)A_1 + (2K - M_2\omega^2)A_2 = 0. \end{cases}$$

La condition de compatibilité de ces deux équations homogènes :

$$\begin{vmatrix} 2K - M_1\omega^2 & -2K\cos ka \\ -2K\cos ka & 2K - M_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

fournit les relations de dispersion :

$$(\omega_{\substack{1\\2}})^2 = K\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) \mp K\left[\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)^2 - 4\frac{\sin^2 ka}{M_1M_2}\right]^{1/2}.$$

La courbe de dispersion $\omega_1(k)$ a la même allure que celle de la chaîne monoatomique (fig. 1. 26). Si $ka \ll 1$ les solutions $\omega_1 \simeq \left(\frac{2K}{M_1 + M_2}\right)^{1/2} ak$ et $A_1 = A_2$ correspondent à la propagation d'une onde élastique à la vitesse $V_0 = a\sqrt{\frac{2K}{M_1 + M_2}}$, d'où le nom de branche acoustique donnée à la courbe $\omega_1(k)$. L'autre solution donne pour $ka \ll 1$, $\omega_2 = \sqrt{2K\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)}$ et $M_1A_1 + M_2A_2 = 0$: deux atomes consécutifs vibrent en opposition de phase avec des amplitudes A_1 et A_2 telles que le centre de masse de la molécule reste immobile. Si les deux particules portent des charges électriques opposées (ions), il est possible d'exciter cette vibration par un champ électrique de fréquence $\omega_2(0)/2\pi$ ($\simeq 10^{12}$ à 10^{13} Hz) située dans l'infrarouge, d'où le nom de branche optique donnée à la courbe $\omega_2(k)$.

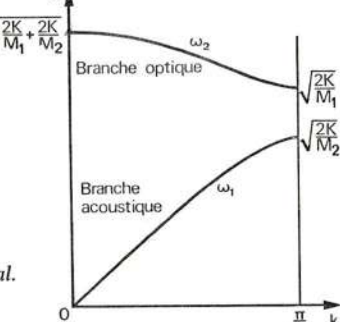


FIG. 1. 26. — *Courbes de dispersion d'une chaîne diatomique pour le mode longitudinal.*

$$\text{Pour} \quad ka = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{M_2}} \quad \text{et} \quad A_1 = 0 \quad \text{les atomes légers sont immobiles} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2K}{M_1}} \quad \text{et} \quad A_2 = 0 \quad \text{les atomes lourds sont immobiles.} \end{cases}$$

• **1. 7.** Déterminer, par la méthode de la phase stationnaire, le spectre d'une impulsion de durée Θ dont la porteuse est modulée linéairement en fréquence sur une bande B (fig. 9. 12) :

$$s(t) = \Pi\left(\frac{t}{\Theta}\right)\cos\varphi(t) \qquad \text{avec} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt} = f_0 + \frac{B}{\Theta}t.$$

Solution. Pour ce signal $\psi(t) = \pi\frac{B}{\Theta}t^2$ et d'après la formule 1. 23 :

$$\omega_p = 2\pi\frac{B}{\Theta}t_p \Rightarrow t_p = \frac{\Theta}{B}f_p$$

il vient, en reportant dans l'expression 1. 25 :

$$E(f) = \sqrt{\frac{\Theta}{B}}\,\Pi\left(\frac{f}{B}\right)\exp i\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi\Theta}{B}f^2\right].$$

Le spectre $S(f) = \frac{1}{2} E(f - f_0) + \frac{1}{2} E^*(f + f_0)$ se compose en amplitude de deux rectangles de largeur B centrés sur les fréquences f_0 et $-f_0$. La phase varie paraboliquement avec la fréquence. Le calcul complet effectué au paragraphe 9. 3. 2 montre que l'approximation de la phase stationnaire est d'autant plus valable que le produit BΘ est grand devant 1.

• **1. 8.** Calculer la transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$

Solution.

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi s x}\,dx = e^{-\pi s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+is)^2}\,dx.$$

Comme la fonction complexe $e^{-\pi z^2}$ n'a pas de pôle, l'intégrale sur le contour Γ de la figure 1. 27 est nulle :

$$\int_\Gamma e^{-\pi z^2}\,dz = \int_{-a}^{+a} e^{-\pi x^2}\,dx + i\int_0^s e^{-\pi(a+iy)^2}\,dy + \int_a^{-a} e^{-\pi(x+is)^2}\,dx + i\int_s^0 e^{-\pi(-a+iy)^2}\,dy = 0.$$

Lorsque $a \to \infty$ il ne subsiste que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+is)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1 \qquad \forall s \qquad \text{d'où } G(s) = e^{-\pi s^2}.$$

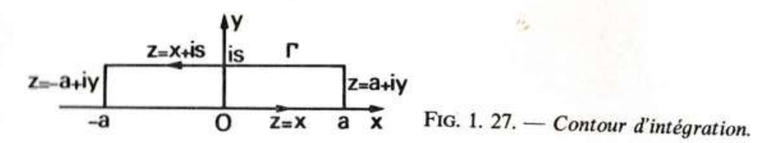


FIG. 1. 27. — *Contour d'intégration.*

• **1. 9.** Montrer que $\Lambda(x) = \Pi(x) * \Pi(x)$. En déduire, à l'aide du théorème de la transformation de Fourier d'un produit de convolution, que $\Lambda(x) \supset \left(\frac{\sin \pi s}{\pi s}\right)^2$.

Solution. L'intégrale de convolution $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(y)\,\Pi(x - y)\,dy$, égale à l'aire commune aux deux rectangles centrés à l'origine et au point $y = x$, vaut $\Lambda(x)$ (fig. 1. 28). Comme la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier : $\Lambda(x) = \Pi(x) * \Pi(x) \supset \left(\frac{\sin \pi s}{\pi s}\right)^2$.

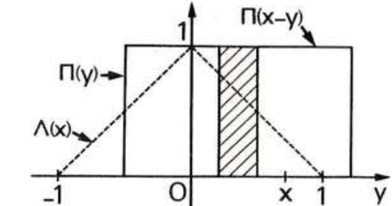


FIG. 1. 28. — *Convolution de deux fonctions créneau.*

• **1. 10.** Démontrer la relation : $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi m x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)$.

Solution. Soit $T(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi m x}$ remarquons que

$$e^{-i2\pi x}\,T(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(m+1)x} = T(x) \quad\Rightarrow\quad (e^{-i2\pi x} - 1)T(x) = 0.$$

Cette dernière équation montre que $T(x)$ est nul pour tout x non entier.

Découpons l'intégrale du produit de $T(x)$ par une fonction $g(x)$ quelconque :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)g(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \qquad \text{avec} \qquad I_n = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} T(x)g(x)\,dx \quad n \text{ entier.}$$

Comme dans l'intervalle $\left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]$, $T(x)$ est nul partout sauf pour $x = n$:

$$I_n = Cg(n) \qquad \text{avec} \qquad C = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} T(x)\,dx$$

la constante C est indépendante de l'entier n car $T(x+1) = T(x)$. En définitive la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)g(x)\,dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi m x} g(x)\,dx = C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) \qquad (1.\ 38)$$

s'écrit avec la transformée de Fourier $G(s)$ de $g(x)$:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} G(m) = C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n). \qquad (1.\ 39)$$

Pour calculer la constante C il suffit de particulariser $g(x)$; avec

$$g(x) = \Pi(x) \quad\Rightarrow\quad G(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s}$$

il vient $C = 1$ car $g(0) = G(0) = 1$ et $g(n) = G(n) = 0$ lorsque $n \neq 0$. Il résulte de 1. 39 la formule de Poisson : $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} G(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n)$ et de la relation 1. 38, vraie quel que soit $g(x)$, la formule cherchée :

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi m x}. \qquad (1.\ 40)$$

• **1. 11.** Expliciter $\delta[g(x)]$.

Solution. Calculons l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[g(x)]\,dx$ en effectuant le changement de variable $y = g(x) \Rightarrow dy = |g'(x)|\,dx$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f[g^{-1}(y)]\,\frac{\delta(y)\,dy}{|g'[g^{-1}(y)]|} = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

où x_0 est un zéro de $g(x) : x_0 = g^{-1}(0)$. Si $g(x)$ s'annule pour plusieurs valeurs $x_n [g'(x_n) \neq 0]$:

$$\delta[g(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|}.$$

CHAPITRE 2

ÉLÉMENTS DE CRISTALLOGRAPHIE

Les ondes élastiques se propagent dans tout milieu matériel, mais leur plitude décroît au cours de la propagation car les chocs d'un atome au ant ne sont pas purement élastiques. L'atténuation des ondes est d'autant faible que le milieu est plus ordonné. Ainsi, un liquide donne lieu à pertes plus grandes qu'un solide, un solide amorphe ou polycristallin es pertes plus grandes qu'un monocristal. D'autre part, ces pertes crois- très vite avec la fréquence si bien que les liquides ne sont guère isés au-delà de 50 MHz et seuls les monocristaux sont employés à des uences de l'ordre du gigahertz. En raison de l'anisotropie des cristaux, aines directions sont plus favorables que d'autres à la propagation d'un d'onde : le vecteur d'onde et le vecteur d'énergie, par exemple, ne sont néaires que suivant des directions particulières. Par ailleurs, la création ondes élastiques de très haute fréquence nécessite des cristaux piézo-triques. La compréhension des phénomènes de propagation et de géné-on des ondes élastiques exige des connaissances claires sur les propriétés cristaux, en particulier sur leur symétrie.

Dans ce chapitre, la structure cristalline est analysée à partir du réseau lu motif. Les cristaux sont classés suivant leur symétrie d'orientation qui e un rôle très important en tant que symétrie des propriétés physiques croscopiques du cristal. La symétrie de recouvrement liée à l'aspect croscopique du cristal est seulement évoquée. La structure de quelques staux employés dans les applications est décrite.

2. 1. — DÉFINITION DE L'ÉTAT CRISTALLIN

Il convient de distinguer, parmi les solides, les corps *amorphes* des *staux*. Les premiers, dépourvus de formes géométriques caractéristiques, sont que des liquides extrêmement visqueux (*). Ils subissent, si on les

(*) Entre les deux variétés : liquide, monocristal se situent les « cristaux liquides » actérisés par un ordre suivant une ou deux directions et les solides polycristallins consti- d'un agglomérat de monocristaux microscopiques dont le comportement à l'échelle macro-pique est isotrope.

chauffe une fusion pâteuse : leur fluidité augmente continûment avec la température (c'est le cas des résines, des verres). Pendant le refroidissement, la seule modification visible est une augmentation de la viscosité; la courbe de décroissance de la température en fonction du temps ne présente aucun palier.

Au contraire, dans le cas d'un solide cristallisé, pendant le refroidissement du liquide, la température se stabilise dès qu'apparaissent des germes solides de forme polyédrique : ce sont des cristaux. Tous ces *polyèdres* sont convexes et semblables, *i. e.* les angles dièdres entre les faces naturelles des cristaux d'une même espèce sont toujours saillants et constants quel que soit l'aspect de l'échantillon.

Les polyèdres de quartz, par exemple, sont des prismes hexagonaux terminés par une pyramide à chaque extrémité. Deux faces du prisme font entre elles un angle de 120° exactement; entre une face du prisme et une face adjacente de la pyramide, l'angle est de 141° 47′; entre deux faces contiguës de la pyramide, l'angle est de 133° 44′ (fig. 2. 1).

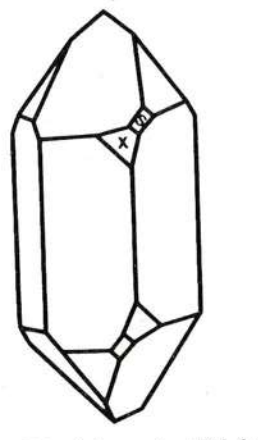


FIG. 2. 1. — *Cristal de quartz idéal du point de vue du développement des faces.* Il existe, en plus des faces du prisme et des pyramides, trois paires de facettes *s* et *x* qui réduisent la symétrie autour de l'axe du prisme à l'ordre 3.

FIG. 2. 2. — *Coupe de la pyramide d'un cristal de quartz réel.* Bien que le polygone diffère de l'hexagone régulier, les angles entre les faces sont de 120°.

Les faces du cristal peuvent être développées de manières très différentes comme le montre toute coupe perpendiculaire à l'axe du prisme (fig. 2. 2), mais l'orientation des faces est constante : *le faisceau des normales aux faces d'un cristal, menées à partir d'un point fixe, constitue une figure géométrique invariable.* Cette propriété, dite loi de constance des angles, fut énoncée par Romé de l'Isle au XVIII[e] siècle.

L'examen des cristaux d'une même espèce montre que le milieu cristallin est *anisotrope* et *homogène.*

La présence des faces ayant une orientation bien définie est une mani-

festation d'anisotropie, de même que l'allure des figures de choc (ex. : fissure en étoile du mica produite par une pointe), l'aspect différent des figures de corrosion suivant les faces attaquées (ex. : sulfure de cadmium), le clivage suivant des plans privilégiés (mica, calcite). L'observation de ces effets est à l'origine de l'hypothèse formulée au XVIIIe siècle par R. J. Haüy d'une structure ordonnée, périodique, de la matière à l'échelle atomique, hypothèse vérifiée en 1912 par une expérience de Friedrich, suggérée par Von Laue, sur la diffraction des rayons X par les cristaux. La variation discontinue avec la direction de certaines propriétés comme la diffraction des rayons X, le clivage, l'orientation des faces naturelles, est caractéristique de l'état cristallin, mais la plupart des propriétés sont continues. Du point de vue qui nous intéresse, retenons qu'en raison de l'anisotropie les propriétés mécaniques d'un cristal comme la vitesse de propagation des ondes élastiques varient avec la direction.

Le milieu cristallin est homogène car le comportement de plusieurs échantillons macroscopiques de mêmes dimensions et de même orientation taillés dans un cristal est identique. A l'échelle atomique où le milieu cristallin est discontinu, l'homogénéité subsiste au sens de Bravais : il existe dans le cristal, suivant trois directions distinctes, une infinité discrète de points homologues d'un point quelconque, c'est-à-dire possédant le même environnement atomique.

2. 2. — STRUCTURE CRISTALLINE

L'aspect extérieur et les propriétés *macroscopiques* des cristaux incitent à les classer suivant la symétrie du faisceau des normales aux faces naturelles appelée *symétrie d'orientation.* Le dénombrement de ces classes de symétrie nécessite la connaissance de la structure atomique, qui explique et conditionne les propriétés macroscopiques, aussi commençons-nous par décrire la structure du milieu cristallin.

2. 2. 1. — *Périodicité du milieu cristallin. Réseau. Rangées. Plans réticulaires. Mailles*

Le milieu cristallin se caractérise par la présence d'une infinité de points géométriques équivalents à un point O quelconque du cristal. Tous ces points homologues ont le même environnement atomique et se déduisent les uns des autres par une succession de translations élémentaires de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Un homologue M quelconque de l'origine O est repéré par :

$$\overrightarrow{OM} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$$

où m, n, p sont des entiers relatifs.

L'ensemble de ces points homologues, appelés *nœuds*, forme un *réseau tridimensionnel* qui traduit la périodicité du cristal dans toutes les directions (fig. 2. 3).

Le réseau est décomposable en unités simples unidimensionnelles : les rangées, bidimensionnelles : les plans réticulaires, tridimensionnelles : les mailles.

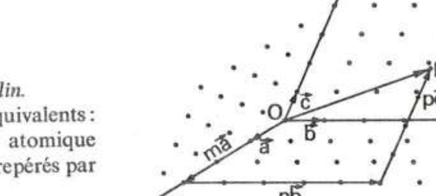


FIG. 2. 3. — *Réseau cristallin.*
Tous les nœuds du réseau sont équivalents : ils ont le même environnement atomique que l'origine O. Ces points sont repérés par $\overrightarrow{OM} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

RANGÉES. — Les nœuds du réseau sont disposés aux intersections de trois familles de droites parallèles. La figure 2. 4 illustre, pour un réseau plan, plus facile à représenter sur une feuille, la décomposition en deux familles de droites parallèles. Sur chacune de ces droites, appelées rangées, les nœuds du réseau sont équidistants. Trois entiers relatifs premiers entre eux, u, v, w, définissent la rangée $[u, v, w]$ par le *vecteur :*

$$\vec{R}_{u,v,w} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$$

joignant un nœud à son suivant immédiat. Ainsi, sur la figure 2. 4 ($w = 0$), les rangées de la famille D_3 sont notées $[2, \bar{1}, 0]$, $\bar{1}$ signifiant -1.

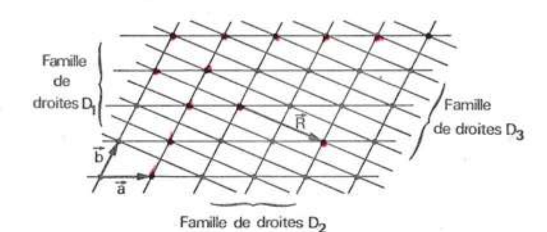


FIG. 2. 4. — *Rangées.*
Les nœuds d'un réseau plan sont situés aux intersections de deux quelconques des familles de droites D_1, D_2, D_3... Pour la famille D_3 : $\vec{R} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

L'examen de cette figure montre que la densité linéaire de nœuds varie avec la direction : elle est élevée sur les rangées à indices petits telles que D_1 $[1, 0, 0]$ ou D_2 $[0, 1, 0]$ et faible sur celles à indices grands telles que D_3 $[2, \bar{1}, 0]$. Pour un cristal donné, le nombre de nœuds par unité de volume étant fixé, la direction de plus grande densité correspond à l'écartement maximum entre rangées voisines. Les atomes étant plus rapprochés, les forces de cohésion sont plus grandes suivant les rangées à indices petits. Dans certains cristaux, la différence de cohésion suivant une rangée et entre rangées voisines peut être si importante que le matériau se divise en fibres (c'est le cas de l'amiante).

PLANS RÉTICULAIRES. — Il est possible de répartir tous les nœuds du réseau dans une famille de *plans parallèles équidistants* appelés plans

réticulaires qui se déduisent les uns des autres par la translation élémentaire d'une rangée quelconque non contenue dans les plans de la famille (fig. 2. 5).

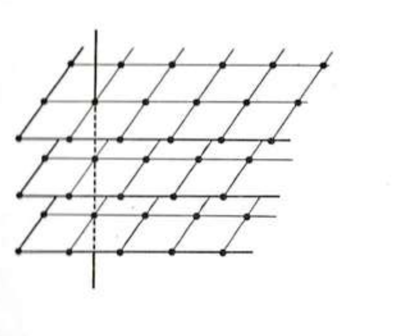


FIG. 2. 5. — *Famille de plans réticulaires.*

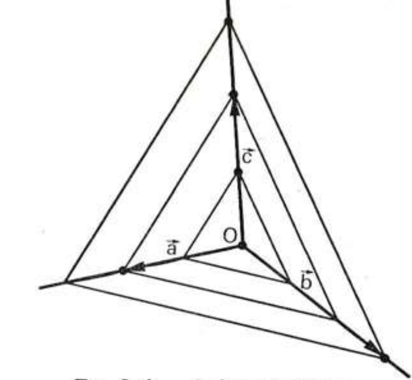


FIG. 2. 6. — *Indices de Miller.*
L'écartement de deux plans voisins est $a/2$ suivant $\vec{a}$, $b/3$ suivant $\vec{b}$, $c/2$ suivant $\vec{c}$. Les indices (de Miller) de cette famille de plans sont : 2, 3, 2.

La notation utilisée pour distinguer les familles de plans réticulaires est due à Miller. Comme il existe un nœud à l'origine et un à l'extrémité de chaque vecteur $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, il passe un plan de la famille considérée par chacun de ces quatre points. Dans le cas général, d'autres plans s'intercalent entre ceux-ci si bien que *chaque vecteur de base est divisé en segments égaux*. Si l'écartement entre deux plans voisins est a/h suivant $\vec{a}$, b/k suivant $\vec{b}$, c/l suivant $\vec{c}$, les nombres entiers h, k, l sont par définition les indices de Miller de la famille de plans réticulaires. La notation (h, k, l) désigne l'ensemble des plans et non un plan particulier (fig. 2. 6). Un indice négatif s'écrit surmonté d'une barre : $\bar{k}$. Un indice est nul si les plans sont parallèles à l'axe correspondant.

Pour un nombre de nœuds par unité de volume fixé, les plans à petits indices de Miller (100), (010), (001), qui sont les plus écartés, portent la plus forte densité de nœuds par unité de surface. Ces plans à forte cohésion jouent un rôle important : ce sont des plans de clivage éventuels car les liaisons interréticulaires sont relativement faibles; ils réfléchissent les rayons X plus fortement que les autres plans.

MAILLES. — Le réseau peut aussi être regardé comme un empilement de *parallélépipèdes identiques* à celui construit sur les trois vecteurs de base $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (fig. 2. 7). Les nœuds sont aux sommets de ces parallélépipèdes appelés mailles.

Pour un cristal donné, le réseau est unique, toutefois il est possible de l'engendrer par d'autres vecteurs de base $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ et de définir d'autres mailles, comme le montre la figure 2. 8 dans le cas d'un réseau plan.

Les mailles bâties avec trois vecteurs de base sont simples car elles ne contiennent pas d'autres nœuds que ceux situés sur les huit sommets. Ces nœuds, appartenant à sept autres mailles que celle considérée, ne comptent que pour 1/8 si bien qu'il n'y a qu'*un nœud par maille simple*. Une maille multiple (double, triple...) contient plus d'un nœud. Soit une maille construite sur les vecteurs :

$$\vec{a}' = u_1\vec{a} + v_1\vec{b} + w_1\vec{c}$$

$$\vec{b}' = u_2\vec{a} + v_2\vec{b} + w_2\vec{c}$$

$$\vec{c}' = u_3\vec{a} + v_3\vec{b} + w_3\vec{c}$$

son volume V′ est égal à la valeur absolue du produit mixte $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$.

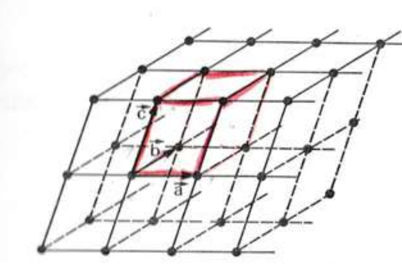


FIG. 2. 7. — *Mailles.*
Le réseau peut être regardé comme un empilement de parallélépipèdes identiques appelés mailles.

FIG. 2. 8. — *Un réseau peut être engendré par différents systèmes de vecteurs de base et donc décrit par des mailles différentes.*

Comme :

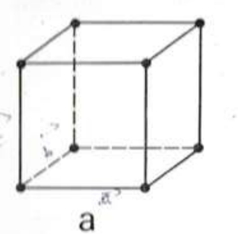
$$(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$V' = pV$$

où $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ est le volume d'une maille simple et p la valeur absolue du déterminant. La maille considérée est multiple d'ordre p car elle contient p nœuds (le volume occupé par un nœud est V).

Un réseau est souvent défini par une maille multiple plus symétrique que les mailles simples. C'est le cas du réseau cubique à faces centrées (c. f. c.) obtenu en plaçant un nœud au centre des six faces de la maille du réseau cubique primitif (fig. 2. 9*a*). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien d'un réseau : l'environnement de chaque nœud est le même, qu'il soit à un sommet ou au centre d'une face du cube. La maille cubique est quadruple car les six nœuds des faces, appartenant à deux mailles, comptent pour 1/2 ($4 = 8 \cdot 1/8 + 6 \cdot 1/2$). La maille simple construite sur les vecteurs reliant un sommet aux centres des trois faces qui se croisent en ce sommet est un rhomboèdre (fig. 2. 9*b*).

Nous rencontrerons d'autres exemples de mailles multiples au paragraphe 2. 3. 2. 3 consacré au dénombrement des réseaux.



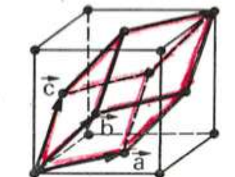


FIG. 2. 9. — *Réseau cubique à faces centrées* (c. f. c.).

Le réseau c. f. c. est obtenu (*b*) en ajoutant un nœud au centre de chaque face de la maille du réseau cubique primitif (*a*). La maille cubique est alors quadruple. La maille élémentaire est le rhomboèdre construit sur les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. 2. 2. — *Structure atomique. Le motif*

La structure atomique d'un cristal est déterminée sans ambiguïté une fois connus le réseau et la *grappe d'atomes* appelée *motif* disposée aux nœuds du réseau (fig. 2. 10).

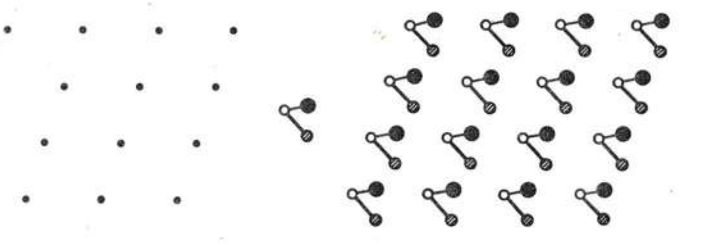


FIG. 2. 10. — *Structure atomique d'un cristal.*
Un cristal est formé par adjonction du motif à chaque nœud du réseau.

Le motif le plus simple est un atome unique; le cristal correspondant s'obtient en plaçant cet atome à chaque nœud du réseau. C'est le cas des nombreux métaux dont le réseau est cubique à faces centrées : cuivre (3,61 Å), argent (4,071), or (4,070), aluminium (4,041), nickel, platine..., le nombre entre parenthèses indique la dimension en angström de l'arête de la maille cubique. Celle-ci contient quatre atomes, par exemple ceux de coordonnées 000, 1/2 1/2 0, 1/2 0 1/2, 0 1/2 1/2, avec l'arête du cube pour unité, les autres appartenant aux mailles adjacentes. La figure 2. 11*a* représente cette structure vue de dessus. Le nombre de traits dans les cercles précise la position verticale des atomes : chaque trait vaut 1/4 d'arête. D'autres métaux (lithium, sodium, potassium, chrome...) ont un réseau cubique centré avec un atome à chaque nœud dont la maille cubique comprend deux atomes de coordonnées réduites 000 et 1/2 1/2 1/2 (fig. 2. 11*b*).

D'autres cristaux monoatomiques comme le silicium et le germanium ont une structure plus compliquée du type diamant. Pour ces trois corps, le réseau est cubique à faces centrées mais la maille quadruple contient huit atomes aux positions 000, 1/2 1/2 0, 1/2 0 1/2, 0 1/2 1/2, 1/4 1/4 1/4, 3/4 3/4 1/4, 3/4 1/4 3/4, 1/4 3/4 3/4 (fig. 2. 11*c*). Les quatre dernières positions se déduisent des quatre premières par une translation égale au quart de la diagonale. Les deux atomes composant le motif ont donc pour coordonnées 000 et 1/4 1/4 1/4. Ce résultat se retrouve en raisonnant sur la maille simple rhomboédrique qui comprend deux atomes (fig. 2. 11*c*).

Si le motif est constitué de deux atomes différents, la structure est celle de la blende (ZnS), de l'arséniure de gallium (AsGa).

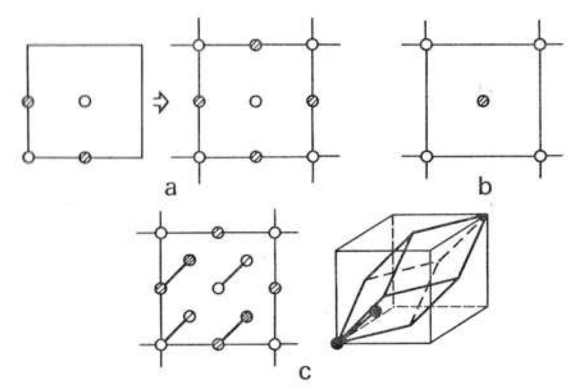


FIG. 2. 11. — *Exemples de structures cubiques.*

a) cubique à faces centrées;
b) cubique centrée;
c) cubique à faces centrées avec motif à deux atomes (type diamant) : maille cubique quadruple et maille rhomboédrique simple.

Citons comme autre exemple de composé diatomique le chlorure de césium cristallisant dans le réseau cubique simple dont le motif comprend un des ions Cl^- aux sommets du cube (0, 0, 0) et l'ion Cs^+ au centre (1/2, 1/2, 1/2).

2. 3. — SYMÉTRIE D'ORIENTATION DES CRISTAUX

La périodicité du milieu cristallin ne peut être mise en évidence que par des mesures à l'échelle des paramètres de la maille (quelques angströms) effectuées, par exemple, à l'aide de la diffraction des rayons X. Du point de vue *macroscopique*, les translations élémentaires du réseau sont infiniment petites si bien que la périodicité n'influe pas directement sur les propriétés physiques du cristal; celui-ci apparaît continu et *seule l'anisotropie intervient.* Cette anisotropie n'est pas totale : pour une direction arbitraire, il peut exister des *directions équivalentes* suivant lesquelles les propriétés macroscopiques du cristal sont identiques. L'ensemble des opérations de symétrie qui amènent le cristal dans une position indiscernable, par des mesures

macroscopiques, de la position de départ constitue la symétrie d'orientation du cristal encore appelée *symétrie ponctuelle* car, les translations étant exclues, les opérations de symétrie conservent au moins un point immobile.

La symétrie ponctuelle d'un cristal peut être déterminée par la symétrie du faisceau des normales à ses faces naturelles dont l'orientation n'est qu'une propriété physique particulière du cristal. Ce faisceau de demi-droites étant invariable pour une espèce donnée, le dénombrement des classes de symétrie d'orientation des variétés cristallines peut s'établir d'après ce critère lié à l'aspect extérieur.

Toutefois, nous suivons ici une démarche différente s'inspirant des résultats précédents sur la structure cristalline : une fois définis les éléments de symétrie ponctuelle et établies quelques relations utiles, nous examinons en premier lieu la symétrie ponctuelle du réseau puis celle du cristal. La périodicité du réseau réduit le nombre d'éléments de symétrie et impose certaines relations si bien qu'il n'existe pour les réseaux que sept classes de symétrie déterminant chacune un système cristallin. Deux réseaux différents pouvant présenter la même symétrie, Bravais a dénombré quatorze manières de distribuer des points dans l'espace. *La symétrie du cristal* (*réseau + motif*), *au plus égale à celle de son réseau*, s'obtient en supprimant certains éléments de la classe de symétrie du réseau. Les 32 classes de symétrie d'orientation des cristaux sont ainsi rangées naturellement dans les sept systèmes cristallins.

2. 3. 1. — *Les opérations de symétrie ponctuelle*

2. 3. 1. 1. — Définitions. — Les éléments de symétrie ponctuelle sont de deux types :

1° Les éléments de symétrie *directe* qui se réduisent aux axes de rotation directs. Un cristal possède un axe de rotation direct d'ordre n entier, noté A_n, si une rotation d'angle $2\pi/n$ autour de cet axe l'amène dans une position indiscernable de celle de départ.

2° Les éléments de symétrie *inverse* qui se décomposent en un centre de symétrie et en axes de rotation inverses. Le centre de symétrie C correspond à l'opération de symétrie par rapport à un point, appelée aussi inversion. Un cristal possède un axe de rotation inverse d'ordre n, noté $\bar{A}_n$, si une rotation d'angle $2\pi/n$ autour de cet axe suivie d'une symétrie par rapport à un point de l'axe amène le cristal dans une position indiscernable de celle de départ. Le produit, symbolisé par un point, de ces deux opérations est commutatif :

$$\bar{A}_n = A_n . C = C . A_n .$$

La symétrie par rapport à un plan est un cas particulier d'axe de rotation inverse. La figure 2. 12 montre qu'un *axe inverse d'ordre 2* est identique à un plan de symétrie, ou *miroir M*, perpendiculaire à l'axe au point d'inversion :

$$\bar{A}_2 \equiv M.$$

De même un centre de symétrie est un axe inverse d'ordre 1 : $\bar{A}_1 = C$.

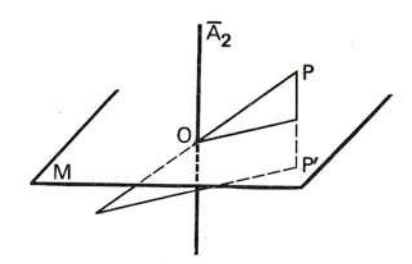


Fig. 2. 12. — *Un axe inverse d'ordre deux* ($\bar{A}_2$) *est équivalent à un miroir M perpendiculaire.*

2. 3. 1. 2. — Projection stéréographique. — Pour établir des relations plus complexes entre les éléments de symétrie ponctuelle il est commode de disposer d'une représentation plane, par exemple la projection stéréographique (fig. 2. 13*a*) qui amène sur le plan équatorial E les points d'une sphère de rayon R à l'aide d'une inversion de puissance $2\,R^2$ et de pôle S (sud) pour les points de l'hémisphère nord et de pôle N (nord) pour les points de l'hémisphère sud. Grâce au changement de pôle d'inversion, tous les points se projettent à l'intérieur du cercle équatorial. Comme toute inversion, la projection stéréographique conserve les angles : les transformés de deux courbes tracées sur la sphère qui se coupent en un point C sous l'angle α se coupent sur la projection de C sous le même angle α.

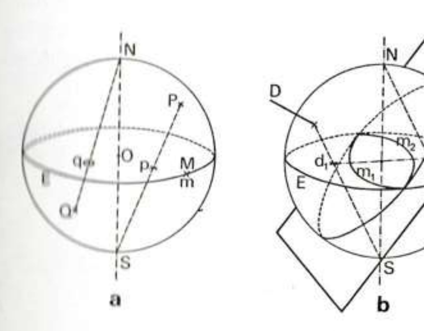


Fig. 2. 13. — *Projection stéréographique.*
a) Les triangles SOp et SPN sont semblables : $\frac{Sp}{2R} = \frac{R}{SP}$. La projection stéréographique est une inversion de puissance $2R^2$:

$$\overline{Sp} \cdot \overline{SP} = 2R^2;$$

b) La droite D est représentée par les projections d_1 et d_2 de ses intersections avec la sphère. Le plan M est représenté par les deux arcs de cercles m_1 et m_2.

Les projections des points de l'hémisphère *nord* et de l'équateur sont marquées d'une *croix* (×), celles des points de l'hémisphère *sud* d'un point *encerclé* (⊙). Une droite est représentée par la projection de ses intersections avec la sphère; un plan passant par le centre se projette suivant deux arcs de cercle symétriques par rapport à sa trace sur le plan équatorial (fig. 2. 13*b*).

Dans un stéréogramme traduisant les propriétés de symétrie ponctuelle, l'axe nord-sud est en général porté par l'axe de symétrie d'ordre le plus élevé et le centre de la sphère est situé au centre de symétrie éventuel; les constructions sont en pointillé, seules les projections sont en trait plein.

2. 3. 1. 3. — Relations d'équivalence. — Commençons par des relations mettant en jeu un seul élément de symétrie inverse.

a) *Un axe inverse d'ordre n impair est équivalent à un axe direct d'ordre n et à un centre de symétrie.*

En effet la répétition des n opérations de symétrie inverse

$$(\bar{A}_n)^n = (A_n \cdot C) \cdot (A_n \cdot C) \cdots (A_n \cdot C) = (A_n)^n \cdot C^n$$
$$(\bar{A}_n)^n = C^n \quad \text{car} \quad (A_n)^n = I \quad \text{(opération identité)}$$

est une opération de symétrie du cristal qui se réduit si n est impair ($n = 2p + 1$) à une inversion car :

$$C^n = C^{2p} \cdot C = C \qquad (C^{2p} = I).$$

La relation $(\bar{A}_{2p+1})^{2p+1} = C$ établit la présence d'un centre de symétrie. D'autre part le produit :

$$\bar{A}_n \cdot C = A_n \cdot C^2 = A_n$$

est identique à un axe direct. Ainsi, un axe inverse d'ordre impair est équivalent à l'association axe direct-centre de symétrie :

$$\bar{A}_{2p+1} \equiv A_{2p+1}C.$$

Le stéréogramme 2. 14 *a* illustre cette propriété dans le cas $n = 3$.

Remarque. — Dans la notation $A_{2p+1}C$, les deux éléments sont indépendants, contrairement à la notation de définition $\bar{A}_n = A_n \cdot C$ où le point indique la succession des deux opérations.

b) *Un axe inverse d'ordre n pair implique un axe direct d'ordre n/2 colinéaire.*

En effet : $$(\bar{A}_n)^2 = (A_n \cdot C) \cdot (A_n \cdot C) = (A_n)^2.$$

Si $n = 2p$, $(A_n)^2$ correspond à la rotation d'angle

$$2 \cdot \frac{2\pi}{2p} = \frac{2\pi}{p} \quad \Rightarrow \quad (\bar{A}_{2p})^2 = A_p.$$

Le cas $n = 4$ est représenté sur la figure 2. 14 *b*.

c) *Si de plus p = n/2 est impair, il existe un miroir perpendiculaire à l'axe.* Comme p est impair $C^p = C$ et l'opération :

$$(\bar{A}_{2p})^p = (A_{2p})^p \cdot C^p = A_2 \cdot C = \bar{A}_2$$

est identique à un miroir perpendiculaire M.

La propriété précédente (*b*) est toujours vraie si bien que :

$$\bar{A}_{2p} \equiv \frac{A_p}{M} \qquad \text{si } p \text{ est impair.}$$

La barre de fraction indique que le miroir est perpendiculaire à l'axe. Cette propriété est illustrée dans le cas $n = 6$ sur le stéréogramme 2. 14 *c*.

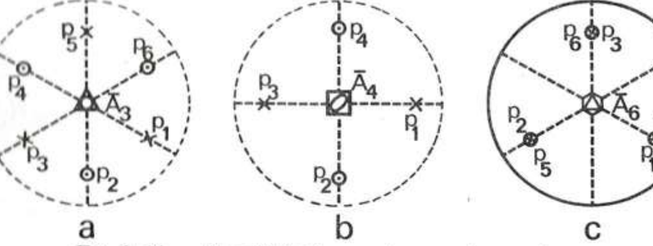


Fig. 2. 14. — *Propriétés des axes inverses de rotation.*

La suite p_2, p_3... des transformés du point de départ p_1 montre les résultats :
a) Un axe d'ordre 3 inverse est équivalent à un axe ternaire direct et à un centre de symétrie.
b) Un axe inverse d'ordre 4 contient un axe binaire direct.
c) Un axe inverse d'ordre 6 équivaut à un axe ternaire direct et à un miroir perpendiculaire.

Sur les figures, les axes de symétrie sont repérés par des symboles :
— axes directs d'ordre 2(⬭), 3(△), 4(□), 6(⬡);
— ceux des axes inverses $\bar{1}$(○), $\bar{3}$(▲), $\bar{4}$(⊠), $\bar{6}$(⊖) tiennent compte des résultats précédents. En ajoutant l'axe binaire inverse qui se représente comme le miroir perpendiculaire équivalent, ces symboles sont ceux des éléments de symétrie des cristaux (cf. paragr. 2. 3. 2. 1).

La présence simultanée de plusieurs éléments de symétrie entraîne en général l'existence d'autres éléments. Nous donnons quelques exemples parmi les plus fréquents.

d) *Un axe direct d'ordre n pair et un centre de symétrie impliquent l'existence d'un miroir perpendiculaire à l'axe.*

Cette propriété qui résulte immédiatement de l'opération :

$$(A_{2p})^p \cdot C = A_2 \cdot C = \bar{A}_2 \equiv M$$

s'écrit brièvement :

$$A_{2p}C \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{2p}}{M}C.$$

e) *Un axe direct d'ordre n et un axe binaire perpendiculaire impliquent n axes binaires perpendiculaires faisant entre eux un angle égal à π/n.*

Soient p_2 et p_3 les transformés du point de départ p_1, respectivement dans la rotation autour de l'axe binaire A_2 et dans la rotation d'angle $2\pi/n$ (fig. 2. 15 *a*). p_3 se déduit de p_2 par rotation autour de l'axe binaire

A_2 formant un angle égal à π/n avec A_2. En appliquant de nouveau la rotation A_n, il vient ainsi n axes binaires.

Si l'ordre de l'axe A_n est *impair* ($n = 2p + 1$), deux axes binaires successifs se correspondent dans la rotation $(A_n)^p$ d'angle $p\,\dfrac{2\pi}{n} = \pi - \dfrac{\pi}{n}$. Tous ces axes *équivalents* sont désignés par la même lettre A'_2 :

$$A_{2p+1}A'_2 \quad \Rightarrow \quad A_{2p+1}(2p+1)A'_2.$$

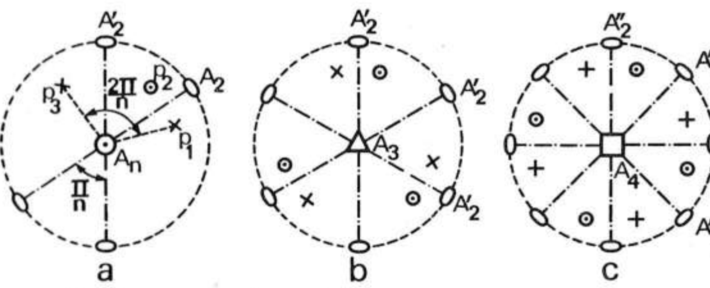


FIG. 2. 15. — *Association d'un axe binaire et d'un axe direct d'ordre n.*
a) Cette association implique n axes binaires.
b) Si n est impair, tous les axes binaires sont équivalents.
c) Si n est pair, les axes ne sont équivalents que de deux en deux.

Si, par contre, n est *pair* ($n = 2p$), l'angle $\pi - \dfrac{2\pi}{n} = (p-1)\,\dfrac{2\pi}{n}$ est un multiple de $2\pi/n$ de sorte que les axes binaires ne sont équivalents que de *deux en deux*. Ils se rassemblent en deux groupes de p éléments chacun :

$$A_{2p}\,A_2 \quad \Rightarrow \quad A_{2p}\;pA'_2\;pA''_2.$$

Les figures 2. 15 *b* et *c* mettent en évidence cette distinction dans les cas $n = 3$ et $n = 4$.

f) *Un axe direct d'ordre n et un miroir passant par l'axe impliquent n miroirs faisant entre eux un angle égal à* π/n.

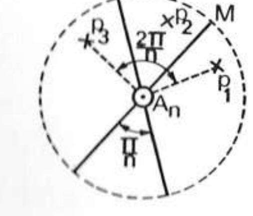


FIG. 2. 16. — *Un axe d'ordre n direct et un miroir passant par l'axe impliquent n miroirs.*

La démonstration est analogue à celle de la propriété précédente (se rapporter cette fois à la figure 2. 16). De la même manière si n est impair, tous les miroirs sont équivalents :

$$A_{2p+1}M' \quad \Rightarrow \quad A_{2p+1}(2p+1)M'.$$

Lorsque n est pair, les miroirs sont de deux types M' et M'' :

$$A_{2p}\,M' \quad \Rightarrow \quad A_{2p}\;pM'\;pM''.$$

g) *Un axe inverse d'ordre n impair et un axe binaire entraînent n axes binaires équivalents et n miroirs perpendiculaires à ceux-ci.*

Il résulte des propriétés *a*, *e* et *d*

$$\bar{A}_{2p+1}A_2 \equiv A_{2p+1}C\,A'_2 \quad \Rightarrow \quad A_{2p+1}\,\frac{(2p+1)A'_2}{(2p+1)M'}\,C.$$

2. 3. 2. — *Symétrie ponctuelle des réseaux*

En raison de la périodicité du réseau, seuls quelques angles de rotation sont permis. Cette sélection des valeurs de l'ordre des axes de rotation permet de déterminer rapidement les classes de symétrie des réseaux.

2. 3. 2. 1. — Éléments de symétrie des réseaux. — La périodicité du réseau implique certaines propriétés de symétrie :

a) *Toute droite parallèle à un axe de symétrie d'ordre n du réseau menée par un nœud est un axe de symétrie de même ordre.*

En effet, par rotation d'angle $2\pi/n$ autour de l'axe de symétrie A_n le nœud P vient sur le nœud N (fig. 2. 17 *a*). L'axe A'_n qui se déduit de A_n par la translation $\overrightarrow{NP}$ est aussi homologue de A_n dans la rotation d'angle $2\pi/n$ autour du nœud P. Il passe donc un axe de rotation d'ordre n par un nœud quelconque P. Cette propriété est vraie aussi pour les axes inverses (fig. 2. 17 *b*). En particulier, tout plan parallèle à un plan de symétrie du réseau mené par un nœud est un miroir.

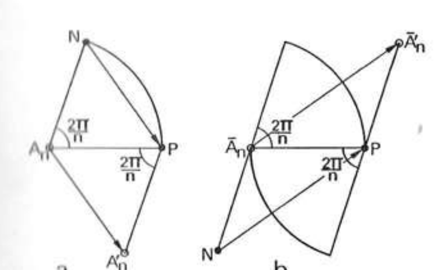


FIG. 2. 17. — *Toute droite parallèle à un axe d'ordre n direct* (a) *ou inverse* (b) *menée par un nœud est un axe de symétrie.*

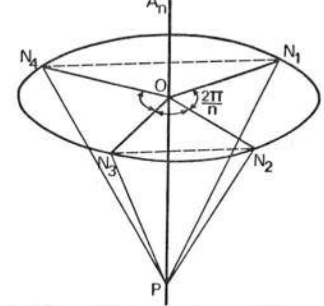


FIG. 2. 18. — *Tout axe de symétrie passant par un nœud est une rangée du réseau.*

b) *Tout axe de symétrie passant par un nœud* (P) *est une rangée du réseau.* Si N_2, N_3,..., N_n sont les nœuds homologues du nœud N_1 dans la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de A_n (fig. 2. 18), le vecteur du réseau :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PN_i}$$

ou

$$\vec{R} = n\,\overrightarrow{PO} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{ON_i}$$

est parallèle à l'axe A_n car $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{ON_i} = \vec{0}$. Celui-ci est donc une rangée du réseau.

c) Tout nœud du réseau est un centre de symétrie.

d) La présence d'un axe de symétrie d'ordre n supérieur à 2 implique celle de n axes binaires perpendiculaires.

Soit OP_1 une distance élémentaire du réseau (fig. 2. 19), la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de l'axe A_n passant par le nœud O amène le nœud P_1 en P_2. Par symétrie autour de O, P_1 vient en P_3 et P_2 en P_4. Les nœuds P_1, P_2 et P_4, P_3 se correspondent dans la rotation de π autour de la rangée OC parallèle à P_2P_1. A et B étant les nœuds de l'axe voisins de O, la maille élémentaire définie par les nœuds O, B, P_3, P_4 se déduit de la maille construite avec les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ par rotation d'ordre 2 autour de OC, cette direction est donc un axe binaire pour le réseau.

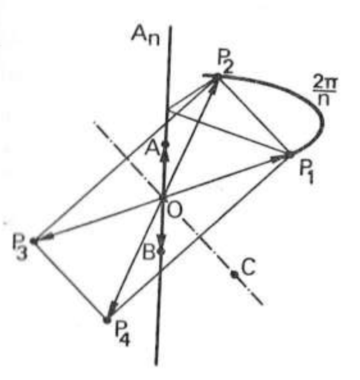


FIG. 2. 19. — *Un axe de symétrie d'ordre n > 2 implique n axes binaires perpendiculaires.*

e) Un réseau ne peut posséder que des axes directs et inverses d'ordre 1, 2, 3, 4 et 6.

Considérons de nouveau la figure 2. 18 en supposant maintenant que le nœud de départ N_1 est le plus proche de l'axe afin que la longueur $a = N_2N_3$ constitue la période de la rangée N_2N_3. Comme $\overrightarrow{N_1N_4}$ et $\overrightarrow{N_2N_3}$ sont parallèles, N_1N_4 est un multiple de la période N_2N_3 dans cette direction :

$$\overrightarrow{N_1N_4} = p\,\overrightarrow{N_2N_3} \qquad p \text{ entier relatif.}$$

Cette relation s'écrit aussi :

$$\overrightarrow{N_1N_2} + \overrightarrow{N_2N_3} + \overrightarrow{N_3N_4} = p\,\overrightarrow{N_2N_3}$$

ou en multipliant scalairement par $\overrightarrow{N_2N_3}$:

$$a^2\left(2\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right) = pa^2$$

car

$$(\overrightarrow{N_2N_3}, \overrightarrow{N_1N_2}) = (\overrightarrow{N_3N_4}, \overrightarrow{N_2N_3}) = \frac{2\pi}{n}.$$

Les valeurs permises pour n satisfont à l'équation :

$$2\cos\frac{2\pi}{n} + 1 = p \qquad p \text{ entier relatif.}$$

Un cosinus étant compris entre -1 et $+1$, l'entier relatif p ne peut prendre que les cinq valeurs : $-1, 0, 1, 2, 3$ auxquelles correspondent les ordres :

$$n = 2, 3, 4, 6, 1.$$

La démonstration s'applique aussi aux axes inverses car chaque nœud étant un centre de symétrie, la distribution régulière des nœuds N_1, N_2,..., N_n sur un cercle se retrouve dans le cas d'un axe inverse.

2. 3. 2. 2. — Les 7 systèmes cristallins. — Il est maintenant possible de dénombrer les classes de symétrie ponctuelle compatibles avec la périodicité des réseaux.

La classe la plus simple ne comprend qu'un centre de symétrie C.

Avec un axe d'ordre 2, la présence du centre C implique un miroir M perpendiculaire, d'où la symétrie :

$$\frac{A_2}{M}\,C.$$

S'il y a plus d'un axe binaire, il y en a trois à angle droit A_2, A'_2, A''_2 et le centre de symétrie impose trois miroirs M, M', M'' perpendiculaires à ces axes :

$$\frac{A_2}{M}\,\frac{A'_2}{M'}\,\frac{A''_2}{M''}\,C.$$

Un réseau possédant un axe A_3 contient nécessairement trois axes A'_2 et trois miroirs M' à cause du centre de symétrie

$$A_3\,\frac{3A'_2}{3M'}\,C.$$

Si le réseau possède un axe A_4, les axes binaires ne sont équivalents que deux à deux :

$$\frac{A_4}{M}\,\frac{2A'_2}{2M'}\,\frac{2A''_2}{2M''}\,C.$$

Avec un axe A_6, les axes binaires sont groupés trois par trois

$$\frac{A_6}{M}\,\frac{3A'_2}{3M'}\,\frac{3A''_2}{3M''}\,C.$$

Les six classes énumérées ci-dessus sont les seules classes de symétrie des réseaux possédant au plus un axe d'ordre supérieur à 2. Il est possible de montrer que la seule classe de symétrie des réseaux contenant plus d'un axe d'ordre supérieur à 2 correspond à la symétrie complète du cube (fig. 2. 20) :

— quatre axes A_3 dirigés suivant les diagonales du cube;
— trois axes A_4 perpendiculaires aux faces;
— six axes A'_2 joignant les milieux des arêtes opposées;
— un centre de symétrie qui implique des miroirs perpendiculaires aux axes A_4 et A'_2, d'où la symétrie :

$$\frac{3A_4}{3M}\,4A_3\,\frac{6A'_2}{6M'}\,C.$$

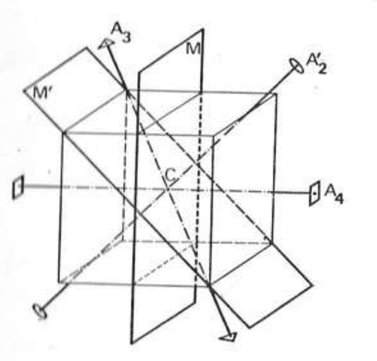


FIG. 2. 20. — *Les éléments de symétrie du cube :*

$$\frac{3A_4}{3M}\,4A_3\,\frac{6A'_2}{6M'}\,C.$$

En rangeant les cristaux d'après la symétrie ponctuelle du réseau, on définit *sept systèmes cristallins* de la manière suivante : *les réseaux de tous les cristaux appartenant à un même système cristallin ont la même symétrie ponctuelle*, celle d'une des sept classes précédentes. Un système cristallin est aussi caractérisé par la forme géométrique de la maille qui engendre tous les réseaux de même symétrie. Ces formes vont du parallélépipède le plus général (système triclinique) au cube (système cubique) en passant par le prisme droit à base quelconque (système monoclinique), le parallélépipède rectangle (système orthorhombique), le rhomboèdre ayant pour faces six losanges identiques (système trigonal), le prisme droit à base carrée (système tétragonal) et le prisme droit à base losange d'angle $\gamma = 120°$ (système hexagonal). Le tableau de la figure 2. 21 rassemble les données relatives aux sept systèmes cristallins : symétrie ponctuelle des réseaux, forme de la maille, angles α, β, γ entre les arêtes de la maille, longueurs *a*, *b*, *c* de ces arêtes.

SYSTEME	SYMETRIE	MAILLE	ANGLES	ARETES
TRICLINIQUE	C		$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$	$a \neq b \neq c$
MONOCLINIQUE	$\frac{A_2}{M}C$		$\alpha = \gamma = 90°$ $\beta > 90°$	$a \neq b \neq c$
ORTHORHOMBIQUE	$\frac{A_2}{M}\frac{A'_2}{M'}\frac{A''_2}{M''}C$		$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	$a \neq b \neq c$
TRIGONAL (RHOMBOEDRIQUE)	$A_3\frac{3A'_2}{3M'}C$		$\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$	$a = b = c$
TETRAGONAL (QUADRATIQUE)	$\frac{A_4}{M}\frac{2A'_2}{2M'}\frac{2A''_2}{2M''}C$		$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	$a = b \neq c$
HEXAGONAL	$\frac{A_6}{M}\frac{3A'_2}{3M'}\frac{3A''_2}{3M''}C$		$\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 120°$	$a = b \neq c$
CUBIQUE	$\frac{3A_4}{3M}4A_3\frac{6A'_2}{6M'}C$		$\alpha = \beta = \gamma = 90°$	$a = b = c$

FIG. 2. 21. — *Les sept systèmes cristallins.*

2. 3. 2. 3. — Les 14 réseaux de Bravais. — Il existe en général plusieurs réseaux de même symétrie ponctuelle, si bien que des cristaux d'un même système peuvent avoir des réseaux différents. En plus des sept réseaux, dits *primitifs* (P), ayant pour maille simple l'un des sept parallélépipèdes de la

figure 2. 21, il existe d'autres réseaux obtenus en ajoutant des nœuds dans la maille. L'environnement de chaque nœud d'un réseau devant être le même, les seuls emplacements possibles sont le centre de la maille ou des faces. En effet, pour constituer un réseau, la distribution des points aux sommets (A) et à l'intérieur (B) de la maille doit être invariante dans une translation joignant deux nœuds quelconques. C'est le cas pour les translations de type AA et BB quelle que soit la position des nœuds B dans la maille. Le point B_1, transformé de B_0 dans la translation $\overrightarrow{A_0B_0}$ joignant le sommet A_0 au nœud intérieur B_0, doit se superposer à un des sommets de la maille (fig. 2. 22).

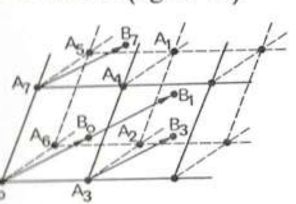


FIG. 2. 22. — *Construction d'un nouveau réseau à partir d'un réseau primitif.*
Le nœud supplémentaire B_0 doit être disposé au centre de la maille ou d'une face afin que l'édifice soit invariant dans la translation A_0B_0.

Si B_1 se confond avec A_1, le nœud B_0 est au centre de la maille, ce qui engendre un réseau *centré* (I). Pour que B_1 vienne sur l'un des sommets A_2, A_4, A_5, il faut que B_0 soit au centre d'une des faces de la maille, ce qui conduit à un réseau de *type* C où deux faces opposées de la maille primitive sont centrées. La dernière disposition : B_0 au milieu d'une arête (B_1 en A_3, A_6 ou A_7) n'est pas intéressante car elle correspond à un réseau primitif d'arête moitié.

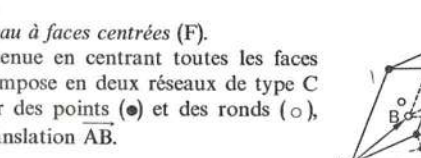


FIG. 2. 23. — *Réseau à faces centrées* (F).
La distribution de points obtenue en centrant toutes les faces d'un réseau primitif se décompose en deux réseaux de type C dont les nœuds, repérés par des points (●) et des ronds (○), se correspondent dans la translation $\overrightarrow{AB}$.

La distribution de points obtenue en centrant toutes les faces du réseau primitif se décompose en deux réseaux de type C dont les nœuds sont différenciés sur la figure 2. 23 (points ● et ronds ○). Comme ces deux réseaux se superposent dans la translation $\overrightarrow{AB}$ d'une demi-diagonale d'une face, leur réunion forme le réseau à *faces centrées* (F) déduit du réseau primitif.

La figure 2. 24 représente les quatorze réseaux de Bravais, les trois réseaux I, C, F issus du réseau primitif n'existent pas dans chaque système cristallin car certaines formes sont redondantes. Ainsi les réseaux I, C, F du système triclinique ne sont que des réseaux primitifs de maille triclinique plus petite.

Seuls les réseaux monocliniques primitifs (P) et à deux faces rectangulaires centrées (C) sont à distinguer car l'arrangement à faces obliques centrées est un réseau monoclinique P d'angle β plus petit (fig. 2. 25 *a*) et les réseaux I et F sont en fait des réseaux de type C (fig. 2. 25 *b* et *c*).

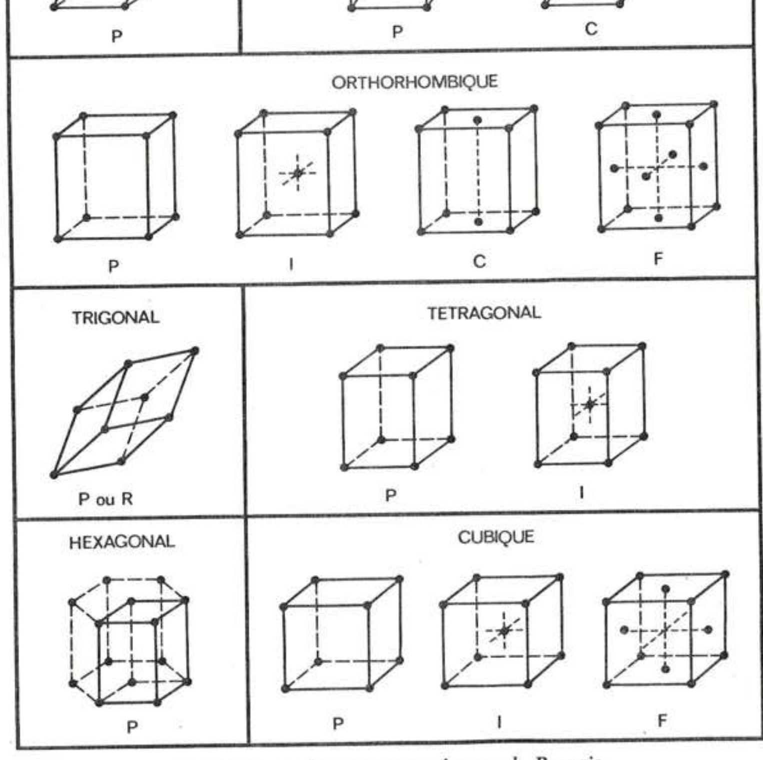


FIG. 2. 24. — *Les quatorze réseaux de Bravais.*

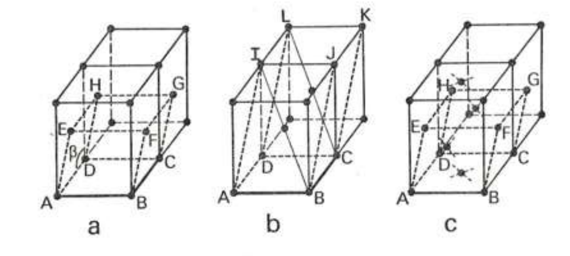


FIG. 2. 25. — *Système monoclinique.*
a, Le réseau à faces obliques centrées est un réseau monoclinique P de maille ABCDEFGH;
b) le réseau I est un réseau monoclinique C de maille ABCDIJKL;
c) le réseau F est un réseau monoclinique C de maille ABCDEFGH.

Par contre tous les réseaux orthorhombiques P, I, C, F sont distincts. Le seul réseau de Bravais du système trigonal est primitif, il est souvent noté R (rhomboédrique). En effet, d'une part le réseau I est un réseau R de maille plus petite (fig. 2. 26 *a*), d'autre part il n'existe pas de réseau C car les six faces d'un rhomboèdre étant équivalentes, il faut toutes les centrer ce qui engendre de nouveau un réseau R de maille plus petite (fig. 2. 26 *b*).

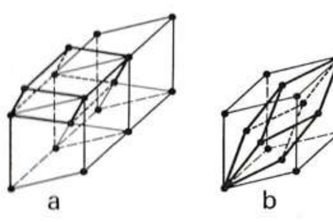


FIG. 2. 26. — *Système trigonal.* Il n'existe qu'un seul réseau.

Les cristaux du système tétragonal n'ont que deux possibilités de réseaux P et I. En effet, les quatre faces rectangles étant équivalentes, le seul réseau C possible est obtenu en centrant les deux bases carrées; la figure 2. 27 *a* montre qu'il s'agit en fait d'un réseau tétragonal P de maille plus petite. De même le réseau F est un réseau quadratique I de maille plus petite (fig. 2. 27 *b*).

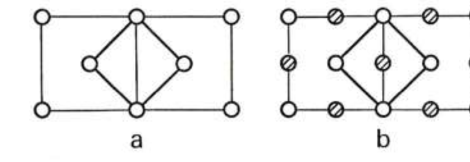


FIG. 2. 27. — *Système tétragonal.*
a) Le réseau C est un réseau P de maille plus petite;
b) le réseau F est un réseau I.

Le seul réseau hexagonal est du type P car les réseaux I, C, F ne possèdent plus d'axe de rotation d'ordre 6.

Le système cubique ne comprend que les trois réseaux P, I, F, le réseau C n'existe pas car il faut centrer les six faces du cube pour conserver la symétrie du système.

Ces quatorze réseaux de Bravais représentent toutes les manières de distribuer dans l'espace une infinité de points ayant tous le même environnement.

2. 3. 3. — *Dénombrement des classes de symétrie ponctuelle des cristaux*

L'adjonction du motif autour de chaque nœud du réseau ne peut que diminuer la symétrie de l'édifice cristallin, si bien que la symétrie d'un cristal est au plus égale à celle de son réseau. Ainsi, à la différence des réseaux, *un cristal ne possède pas nécessairement un centre de symétrie ni les n axes binaires* imposés par la présence d'un axe de rotation d'ordre *n* supérieur à 2. Les classes de symétrie d'orientation des cristaux d'un système se déduisent donc de la classe de réseau correspondante en supprimant successivement ces éléments facultatifs. Ces classes sont rangées, par système cristallin, dans le tableau de la figure 2. 28 où sont indiquées la liste des éléments de symétrie (en haut), leur projection stéréographique et la notation de Hermann-Mauguin (en bas). La première colonne regroupe les sept classes de réseaux déterminées au paragraphe 2. 3. 2. 2. Les cristaux de même symétrie ponctuelle que leur réseau sont dits holoédriques, les autres sont mériédriques.

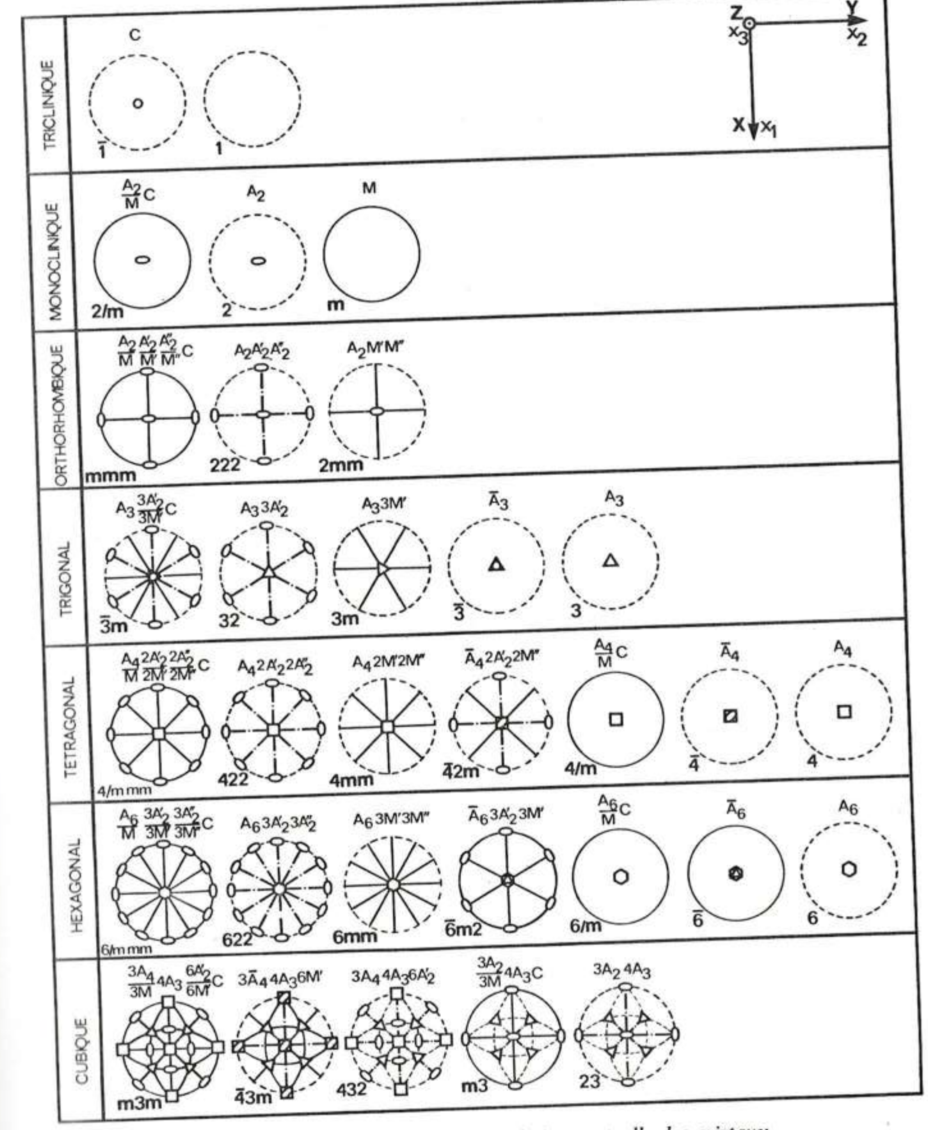


FIG. 2. 28. — *Les 32 classes de symétrie ponctuelle des cristaux.*

La classe sans élément de symétrie, obtenue en retirant le centre de symétrie de l'holoédrie *triclinique* ($\bar{1}$), est notée 1.

La suppression du centre de symétrie de la classe des réseaux *monocliniques* $\frac{A_2}{M}$ C, notée $2/m$, ne permet de garder que l'axe binaire : classe 2, ou le miroir : classe m.

De la même manière, à partir de l'holoédrie *orthorhombique* $\frac{A_2}{M}\frac{A'_2}{M'}\frac{A''_2}{M''}$ C notée mmm, il vient la classe 222 en conservant les trois axes binaires $A_2A'_2A''_2$ ou la classe $2mm$ en gardant l'axe A_2 et les deux miroirs M′ et M″ passant par cet axe.

La symétrie du réseau *trigonal* $A_3 \frac{3A'_2}{3M'}$ C conduit, d'une part aux classes $A_33A'_2$, notée 32 et A_33M', notée $3m$, en retirant le centre, d'autre part à $A_3C = \bar{A}_3$, notée $\bar{3}$, en enlevant les trois axes binaires A'_2 et par conséquent les trois miroirs M′, puis à la classe A_3, notée 3, en supprimant C.

La suppression du centre de symétrie de la classe des réseaux *tétragonaux*

$\frac{A_4}{M}\frac{2A'_2}{2M'}\frac{2A''_2}{2M''}$ C ou $\frac{\bar{A}_4}{M}\frac{2A'_2}{2M'}\frac{2A''_2}{2M''}$ C fournit :

— trois nouvelles classes en conservant :
  — tous les axes binaires : $A_42A'_22A''_2$ (classe 422),
  — tous les miroirs : $A_42M'2M''$ (classe $4mm$),
  — alternativement un axe binaire et un miroir : $\bar{A}_42A'_22M''$ ($\bar{4}2m$);

— les deux classes $A_4(4)$ et $\bar{A}_4(\bar{4})$ en enlevant tous ces éléments. Seule la classe $\frac{A_4}{M}$ C notée $4/m$ possède un centre de symétrie.

Les sept classes du système *hexagonal* sont obtenues de la même manière.

La symétrie du cube $\frac{3A_4}{3M} 4A_3 \frac{6A'_2}{6M'}$ C ou $\frac{3\bar{A}_4}{3M} 4A_3 \frac{6A'_2}{6M'}$ C conduit, en supprimant le centre, aux deux classes $3A_44A_36A'_2$, notée 432 et $3\bar{A}_44A_36M'$, notée $\bar{4}3m$. La symétrie minimum compatible avec les quatre axes ternaires caractéristiques du système *cubique* est $3A_24A_3$ (classe 23). L'adjonction du centre C fait apparaître les miroirs M perpendiculaires aux axes binaires, cette classe de symétrie $\frac{3A_2}{3M} 4A_3C$ est notée $m3$.

Chaque système cristallin est caractérisé par la présence de certains éléments de symétrie :

triclinique	un axe d'ordre 1
monoclinique	un axe binaire
orthorhombique	trois axes binaires
trigonal	un axe ternaire
tétragonal	un axe d'ordre 4
hexagonal	un axe d'ordre 6
cubique	trois axes binaires directs et quatre axes ternaires directs.

Lorsque la nature de l'axe n'est pas précisée, celui-ci peut être direct ou inverse.

Toutes les variétés cristallines se rangent dans l'une des 32 classes du tableau de la figure 2. 28 et il existe parmi les cristaux naturels ou artificiels des spécimens de chaque classe.

Les cristaux étant anisotropes vis-à-vis de la plupart des propriétés physiques, la donnée de constantes n'a de sens que si la position des axes de référence est précisée par rapport aux éléments de symétrie. Nous nous rapportons, pour chaque classe, au trièdre orthonormé dessiné en haut et à droite du tableau 2. 28, en remplaçant la notation X, Y, Z des cristallographes par la notation x_1, x_2, x_3, plus commode pour le calcul tensoriel.

2. 4. — SYMÉTRIE DE RECOUVREMENT

Les considérations précédentes, qui ont abouti aux 32 classes de symétrie ponctuelle, portent uniquement sur la symétrie des propriétés macroscopiques des cristaux. La description complète de la symétrie du milieu cristallin nécessite l'introduction d'opérations de symétrie *non ponctuelles* amenant l'édifice cristallin en coïncidence avec lui-même. Les éléments de cette symétrie de recouvrement de l'édifice cristallin en tant que figure géométrique sont :

— les axes hélicoïdaux $A_{n,\vec{t}}$: rotation de $2\pi/n$ suivie d'une translation $\vec{t}$ le long de l'axe,

— les plans de symétrie avec glissement $M_{\vec{t}}$: symétrie par rapport au plan M suivie d'une translation $\vec{t}$ dans le plan.

Les axes inverses d'ordre 1, 3, 4, 6 qui conservent un point fixe, ne peuvent pas être associés à une translation.

2. 4. 1. — *Axes hélicoïdaux*

Un axe hélicoïdal ne se distinguant pas d'un axe de rotation simple en symétrie ponctuelle, les seules valeurs de n sont : 2, 3, 4 et 6. Le résultat de n opérations $A_{n,\vec{t}}$ est une translation $n\vec{t}$ parallèle à l'axe. Pour qu'il y ait coïncidence de l'édifice cristallin avec lui-même, il faut que $n\vec{t}$ soit un multiple du vecteur élémentaire $\vec{R}_{uvw}$ le long de la rangée $[u, v, w]$ parallèle à l'axe :

$$\vec{t} = \frac{m}{n}\vec{R}_{uvw} \qquad m \text{ entier.}$$

Il est possible de choisir $t < R_{uvw}$, *i. e.* $m < n$, de sorte que les valeurs de la translation sont :

$$\vec{t} = \vec{0}, \quad \vec{t}_1 = \frac{1}{n}\vec{R}_{uvw}, \quad \vec{t}_2 = \frac{2}{n}\vec{R}_{uvw}, \quad ..., \quad \vec{t}_{n-1} = \frac{n-1}{n}\vec{R}_{uvw}.$$

Le symbole des axes hélicoïdaux de la symétrie de recouvrement des cristaux est donné ci-dessous à la suite de la notation abrégée n_m :

2 0 · 2_1

3 △ · 3_1 △ · 3_2 △

4 □ · 4_1 □ · 4_2 □ · 4_3 □

6 ⬡ · 6_1 ⬡ · 6_2 ⬡ · 6_3 ⬡ · 6_4 ⬡ · 6_5 ⬡

Ainsi, 4_1 indique une rotation de $2\pi/4$ suivie d'une translation de $\vec{R}/4$ le long de l'axe (fig. 2. 29). Un exemple d'axes hélicoïdaux d'ordre 4 est fourni par la structure de type diamant (germanium, silicium) illustrée sur la figure 2. 30.

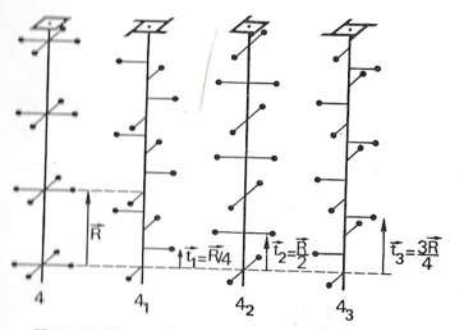
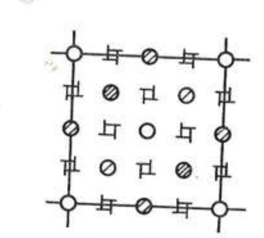


FIG. 2. 29. — *Les quatre axes hélicoïdaux d'ordre 4.*


FIG. 2. 30. — *Axes hélicoïdaux de la structure diamant.*

2. 4. 2. — *Plan de symétrie avec glissement*

La translation $2\vec{t}$, résultat de deux opérations $M_{\vec{t}}$, doit être une translation du plan réticulaire parallèle à M :

$$2\vec{t} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$$

où $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont les deux vecteurs de base dans ce plan réticulaire et m_1, m_2 deux entiers. Comme on ne change rien en retranchant une translation élémentaire $\vec{a}_1$ ou $\vec{a}_2$, m_1 et m_2 ne prennent que les valeurs 0 et 1 si bien que les translations possibles sont :

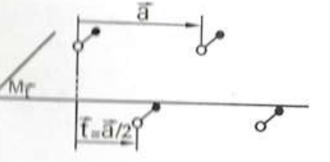


FIG. 2. 31. — *Plan de symétrie avec glissement.* La translation $\vec{t}$ est égale à la moitié de la période $\vec{a}$.

$$\vec{t} = 0, \quad \vec{t} = \frac{1}{2}\vec{a}_1, \quad \vec{t} = \frac{1}{2}\vec{a}_2, \quad \vec{t} = \frac{1}{2}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2).$$

La figure 2. 31 donne un exemple de plan de symétrie avec glissement.

2. 4. 3. — *Groupes de recouvrement*

Compte tenu des différents réseaux pour une classe donnée, des axes hélicoïdaux et des miroirs avec glissements possibles, Schönflies et Fédorov ont montré que les édifices cristallins peuvent être répartis en 230 groupes distincts appelés groupes de recouvrement.

2. 5. — EXEMPLES DE STRUCTURE

La notion d'assemblage compact intervenant souvent dans la structure des matériaux utilisés dans les applications, il nous paraît utile de décrire les deux manières de superposer des couches denses de sphères identiques.

2. 5. 1. — *Assemblages compacts*

Une première couche de sphères jointives de centres A étant constituée comme l'indique la figure 2. 32, les sphères de la deuxième couche sont disposées de telle sorte que leurs centres se projettent sur les interstices B de la première couche. Pour la troisième couche il y a deux possibilités

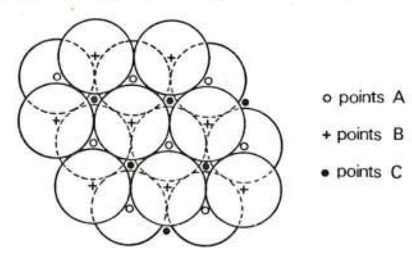


FIG. 2. 32. — *Assemblage compact de sphères identiques.*

suivant que les interstices situés au-dessus des points C ou des points A sont utilisés. Dans le premier cas les couches se succèdent avec la période ABC; cette structure, appelée cubique compacte, est engendrée par une maille cubique à faces centrées (fig. 2. 33*b*) dont l'axe ternaire est perpendiculaire au plan de la figure 2. 33*a*. Le deuxième cas, arrangement ordonné ABAB..., conduit à la structure hexagonale compacte de maille hexagonale double (fig. 2. 34). Le rapport des longueurs des arêtes est $c/a = 2\sqrt{2/3} \simeq 1{,}633$ (exercice 2. 11).

Nous recommandons au lecteur qui ne l'aurait pas encore fait de jouer au moins une fois à empiler des billes (ou des balles de tennis) de ces deux façons. Le plus difficile est d'empêcher les billes de rouler.

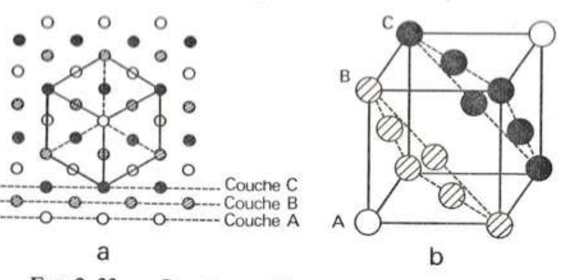


FIG. 2. 33. — *Structure cubique compacte.*

a) Empilement A, B, C de sphères et maille cubique vue suivant une diagonale;
b) maille du réseau c. f. c. constitué par cet empilement. Il existe des cavités octaédriques au centre du cube et au milieu de chaque arête, et des cavités tétraédriques au quart de chaque diagonale en partant des sommets.

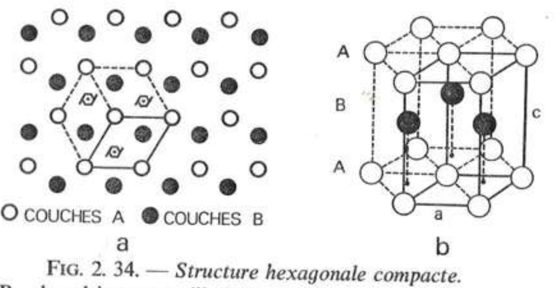


FIG. 2. 34. — *Structure hexagonale compacte.*

a) Empilement ABAB... de sphères et maille hexagonale;
b) maille hexagonale double. Le rapport c/a vaut $2\sqrt{2/3} = 1{,}633$.

Les empilements compacts laissent entre les couches deux genres de cavités. Les cavités tétraédriques formées par une sphère posée sur trois sphères jointives, des cavités octaédriques situées au centre de l'octaèdre constitué de trois sphères contiguës d'une couche et des trois sphères les plus proches de la couche suivante. Dans certains cristaux, les atomes d'une espèce sont empilés de manière compacte, les atomes de l'autre espèce remplissant les cavités.

2. 5. 2. — *Structure de quelques matériaux utiles*

Avant de donner des détails propres à des matériaux utilisés dans le domaine des ondes élastiques, précisons qu'en général la structure cristalline d'un solide n'est pas unique. Elle dépend de la température à laquelle il est (ou a été) porté. On dit qu'il existe plusieurs variétés allotropiques du matériau. Les propriétés physiques d'un même solide peuvent varier considérablement, sa formule chimique restant inchangée. Ainsi, suivant que sa température est inférieure ou supérieure à une valeur critique, tel matériau est ou n'est pas piézoélectrique. Sans attendre le chapitre 6 où est étudiée la *piézoélectricité* (création d'une polarisation par une déformation ou inversement) prévenons que des 32 classes cristallines, seules 20 autorisent la piézoélectricité. Parmi ces 20 classes (qui ont pour point commun de ne pas posséder de centre de symétrie) 10 se prêtent à la *pyroélectricité* (exercice 3. 4) : les cristaux de ces dix classes sont polaires *i. e.* présentent une polarisation électrique naturelle. Cette polarisation électrique permanente, compensée normalement par la répartition des charges libres à l'intérieur ou sur la surface du cristal, s'observe, quand on fait varier la température, par la circulation de charges dans un circuit extérieur car l'amplitude du moment dipolaire dépend de la température. Si le sens de la polarisation est affecté, peut être renversé par exemple, par la présence d'un champ électrique extérieur, le cristal pyroélectrique est *ferroélectrique.* Un cycle d'hystérésis (polarisation en fonction du champ électrique) peut être tracé. Pour une température supérieure à une certaine valeur, appelée température de Curie, la polarisation permanente disparaît. Dans cet état dit paraélectrique, la caractéristique polarisation-champ électrique est linéaire. La permittivité diélectrique, souvent élevée, de ces matériaux est très sensible, surtout au voisinage du point de Curie, à toute action extérieure (thermique, mécanique). La différence de comportement de ces solides s'explique par un changement de structure cristalline au point de Curie. La structure de la phase paraélectrique est plus symétrique que celle de la phase ferroélectrique. Indiquons par exemple que le titanate de baryum ($BaTiO_3$), matériau ferroélectrique parmi les plus étudiés, cristallise avec la structure cubique (*m3m*) pour une température $\theta > 120$ °C. Quand la température diminue, la maille se déforme pour donner lieu successivement à des formes quadratique ($10\ °C < \theta < 120\ °C$), orthorhombique ($-70\ °C < \theta < 10\ °C$) puis rhomboédrique ($\theta < -70\ °C$).

Une répartition des matériaux ferroélectriques en deux groupes peut être établie en se rapportant à leur constitution chimique [1]. Dans le premier groupe, la ferroélectricité est attribuée à la liaison hydrogène (sel de Seignette : tartrate double de sodium et de potassium, phosphates monoalcalins du type PO_4KH_2...). Dans le deuxième groupe, la ferroélectricité provient de la déformation d'une structure à base d'octaèdres d'oxygène. C'est à cette catégorie qu'appartiennent $BaTiO_3$, $LiNbO_3$ (niobate de lithium), $LiTaO_3$ (tantalate de lithium). Avant de décrire la structure du niobate de lithium, employé dans le domaine des ondes élastiques pour ses bonnes qualités piézoélectriques, nous citons : le sulfure de cadmium (CdS) parce qu'il a été utilisé en tant que semiconducteur piézoélectrique pour étudier l'interaction entre électrons et ondes élastiques, l'oxyde de zinc (ZnO) : c'est le constituant des transducteurs à couches minces, le corindon (Al_2O_3) : choisi comme milieu de propagation des ondes élastiques de haute fréquence ($f > 1\,000$ MHz) en raison de son faible coefficient d'atténuation et de son prix peu élevé, le quartz : toujours très utilisé en particulier parce que ses propriétés varient peu en fonction de la température.

a) Sulfure de cadmium (CdS). *Oxyde de zinc* (ZnO). — Le sulfure de cadmium et l'oxyde de zinc cristallisent dans le système hexagonal avec la symétrie *6mm*. Les dimensions de la maille hexagonale sont

— pour le CdS $a = 4{,}13$ Å $c = 6{,}69$ Å $\Rightarrow \dfrac{c}{a} = 1{,}62$,

— pour le ZnO $a = 3{,}24$ Å $c = 5{,}19$ Å $\Rightarrow \dfrac{c}{a} = 1{,}60$.

Dans les deux cas la valeur du rapport c/a est très proche de celle de la structure hexagonale compacte idéale (1,63). Les anions (soufre, oxygène) forment un assemblage compact dont la moitié des cavités tétraédriques est occupée par les cations (cadmium, zinc) de diamètre environ deux fois plus petit. Cette structure du type wurtzite est représentée sur la figure 2. 35. L'axe sénaire hélicoïdal est polaire.

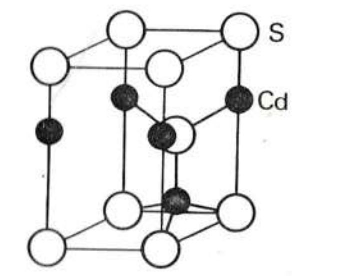


FIG. 2. 35. — *Structure du type wurtzite* (CdS, ZnO).

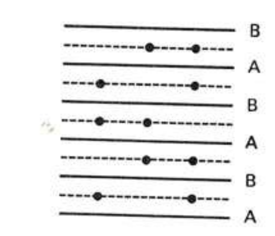


FIG. 2. 36. — *Structure du corindon.* Insertion des atomes d'aluminium (•) entre les couches d'oxygène (ABAB...).

b) Corindon (Al_2O_3). — Le corindon ou alumine (Al_2O_3) cristallise dans le système trigonal avec la symétrie ponctuelle $\overline{3}m$. Les atomes d'oxygène constituent un empilement compact du type ABAB... Les atomes d'aluminium occupent deux sur trois des cavités octaédriques situées entre les couches A et B de façon à respecter la formule Al_2O_3 (fig. 2. 36). La symétrie autour de l'axe perpendiculaire aux plans des ions oxygène n'est plus que ternaire et la maille rhomboédrique a pour paramètres :

$$a = 3{,}51 \text{ Å}, \qquad \alpha = 85^\circ 46'.$$

c) Quartz (SiO_2). — La silice (SiO_2) existe sous de nombreux aspects : cristallisé (quartz, tridymite, cristobalite) ou amorphe (verre de silice), en outre chaque forme cristalline possède deux variétés allotropiques α et β. Le quartz α (trigonal) est stable en dessous de 573 °C, tandis que le quartz β (hexagonal) est stable de 573 °C à 870 °C.

Le quartz α qui nous intéresse ici parce qu'il est piézoélectrique appartient à la classe 32. En raison de l'absence de miroir, il se présente sous deux formes énantiomorphes : l'une dextrogyre (quartz α droit), l'autre lévogyre (quartz α gauche). L'axe ternaire (Z) est appelé axe optique, les trois axes d'ordre 2 (X) perpendiculaires aux arêtes du prisme droit hexagonal, appelés axes électriques, sont orientés. La figure 2. 37, projection des atomes Si et O sur un plan perpendiculaire à l'axe Z hélicoïdal ($\vec{t} = \vec{c}/3$), donne une idée de la structure.

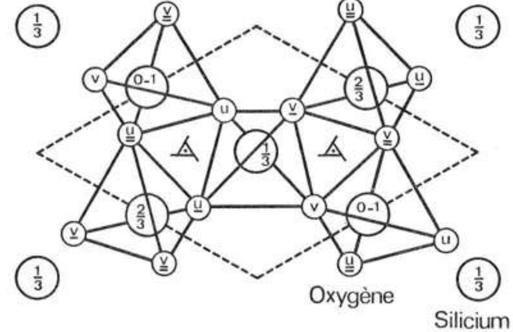


FIG. 2. 37. — *Structure du quartz α.* L'assemblage des tétraèdres SiO_4 reliés par les sommets (formule SiO_2) présente un axe ternaire hélicoïdal (3_1) perpendiculaire au plan de la feuille. Les indications portées dans chaque cercle précisent la position verticale des atomes le long de l'arête c prise comme unité. Les atomes de silicium sont aux cotes 0,1/3, 2/3, ceux d'oxygène aux cotes u, $\underline{u} = u + 1/3$, $\underline{\underline{u}} = u + 2/3$ et v, $\underline{v}$, $\underline{\underline{v}}$. La diffraction des rayons X fournit $u = 0{,}11$ et $v = 0{,}22$ [2].

d) Niobate de lithium ($LiNbO_3$). *Tantalate de lithium* ($LiTaO_3$). *Titanate de baryum* ($BaTiO_3$). — Le niobate de lithium appartient à la classe $3m$. La maille rhomboédrique ($a = 5{,}492$ Å, $\alpha = 55^\circ 53'$) contient deux groupements $LiNbO_3$. Nous avons déjà indiqué qu'il était ferroélectrique et que

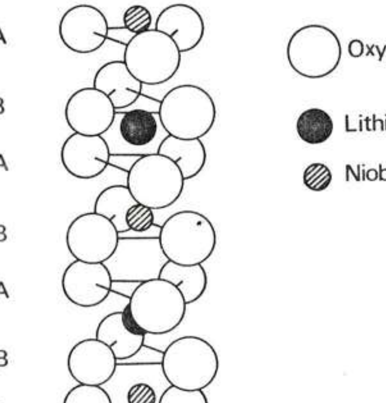


FIG. 2. 38. — *Structure du niobate de lithium.* (Figure 2 de la référence 4).

sa structure comprenait des octaèdres d'oxygène. Elle se décrit à partir d'un empilement hexagonal compact de ces ions [3]. Comme dans le corindon, deux cavités octaédriques sur trois sont occupées par les ions métalliques (Li et Nb). En notant par ∅ un site vide, la séquence de remplissage le long de l'axe ternaire est : Nb, Li, ∅, Nb, Li, ∅, Nb... (fig. 2. 38). Les ions niobium et lithium ayant des diamètres sensiblement différents la charpente des octaèdres est déformée et aucun cation n'est centré.

Une autre façon de représenter cette architecture consiste à partir de la structure perowskite idéale correspondant à l'état paraélectrique ($\theta > 1\,200$ °C) : les ions oxygène forment une charpente d'octaèdres qui se déduit de la figure 2. 33 *b* en supprimant les ions placés aux sommets du cube (fig. 2. 39). Les ions métalliques les plus gros (A) du composé ABO_3 occupent les sommets du cube situés entre deux octaèdres, les ions les plus petits (B) étant disposés au centre des octaèdres. La symétrie ponctuelle est celle du cube : *m3m*. La structure de l'état ferroélectrique, à température ambiante, est obtenue par déformation de la structure paraélectrique; dans le cas du niobate de lithium (A = Li, B = Nb) les ions métalliques se déplacent en créant une polarisation suivant une direction privilégiée et en ne laissant à l'édifice que la symétrie *3m*. Le raisonnement précédent s'applique à $BaTiO_3$ et $KNbO_3$ mais la déformation de la structure perowskite se fait suivant l'axe A_4 pour $BaTiO_3$ qui a la symétrie (*) *4mm* à la température ambiante et suivant l'axe A_2 pour $KNbO_3$ qui présente ainsi la symétrie *2mm*.

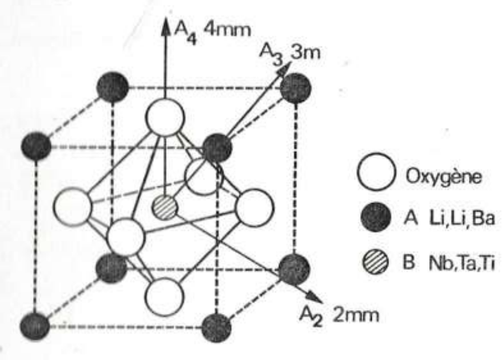


FIG. 2. 39. — *Structure perowskite* ABO_3. L'octaèdre formé par six anions oxygène contient un ion B. Chaque octaèdre est relié à un autre par chacun de ses sommets. Les ions A occupent les sommets du cube contenant l'octaèdre.

En ce qui concerne le tantalate de lithium ($LiTaO_3$) tout ce qui a été dit de la structure de $LiNbO_3$ est valable, l'ion Ta remplaçant l'ion Nb. Les paramètres de la maille rhomboédrique sont $a = 5{,}47$ Å et $\alpha = 56° 10'$.

RÉFÉRENCES

[1] L. EYRAUD. — *Diélectriques solides anisotropes et ferroélectricité*, chap. 6. Paris : Gauthier-Villars (1967).

[2] K. SCHUBERT. — *Kristallstrukturen zweikomponentiger phasen*, p. 200, fig. 6. Berlin : Springer Verlag (1964).

[3] H. D. MEGAW. — *Ferroelectricity in crystals*, chap. 5, paragr. 5. London : Methuen and Co. (1957).

[4] M. DI DOMENICO, Jr. and S. H. WEMPLE. — « Oxygen-octahedra ferroelectrics », *J. Appl. Phys.*, *40*, 720 (1969).

(*) Le $BaTiO_3$ se rencontre le plus souvent sous forme de céramique. La croissance des monocristaux est délicate.

BIBLIOGRAPHIE

TH. KAHAN. — *Théorie des groupes en physique classique et quantique*, tome 2, p. 49-144 : « Les groupes en cristallographie » par H. CURIEN. Paris : Dunod (1971).

D. WEIGEL. — *Algèbre et géométrie cristalline et moléculaire*. Paris : Masson et Cie (1972).

Il existe plusieurs excellents cours polycopiés, par exemple ceux des professeurs H. CURIEN, J. WYART. Malheureusement, il est difficile de se les procurer en dehors de la faculté des sciences de Paris.

EXERCICES

● **2. 1.** Quels sont les indices de Miller repérant les plans ACGE, BDHF, EBD et les rangées AC, AG du réseau cubique de la figure 2. 40?

Solution. $(1, \bar{1}, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, [110], [111].

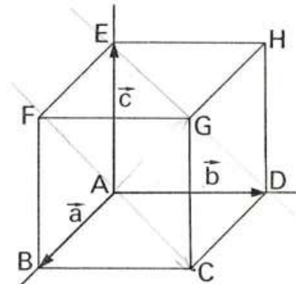


FIG. 2. 40.

● **2. 2.** Montrer, en comparant son volume à celui de la maille rhomboédrique élémentaire, que la maille cubique d'un réseau c. f. c. est quadruple.

Solution. En prenant pour unité l'arête du cube et avec les notations de la figure 2. 9 *b*, les vecteurs de base du rhomboèdre ont pour composantes :

$$\vec{a}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \vec{b}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \quad \vec{c}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{4}$$

● **2. 3.** Calculer la masse volumique de l'aluminium qui cristallise dans le réseau c. f. c. d'arête $a = 4{,}04$ Å, Al = 27. Nombre d'Avogadro $N = 6{,}023 \cdot 10^{23}$.

Solution. Il y a 4 atomes par maille de volume $a^3 \Rightarrow \rho = \frac{4M}{Na^3} = 2{,}72 \cdot 10^3$ kg/m³.

● **2. 4.** Les ions Ca^{2+} de la fluorine (CaF_2) forment un réseau c. f. c. d'arête $a = 5{,}45$ Å. Calculer la masse volumique de la fluorine : Ca = 40, F = 19.

Solution. La maille cubique contient quatre molécules $CaF_2 \Rightarrow \rho = 3{,}20 \cdot 10^3$ kg/m³.

● **2. 5.** Calculer la distance interréticulaire dans les familles de plans (100), (110), (111) pour les trois réseaux cubiques. Quel est, dans chaque cas, le plan portant la plus grande densité de nœuds?

Solution.

Cubique simple	$\underline{d_{100}} = a$	$d_{110} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$d_{111} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
Cubique centré	$d_{100} = \frac{a}{2}$	$\underline{d_{110}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$d_{111} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Cubique à faces centrées $\quad d_{110} = \frac{a}{2} \quad d_{110} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \underline{d_{111}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Les plans de densité maximale, c'est-à-dire les plus écartés, sont soulignés.

• **2. 6.** Calculer l'angle α de la maille rhomboédrique du réseau c. f. c.

Solution. Former le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \alpha = 60°$.

• **2. 7.** Quelle est l'équation de la famille de plans réticulaires (hkl) dans le système d'axes Oxyz porté par les vecteurs de base $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

Solution. Le n-ième plan de la famille, compté à partir de l'origine, coupe les axes aux points $A\left(x_n = \frac{na}{h}, 0, 0\right)$, $B\left(0, y_n = \frac{nb}{k}, 0\right)$, $\left(0, 0, z_n = \frac{nc}{l}\right)$. Son équation est donc :

$$\frac{x}{x_n} + \frac{y}{y_n} + \frac{z}{z_n} = 1 \quad \text{soit} \quad h\frac{x}{a} + k\frac{y}{b} + l\frac{z}{c} = n.$$

• **2. 8.** Dans un réseau cubique, quelle est la distance entre deux plans consécutifs de la famille (hkl)?

Solution. D'après le résultat de l'exercice précédent l'équation du premier plan réticulaire est :

$$hx + ky + lz = a$$

sa distance à l'origine est donc $d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$.

• **2. 9.** Calculer le volume V d'une maille en fonction des longueurs a, b, c et des angles $\alpha = (\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = (\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = (\vec{a}, \vec{b})$. Utiliser l'expression

$$V^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

pour mettre V sous la forme : $V = abcF(\alpha, \beta, \gamma)$. Exprimer $F(\alpha, \beta, \gamma)$ pour chaque système cristallin.

Solution.

$$V^2 = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

d'où

$$V = abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} = abcF(\alpha, \beta, \gamma).$$

Système triclinique $F = \sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$.
Système monoclinique $F = \sin\beta$.
Systèmes orthorhombique, tétragonal, cubique $F = 1$.
Système trigonal $F = \sqrt{1 + 2\cos^3\alpha - 3\cos^2\alpha}$.
Système hexagonal $F = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• **2. 10.** Quelle est la classe de symétrie ponctuelle d'un tétraèdre régulier?

Solution. La figure 2. 41 met en évidence quatre axes ternaires perpendiculaires aux faces, trois axes inverses d'ordre 4 perpendiculaires à chaque couple d'arêtes opposées et six miroirs. La symétrie ponctuelle d'un tétraèdre régulier est celle de la classe $\bar{4}3m$ du système cubique.

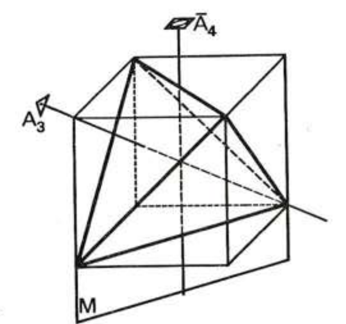


FIG. 2. 41. — *Éléments de symétrie d'un tétraèdre régulier.*

• **2. 11.** Calculer le rapport c/a de la maille hexagonale de l'empilement ABAB (fig. 2. 34 *b*).

Solution. Trois sphères **A** et une sphère **B** forment un tétraèdre d'arête $a = 2r$ et de hauteur $2r\sqrt{2/3} = c/2$ d'où $c/a = 2\sqrt{2/3} = 1{,}633$.

• **2. 12.** Quel est le facteur de remplissage f_r (rapport du volume occupé par les sphères au volume total) des deux structures compactes?

Solution. Pour l'empilement ABC (fig. 2. 33) l'arête de la maille cubique est telle que $a\sqrt{2} = 4r$ (r rayon des sphères). Comme la maille contient quatre sphères :

$$f_r = \frac{4 \times \frac{4}{3}\pi r^3}{(2\sqrt{2}r)^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0{,}74.$$

Pour l'empilement ABAB la maille hexagonale de volume $V = ca^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{2}r^3$ contient deux sphères :

$$f_r = \frac{2 \times \frac{4}{3}\pi r^3}{8\sqrt{2}r^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0{,}74.$$

Il n'est pas étonnant de trouver le même facteur de remplissage puisque les deux structures sont constituées de sphères jointives.

• **2. 13.** Quel est le nombre de cavités tétraédriques et octaédriques par maille cubique de l'empilement compact ABC?

Solution. Sur la figure 2. 33 *b* il apparaît 8 cavités tétraédriques (une par sommet) et 4 cavités octaédriques (une au centre du cube et 12 au milieu des arêtes communes à quatre cubes).

CHAPITRE 3

TRADUCTION DES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES CRISTAUX PAR DES TENSEURS

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit la structure cristalline comme résultant d'un motif (grappe d'atomes) reproduit dans l'espace par l'ensemble des translations définies par trois vecteurs élémentaires. Cet édifice triplement périodique possède des éléments de symétrie dont le dénombrement aboutit à distribuer en 32 classes les différents cristaux quand on ne s'intéresse qu'à l'aspect macroscopique. Il est intuitif que les propriétés physiques et chimiques d'un cristal dépendent de la nature des atomes mais aussi de l'arrangement de ces atomes c'est-à-dire de la symétrie. En conséquence, indépendamment du contenu de leur motif, des cristaux de même symétrie ponctuelle ont un comportement semblable vis-à-vis d'actions physiques de même orientation. C'est ce que révèle l'analyse tensorielle qui est l'outil mathématique adapté à l'étude des propriétés physiques des cristaux. Rappelons au passage que le concept de tenseur a été introduit, à la fin du XIXe siècle, par le physicien W. Voigt pour définir l'état de tension mécanique d'un solide (le mot tenseur vient de tension). L'analyse tensorielle classe les grandeurs physiques d'après les lois de transformation de leurs composantes lors d'un changement d'axes de référence. Lorsque ce changement d'axes correspond à une opération de symétrie du cristal, il résulte, de l'identité des propriétés macroscopiques du cristal dans les deux repères, des relations entre les composantes des tenseurs caractérisant ses propriétés physiques et donc une réduction du nombre des composantes indépendantes. L'exemple pris ici pour illustrer cette réduction est le tenseur diélectrique de rang deux. Les cas plus compliqués des tenseurs de rang trois et quatre sont traités aux chapitres 6 et 4 consacrés à la piézoélectricité et à l'élasticité statique. Comme par la suite nous aurons à rechercher des valeurs et vecteurs propres de tenseurs de rang deux, nous rappelons ici quelques résultats essentiels.

3. 1. — RELATION ENTRE CAUSE ET EFFET DANS UN CRISTAL

La notion de tenseur apparaît dès qu'on cherche à établir des relations linéaires entre effets et causes dans les milieux anisotropes. Dans un cristal, une cause appliquée suivant une direction donne en général naissance à un effet orienté suivant une autre direction (fig. 3. 1). Dans un matériau diélectrique, par exemple, un champ électrique $\vec{E}$ crée une polarisation $\vec{P}$ dans une direction autre que celle du champ électrique.

FIG. 3. 1. — *Relation entre cause et effet dans un cristal.* Un milieu anisotrope présente des directions de « moindre résistance » : une cause $\mathscr{C}$ engendre un effet $\mathscr{E}(\mathscr{C})$ en général non parallèle à la cause. En limitant aux premiers termes (domaine linéaire) le développement de $\mathscr{E}(\mathscr{C})$, il vient pour une cause et un effet vectoriels :

$$\mathscr{E}_1 = A_{11}\mathscr{C}_1 + A_{12}\mathscr{C}_2$$
$$\mathscr{E}_2 = A_{21}\mathscr{C}_1 + A_{22}\mathscr{C}_2.$$

Si la cause $\mathscr{C}$ et l'effet $\mathscr{E}$ sont des grandeurs vectorielles, la relation linéaire la plus générale entre les composantes $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$ de l'effet et celles de la cause $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ dans un même système d'axes, fait intervenir neuf coefficients A_{ij} :

$$\mathscr{E}_1 = A_{11}\mathscr{C}_1 + A_{12}\mathscr{C}_2 + A_{13}\mathscr{C}_3$$
$$\mathscr{E}_2 = A_{21}\mathscr{C}_1 + A_{22}\mathscr{C}_2 + A_{23}\mathscr{C}_3$$
$$\mathscr{E}_3 = A_{31}\mathscr{C}_1 + A_{32}\mathscr{C}_2 + A_{33}\mathscr{C}_3$$

ou plus brièvement

$$\mathscr{E}_i = A_{ij}\mathscr{C}_j \qquad i, j = 1, 2, 3$$

en sommant de 1 à 3 sur l'indice répété j, appelé indice muet (convention d'Einstein). Les neuf composantes A_{ij} forment un tenseur de rang deux; un vecteur tel que $\mathscr{E}_i$ ou $\mathscr{C}_i$ est appelé, par généralisation, tenseur de rang un et un scalaire comme la température, tenseur de rang zéro.

Les tenseurs $\mathscr{C}_i$ ou $\mathscr{E}_i$ et le tenseur A_{ij} sont de natures différentes. Les premiers $\mathscr{C}_i$ ou $\mathscr{E}_i$ désignent des grandeurs physiques. Le deuxième A_{ij} caractérise le matériau : il décrit la réponse vectorielle $\mathscr{E}_i$ du cristal soumis à la cause vectorielle $\mathscr{C}_i$. Une grandeur scalaire comme la température, l'énergie, est représentée par un tenseur de rang zéro, une grandeur vectorielle (champ électrique, force...) par un tenseur de rang un, d'autres grandeurs plus complexes (déformations, contraintes) par des tenseurs de rang deux. Les propriétés physiques des cristaux peuvent être mesurées par des tenseurs de rang zéro (chaleur spécifique), de rang un (pyroélectricité), de rang deux (permittivité, conductivité électrique, dilatation thermique), de rang trois (piézoélectricité),

de rang quatre (élasticité)... Par exemple la relation entre induction et champ électrique :

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \qquad (3.\ 1)$$

définit le tenseur des permittivités ε_{ij}.

En réalité les neuf nombres A_{ij} ne suffisent pas pour caractériser la propriété physique considérée; il faut encore préciser le système d'axes choisi, car dans un autre repère les composantes du tenseur prennent des valeurs différentes A'_{ij}. Les deux séries de valeurs représentent la même propriété physique, indépendante des axes de référence, par conséquent il existe entre ces coefficients une relation qui met en jeu l'opération de changement d'axes. Ce sont précisément les lois de transformation des composantes qui sont utilisées pour définir les tenseurs au paragraphe 3. 3. Étudions d'abord les changements d'axes au moyen des matrices.

3. 2. — CHANGEMENT D'AXES DE RÉFÉRENCE ORTHONORMÉS

Un changement d'axes de référence est entièrement déterminé par les neuf coefficients α_i^k des relations exprimant les nouveaux vecteurs de base $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ en fonction des anciens vecteurs de base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{e}'_i = \alpha_i^k \vec{e}_k \qquad (3.\ 2)$$

(le symbole $\sum_k$ a été omis conformément à la convention de sommation sur l'indice muet k).

Les coefficients α_i^k se rangent dans un tableau, appelé matrice α, dont la ligne d'indice i est constituée des composantes α_i^k sur la base $\vec{e}_k$ du vecteur $\vec{e}'_i$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}$$

Inversement, les vecteurs de base $\vec{e}_k$ s'écrivent en fonction des vecteurs de base $\vec{e}'_j$ à l'aide des éléments β_k^j d'une matrice β :

$$\vec{e}_k = \beta_k^j \vec{e}'_j. \qquad (3.\ 3)$$

La relation entre les coefficients β_k^j et α_i^k s'obtient en reportant $\vec{e}_k$ dans l'équation 3. 2

$$\vec{e}'_i = \alpha_i^k \beta_k^j \vec{e}'_j$$

soit, avec le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

$\Rightarrow \vec{e}'_i = \delta_{ij} \vec{e}'_j$

$$(\alpha_i^k \beta_k^j - \delta_{ij}) \vec{e}'_j = 0. \qquad (3.\ 4)$$

Il n'existe pas de relation linéaire entre les vecteurs $\vec{e}'_j$ puisqu'ils forment une base; tous les coefficients de l'équation 3. 4 doivent être nuls :

$$\alpha_i^k \beta_k^j = \delta_{ij}. \qquad (3.\ 5)$$

D'après les règles du produit des matrices, β est l'inverse de la matrice de changement de base α. La résolution du système 3. 5 fournit les composantes β_k^j :

$$\beta_k^j = (-1)^{j+k} \frac{M_j^k}{|\alpha|}$$

où M_j^k est le mineur du déterminant $|\alpha|$ de la matrice α, obtenu en supprimant la ligne j et la colonne k.

Les repères utilisés par la suite sont toujours orthonormés :

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \delta_{kl}.$$

Dans ce cas la matrice inverse β se déduit simplement de α. En effet le premier produit scalaire s'écrit à l'aide des relations :

$$\vec{e}'_i = \alpha_i^k \vec{e}_k \qquad \text{et} \qquad \vec{e}'_j = \alpha_j^l \vec{e}_l$$

$$\alpha_i^k \alpha_j^l (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l) = \delta_{ij}$$

soit, comme $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \delta_{kl}$:

$$\alpha_i^k \alpha_j^k = \delta_{ij}.$$

La comparaison entre cette relation et la formule 3. 5 montre que

$$\beta_k^j = \alpha_j^k.$$

La matrice β, inverse de la matrice α de changement d'axes *orthonormés*, s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de α (matrice transposée α'). La matrice α, qui a pour inverse sa transposée, est dite orthogonale.

Soient x_k les coordonnées d'un point M, *i. e.* les composantes du vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$, sur la base $\vec{e}_k$ et x'_i les coordonnées du même point sur la base $\vec{e}'_i$:

$$\vec{x} = x_k \vec{e}_k = x'_i \vec{e}'_i.$$

En remplaçant $\vec{e}_k$ par l'expression 3. 3 il vient

$$\vec{x} = x_k \beta_k^j \vec{e}'_j = x'_i \vec{e}'_i.$$

Comme la décomposition d'un vecteur sur une base est unique, les nouvelles coordonnées x'_i s'expriment en fonction des anciennes x_k par la relation

$$x'_i = \beta_k^i x_k$$

qui est semblable à 3. 2 si les repères sont orthonormés ($\beta_k^i = \alpha_i^k$) :

$$x'_i = \alpha_i^k x_k. \qquad (3.\ 6)$$

3. 3. — DÉFINITION D'UN TENSEUR

Les grandeurs physiques se distinguent d'après leur comportement lors d'un changement d'axes. Nous nous limitons toujours aux changements d'axes orthonormés pour lesquels les lois de transformation des coordonnées d'un point (3. 6) et des vecteurs de base (3. 2) sont identiques. Par définition :

a) Un *scalaire* est une grandeur indépendante du repère choisi, c'est un *invariant ou tenseur de rang zéro*. L'invariance d'une fonction scalaire des coordonnées $f(x_1, x_2, x_3)$ s'exprime par l'égalité

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Exemples d'invariants : la température, l'énergie, le potentiel électrostatique.

b) Tout ensemble de trois quantités A_i se transformant dans un changement d'axes comme les vecteurs de base $\vec{e}_i$ est un *tenseur de rang un, ou vecteur :*

$$A'_i = \alpha_i^k A_k.$$

Exemples de vecteurs : les composantes de tout vecteur de l'espace vectoriel sous-tendu par les trois vecteurs de base $\vec{e}_i$ forment un tenseur de rang un (cf. relation 3. 6). Les trois dérivées $\partial f/\partial x_i$ constituent un vecteur appelé gradient de la fonction scalaire $f(x_i)$. En effet, les composantes du gradient dans le nouveau système :

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}$$

se déduisent des composantes dans l'ancien système $\partial f/\partial x_k$ à l'aide des coefficients $\partial x_k/\partial x'_i$. En inversant la relation 3. 6 il vient

$$x_k = \beta_k^i x'_i = \alpha_i^k x'_i$$

si bien que les composantes du gradient se transforment selon la loi :

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \alpha_i^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

c) Tout ensemble de neuf grandeurs A_{ij} se transformant comme le produit des composantes de deux vecteurs est un *tenseur de rang deux :*

$$A'_{ij} = \alpha_i^k \alpha_j^l A_{kl}.$$

Ces neuf composantes se rangent dans un tableau que nous limitons par des crochets pour le distinguer de celui de la matrice de changement d'axes α :

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Malgré cette ressemblance, les matrices et les tenseurs ont des significations très différentes :

— les composantes α_i^j établissent une correspondance entre *deux* systèmes d'axes;

— le tenseur A_{ij} est une grandeur physique (ou mathématique) représentée dans *un* système d'axes par neuf nombres.

Exemple de tenseur de rang deux : les dérivées $\partial A_i/\partial x_k$ des composantes d'un vecteur (la démonstration est identique à celle utilisée pour le gradient).

A partir d'un tenseur A_{ij} il est possible de former un invariant en sommant tous les termes diagonaux. Avec la convention de sommation sur les indices répétés, cette quantité $A_{11} + A_{22} + A_{33}$, appelée trace du tenseur, est notée A_{ii}. Dans un changement d'axes orthonormés :

$$A'_{ii} = \alpha_i^k \alpha_i^l A_{kl} = A_{ll}$$

puisque $\alpha_i^k \alpha_i^l = \delta_{kl}$. En particulier la trace du tenseur $A_{ij} = A_i B_j$ c'est-à-dire l'invariant $A_i B_i$ est le produit scalaire des vecteurs A_i et B_j. Le produit contracté :

$$A_i A_i = (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2$$

noté A_i^2, représente le carré de la longueur du vecteur A_i.

d) La définition se généralise sans difficultés : un tenseur de rang r est un ensemble de 3^r composantes repérées par r indices qui, dans un changement d'axes, se transforment de la manière suivante :

$$A'_{\dots ijk \dots} = \cdots \alpha_i^l \alpha_j^m \alpha_k^n \cdots A_{\dots lmn \dots} \qquad (3.\ 7)$$

La formation de la trace d'un tenseur de rang deux est un cas particulier de la règle de contraction des indices : la quantité $A_{\dots ijjl \dots}$ (sommation sur l'indice j répété) provenant du tenseur $A_{\dots ijkl \dots}$ de rang r est un tenseur de rang $r - 2$. En effet, dans une transformation d'axes, les nouvelles composantes

$$A'_{\dots ijjl \dots} = \cdots \alpha_i^m \alpha_j^n \alpha_j^p \alpha_l^q \cdots A_{\dots mnpq \dots}$$

s'écrivent, comme $\alpha_j^n \alpha_j^p = \delta_{np}$:

$$A'_{\dots ijjl \dots} = \cdots \alpha_i^m \alpha_l^q \cdots A_{\dots mnnq \dots}$$

Pour reconnaître le caractère tensoriel d'une grandeur, la règle sui-

vante est souvent utile : la relation linéaire entre un tenseur $A_{\dots ij \dots}$ de rang m et un tenseur $B_{\cdot\cdot kl \cdot\cdot}$ de rang n, définit un tenseur $C_{\cdot\cdot ijkl \cdot\cdot}$ de rang $m+n$:

$$A_{\dots ij \dots} = C_{\cdot\cdot ijkl \cdot\cdot} B_{\cdot\cdot kl \cdot\cdot} \tag{3. 8}$$

Démonstration. — Dans un changement d'axes

$$A'_{\dots pq \dots} = \cdots \alpha_p^i \alpha_q^j \cdots A_{\dots ij \dots} \tag{3. 9}$$

et

$$B_{\cdot\cdot kl \cdot\cdot} = \cdots \beta_k^r \beta_l^s \cdots B'_{\cdot\cdot rs \cdot\cdot} \tag{3. 10}$$

car, pour passer des anciens axes aux nouveaux il faut utiliser la matrice inverse β. Comme $\beta_k^r = \alpha_r^k$, il vient en reportant 3. 10 dans 3. 8 et 3. 8 dans 3. 9 :

$$A'_{\dots pq \dots} = (\cdots \alpha_p^i \alpha_q^j \alpha_r^k \alpha_s^l \cdots C_{\cdot\cdot ijkl \cdot\cdot}) B'_{\cdot\cdot rs \cdot\cdot}$$

Le facteur entre parenthèses n'est autre que $C'_{\cdot\cdot pqrs \cdot\cdot}$, par conséquent les quantités $C_{\cdot\cdot ijkl \cdot\cdot}$ se transforment comme les composantes d'un tenseur de rang $m+n$:

$$C'_{\cdot\cdot pqrs \cdot\cdot} = \cdots \alpha_p^i \alpha_q^j \alpha_r^k \alpha_s^l \cdots C_{\cdot\cdot ijkl \cdot\cdot}$$

Application. Le symbole de Kronecker δ_{ij} est un tenseur de rang deux puisque

$$A_i = \delta_{ij} A_j.$$

En élasticité, les constantes de rigidité c_{ijkl} qui relient le tenseur des contraintes T_{ij} au tenseur des déformations S_{kl} forment un tenseur de rang quatre :

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}.$$

3. 4. — RESTRICTIONS IMPOSÉES PAR LES ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE DES CRISTAUX AU NOMBRE DE COMPOSANTES INDÉPENDANTES DES TENSEURS

Soient $A_{\cdot\cdot ijk \cdot\cdot}$ les composantes, dans le repère $Ox_1x_2x_3$, d'un tenseur traduisant une *propriété physique* d'un cristal et $A'_{\cdot\cdot ijk \cdot\cdot}$ les composantes de ce tenseur dans le même repère, pour la nouvelle orientation du cristal obtenue en appliquant l'opération $\mathscr{S}$. Pour exprimer les $A'_{\cdot\cdot ijk \cdot\cdot}$ en fonction des $A_{\cdot\cdot pqr \cdot\cdot}$ remarquons qu'il revient au même du point de vue de l'orientation relative du cristal par rapport au repère, d'appliquer l'opération inverse $\mathscr{S}^{-1}$ au système d'axes en laissant le cristal immobile (fig. 3. 2).

Par conséquent α étant la matrice de changement d'axes correspondant à l'opération $\mathscr{S}^{-1}$, d'après la relation 3. 7

$$A'_{\cdot\cdot ijk \cdot\cdot} = \cdots \alpha_i^p \alpha_j^q \alpha_k^r \cdots A_{\cdot\cdot pqr \cdot\cdot}$$

Si $\mathscr{S}$ est une des opérations de la classe de symétrie ponctuelle du cristal, la nouvelle orientation du cristal par rapport au repère $Ox_1x_2x_3$ est indiscernable de celle de départ par des mesures physiques macroscopiques, ceci se traduit par l'égalité :

$$A'_{\cdot\cdot ijk \cdot\cdot} = A_{\cdot\cdot ijk \cdot\cdot}$$

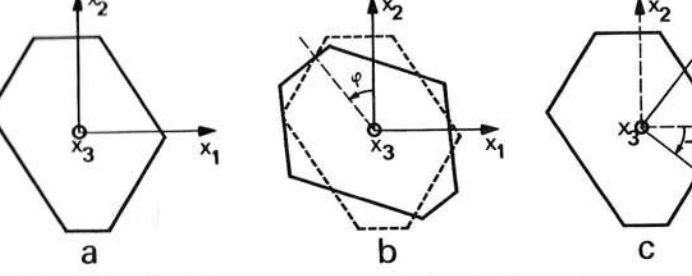


FIG. 3. 2. — *Équivalence entre une rotation du cristal et un changement d'axes.*
a) cristal et système de référence au départ;
b) rotation du cristal d'un angle φ autour de Ox_3;
c) rotation du repère de l'angle − φ.

Ainsi l'invariance des propriétés physiques pour certaines opérations de symétrie impose des relations :

$$A_{\cdot\cdot ijk \cdot\cdot} = \cdots \alpha_i^p \alpha_j^q \alpha_k^r \cdots A_{\cdot\cdot pqr \cdot\cdot} \tag{3. 11}$$

qui réduisent le nombre de composantes indépendantes des tenseurs. Comme l'inverse d'une opération de symétrie du cristal ($\mathscr{S} = A_n$ ou $\bar{A}_n$) est une opération de symétrie ($\mathscr{S}^{-1} = \mathscr{S}^{n-1}$), α est la matrice de changement de base associée à une des opérations de la classe de symétrie d'orientation du cristal.

3. 4. 1. — *Matrices des opérations de symétrie ponctuelle des cristaux*

Les éléments de symétrie des cristaux sont les axes directs ou inverses, le miroir et le centre de symétrie (paragr. 2. 3. 1. 1). Dans une *rotation* d'angle φ autour de l'axe Ox_3 (fig. 3. 3 *a*) les nouveaux vecteurs de base $\vec{e}'_i$ s'expriment en fonction des anciens par :

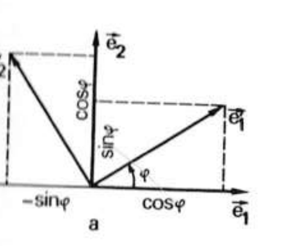
$$\vec{e}'_1 = (\cos\varphi)\,\vec{e}_1 + (\sin\varphi)\,\vec{e}_2$$
$$\vec{e}'_2 = -(\sin\varphi)\,\vec{e}_1 + (\cos\varphi)\,\vec{e}_2$$
$$\vec{e}'_3 = \vec{e}_3.$$

La matrice de changement d'axes par rotation d'angle φ autour de Ox_3 est ainsi :

$$\alpha_{x_3,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3. 12}$$

une *symétrie par rapport à un point* pris comme origine du repère est :

$$\alpha_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



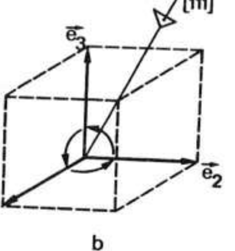


FIG. 3. 3. — *Rotation des axes,* (a) *autour de* Ox_3, (b) *autour de la direction* [*111*].

La matrice de changement d'axes par *rotation-inversion* d'ordre *n* résulte de la relation $\bar{A}_n = A_n \cdot C$:

$$\bar{\alpha}_{x_3, 2\pi/n} = \alpha_{x_3, 2\pi/n} \cdot \alpha_C.$$

Pour un *plan de symétrie* perpendiculaire à Ox_3 :

$$\alpha_{M \perp x_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une rotation de $2\pi/3$ (axe ternaire) autour de la diagonale (direction [111]) du cube construit avec les trois vecteurs de base (fig. 3. 3 *b*), donne lieu à une permutation circulaire des axes :

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_2, \qquad \vec{e}'_2 = \vec{e}_3, \qquad \vec{e}'_3 = \vec{e}_1$$

qui se traduit par la matrice

$$\alpha_{[111], 2\pi/3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 4. 2. — *Influence d'un centre de symétrie*

La condition générale d'invariance 3. 11 se réduit dans le cas d'une inversion, puisque la matrice α est diagonale ($\alpha_i^j = -\delta_{ij}$), à :

$$A_{\cdot\cdot ijk\cdot\cdot} = \cdots \alpha_i^i \alpha_j^j \alpha_k^k \cdots A_{\cdot\cdot ijk\cdot\cdot}$$

soit pour un tenseur de rang *n* :

$$A_{\cdot\cdot ijk\cdot\cdot} = (-1)^n A_{\cdot\cdot ijk\cdot\cdot} \qquad (3.\ 13)$$

Lorsque *n* est impair : $(-1)^n = -1$ et la relation précédente implique la nullité de toutes les composantes. *Les propriétés physiques représentées par des tenseurs de rang impair ne se manifestent pas dans les cristaux appartenant à l'une des onze classes centro-symétriques;* c'est en particulier le cas de la piézoélectricité ($n = 3$).

Si le rang *n* est pair, la relation 3. 13 n'apporte rien. Un centre de symétrie n'a donc aucune influence sur les propriétés physiques se traduisant par des tenseurs de rang pair. De plus, il n'y a pas lieu de distinguer la nature — directe ou inverse — des axes, si bien que les classes d'un même système possèdent une restriction minimale au nombre de composantes indépendantes car elles ont en commun un ou plusieurs axes directs ou inverses (paragr. 2. 3. 3). Ces remarques sont illustrées par l'exemple du tenseur diélectrique.

3. 4. 3. — *Réduction du nombre de constantes diélectriques indépendantes*

Il résulte de considérations thermodynamiques analogues à celles développées pour le tenseur d'élasticité (paragr. 4. 4) que le tenseur diélectrique, défini par la relation 3. 1, est symétrique : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. La condition d'invariance 3. 11 s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_i^k \alpha_j^l \varepsilon_{kl}. \qquad (3.\ 14)$$

Le tenseur étant de rang pair, il n'y a aucune réduction du nombre de constantes diélectriques indépendantes (six) pour les cristaux du système *triclinique* qui ont au plus un centre de symétrie.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \qquad \textit{triclinique.}$$

En prenant l'axe Ox_3 du repère orthonormé parallèle à l'axe binaire direct ou inverse (miroir) des cristaux du système *monoclinique*, la matrice de changement de repère est diagonale :

$$\alpha_{A_2 \parallel x_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \alpha_{M \perp x_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La condition 3. 14

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_i^i \alpha_j^j \varepsilon_{ij}$$

annule les constantes à un seul indice 3 ($\alpha_i^i\alpha_3^3 = -1$ si $i \neq 3$), ce qui restreint le nombre de composantes indépendantes à quatre :

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \textit{monoclinique.}$$

Les cristaux du système *orthorhombique* possèdent trois axes binaires directs ou inverses perpendiculaires qui sont choisis comme axes de référence. Il suffit d'appliquer le raisonnement précédent à chacun des axes, *i. e.* à chaque indice, pour s'apercevoir que toutes les composantes non diagonales s'annulent.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \textit{orthorhombique.}$$

Lorsque l'axe A_n ou $\bar{A}_n (n > 2)$ des cristaux des systèmes *trigonal, tétragonal, hexagonal* est porté par Ox_3, la matrice de changement de base utile est donnée par 3. 12 avec $\varphi = 2\pi/n < \pi$. La relation 3. 14 appliquée à ε_{13} et ε_{23}

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} = \alpha_1^k\alpha_3^3\varepsilon_{k3} = \alpha_1^1\varepsilon_{13} + \alpha_1^2\varepsilon_{23} & \text{car} \quad \alpha_1^3 = 0 \\ \varepsilon_{23} = \alpha_2^k\alpha_3^3\varepsilon_{k3} = \alpha_2^1\varepsilon_{13} + \alpha_2^2\varepsilon_{23} & \text{car} \quad \alpha_2^3 = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \varepsilon_{13}(1 - \cos\varphi) - \varepsilon_{23}\sin\varphi = 0 \\ \varepsilon_{13}\sin\varphi + \varepsilon_{23}(1 - \cos\varphi) = 0 \end{cases}$$

impose, comme φ n'est pas nul : $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Pour ε_{11} il vient :

$$\varepsilon_{11} = \alpha_1^k\alpha_1^l\varepsilon_{kl} = \alpha_1^1\alpha_1^2(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + \alpha_1^1\alpha_1^1\varepsilon_{11} + \alpha_1^2\alpha_1^2\varepsilon_{22}$$

soit

$$\varepsilon_{11}\sin^2\varphi = (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})\cos\varphi\sin\varphi + \varepsilon_{22}\sin^2\varphi$$

et en divisant par $\sin^2\varphi$:

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})\,\mathrm{cotg}\,\varphi. \qquad (3.\ 15)$$

Les mêmes calculs en partant de ε_{12}, conduisent à :

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = -(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})\,\mathrm{tg}\,\varphi. \qquad (3.\ 16)$$

Comme φ est différent de π, les relations 3. 15 et 3. 16 imposent

$$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11}.$$

et $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 0$ puisque le tenseur est symétrique.

Les cristaux des systèmes *trigonal, tétragonal, hexagonal* ne possèdent que deux constantes diélectriques indépendantes : ε_{11} et ε_{33}.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \textit{trigonal} \\ \textit{tétragonal} \\ \textit{hexagonal.} \end{matrix}$$

Pour les cristaux du système *cubique*, de symétrie minimale $4A_3$ et $3A_2$ (pris comme axes de référence), seuls les termes diagonaux ne sont pas nuls comme pour le système orthorhombique. La rotation autour de l'axe ternaire [111] crée une permutation circulaire des indices :

$$(1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \textit{cubique.}$$

Un cristal de symétrie cubique est un *diélectrique isotrope*, l'induction et le champ électrique sont colinéaires : $D_i = \varepsilon E_i$.

3. 5. — VECTEURS PROPRES ET VALEURS PROPRES D'UN TENSEUR DE RANG DEUX

Dans l'approximation des relations linéaires, la résolution d'un grand nombre de problèmes physiques conduit à des systèmes de trois (ou n) équations linéaires homogènes ($i = 1, 2, 3$) à trois (ou n) inconnues u_1, u_2, u_3 :

$$C_{ij}u_j = 0 \qquad (3.\ 17)$$

où les coefficients C_{ij} ont des valeurs fixées. Pour que ce système admette une solution autre que $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, il faut que le déterminant des coefficients C_{ij} soit nul :

$$|C_{ij}| = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la condition de compatibilité des trois équations 3. 17. Un exemple important de système linéaire homogène est fourni par l'équation aux vecteurs propres u_j et aux valeurs propres λ d'un tenseur A_{ij} :

$$A_{ij}u_j = \lambda u_i. \qquad (3.\ 18)$$

Comme $u_i = \delta_{ij}u_j$ le système se met sous une forme analogue à 3. 17 :

$$(A_{ij} - \lambda\delta_{ij})u_j = 0. \qquad (3.\ 19)$$

Les valeurs propres λ sont déterminées par la condition de compatibilité :

$$|A_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.\ 20)$$

Cette équation, dite séculaire, est du troisième degré en λ :

$$(A_{11} - \lambda)(A_{22} - \lambda)(A_{33} - \lambda) + A_{21}A_{32}A_{13} + A_{12}A_{23}A_{31} - (A_{22} - \lambda)A_{31}A_{13} - (A_{11} - \lambda)A_{23}A_{32} - (A_{33} - \lambda)A_{12}A_{21} = 0.$$

Elle a en général trois racines distinctes : $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ qui sont les valeurs propres ou valeurs principales du tenseur A_{ij}. A chaque valeur propre (*) $\lambda^{(k)}$ correspond un vecteur propre $u_j^{(k)}$ dont les composantes satisfont aux trois équations non indépendantes :

$$A_{ij}u_j^{(k)} = \lambda^{(k)}u_i^{(k)}. \qquad (3.\ 21)$$

En réalité, quel que soit le scalaire μ, le vecteur $\mu u_j^{(k)}$ est aussi vecteur propre avec la valeur propre $\lambda^{(k)}$, si bien qu'il est préférable de parler de directions propres — ou directions principales — d'un tenseur.

Dans la base des vecteurs propres supposés normés ($u_i^{(k)} = \delta_{ik}$) la relation 3. 21 s'écrit, en fonction des nouvelles composantes A'_{ij}.

$$A'_{ij}\delta_{jk} = \lambda^{(k)}\delta_{ik}$$

soit

$$A'_{ik} = \lambda^{(k)}\delta_{ik}$$

et le tenseur A'_{ij} est diagonal :

$$A'_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{bmatrix}$$

Cette forme montre que la trace du tenseur, *i. e.* l'invariant A_{ii} est égale à la somme des valeurs propres :

$$A_{ii} = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)}. \qquad (3.\ 22)$$

Lorsque deux des valeurs propres, $\lambda^{(2)}$ et $\lambda^{(3)}$ par exemple, sont égales, toute combinaison linéaire des vecteurs propres $u_i^{(2)}$ et $u_i^{(3)}$:

$$u_i = \mu_2 u_i^{(2)} + \mu_3 u_i^{(3)}$$

est aussi vecteur propre; en effet

$$A_{ij}u_j = \mu_2 A_{ij}u_j^{(2)} + \mu_3 A_{ij}u_j^{(3)}$$

(*) L'indice k de $\lambda^{(k)}$ est mis entre parenthèses pour le distinguer d'un indice repérant une composante. La convention de sommation d'Einstein ne s'applique pas aux indices entre parenthèses.

ou

$$A_{ij}u_j = \lambda^{(2)}(\mu_2 u_i^{(2)} + \mu_3 u_i^{(3)}) = \lambda^{(2)}u_i.$$

A une valeur propre double (dégénérée) correspond non plus une direction, mais un plan principal défini par les vecteurs $u_i^{(2)}$ et $u_i^{(3)}$.

Tenseurs symétriques. — Démontrons deux propriétés fondamentales des tenseurs réels symétriques ($A_{ij} = A_{ji}$) :

1° Leurs valeurs propres sont réelles.

2° Les directions principales liées à des valeurs propres distinctes sont orthogonales.

La première propriété s'établit à partir de la relation 3. 18 en formant le produit contracté avec u_i^* :

$$u_i^* A_{ij}u_j = \lambda u_i^* u_i \qquad (3.\ 23)$$

qui s'écrit, après permutation des indices muets i et j dans le premier membre :

$$u_j^* A_{ji}u_i = \lambda u_i^* u_i$$

soit pour un tenseur symétrique ($A_{ji} = A_{ij}$) :

$$u_j^* A_{ij}u_i = \lambda u_i^* u_i.$$

Comme le tenseur est réel, la quantité conjuguée

$$u_j A_{ij}u_i^* = \lambda^* u_i u_i^*$$

comparée à 3. 23 montre que les valeurs propres sont réelles ($\lambda = \lambda^*$).

Pour démontrer le deuxième théorème, écrivons l'équation aux vecteurs propres $u_i^{(1)}$ et $u_i^{(2)}$:

$$A_{ij}u_j^{(1)} = \lambda^{(1)}u_i^{(1)}$$
$$A_{ij}u_j^{(2)} = \lambda^{(2)}u_i^{(2)}$$

et formons dans les deux cas le produit scalaire $u_i^{(1)}u_i^{(2)}$:

$$A_{ij}u_j^{(1)}u_i^{(2)} = \lambda^{(1)}u_i^{(1)}u_i^{(2)}$$
$$A_{ij}u_j^{(2)}u_i^{(1)} = \lambda^{(2)}u_i^{(2)}u_i^{(1)}.$$

De la soustraction membre à membre des deux égalités :

$$A_{ij}u_j^{(1)}u_i^{(2)} - A_{ij}u_j^{(2)}u_i^{(1)} = [\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}]u_i^{(1)}u_i^{(2)}$$

on déduit, en permutant les indices muets i et j du premier terme :

$$(A_{ji} - A_{ij})u_i^{(1)}u_j^{(2)} = [\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}]u_i^{(1)}u_i^{(2)}$$

que le produit scalaire $u_i^{(1)}u_i^{(2)}$ est nul si le tenseur est symétrique ($A_{ji} = A_{ij}$) et si les valeurs propres sont distinctes ($\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} \neq 0$).

A deux valeurs propres égales correspond un plan principal — perpen-

diculaire au troisième vecteur propre — dans lequel il est toujours possible de choisir deux vecteurs orthogonaux; dans tous les cas les directions principales d'un tenseur symétrique forment un trièdre orthogonal.

La recherche des valeurs et des vecteurs propres est particulièrement simple lorsque deux au moins des trois composantes non diagonales du tenseur sont nulles, par exemple A_{13} et A_{23}. Le développement du déterminant 3. 20 par rapport à la troisième ligne ou la troisième colonne :

$$(A_{33} - \lambda)[(A_{11} - \lambda)(A_{22} - \lambda) - (A_{12})^2] = 0$$

met en évidence la racine $\lambda^{(3)} = A_{33}$. Les deux valeurs propres $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$, solutions de l'équation du second degré sont :

$$\lambda^{(k)} = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} - \frac{(-1)^k}{2}\sqrt{(A_{22} - A_{11})^2 + 4(A_{12})^2} \qquad \text{avec} \qquad k = 1, 2. \tag{3. 24}$$

Le système 3. 21 :

$$\begin{cases} [A_{11} - \lambda^{(k)}]u_1^{(k)} + A_{12}u_2^{(k)} = 0 \\ A_{12}u_1^{(k)} + [A_{22} - \lambda^{(k)}]u_2^{(k)} = 0 \\ [A_{33} - \lambda^{(k)}]u_3^{(k)} = 0 \end{cases}$$

montre que, pour la valeur $\lambda^{(3)} = A_{33}$, l'axe Ox_3 est principal :

$$u_1^{(3)} = u_2^{(3)} = 0 \qquad \text{et} \qquad u_3^{(3)} \text{ quelconque.}$$

Pour les deux autres valeurs propres ($k = 1, 2$), $\lambda^{(k)} \neq A_{33} \Rightarrow u_3^{(k)} = 0$ et

$$\frac{u_2^{(k)}}{u_1^{(k)}} = \frac{\lambda^{(k)} - A_{11}}{A_{12}}$$

soit

$$\frac{u_2^{(k)}}{u_1^{(k)}} = \frac{A_{22} - A_{11}}{2A_{12}} - (-1)^k \sqrt{\left(\frac{A_{22} - A_{11}}{2A_{12}}\right)^2 + 1}.$$

Les directions principales, contenues dans le plan Ox_1x_2, sont définies par les angles β_1 et $\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$ avec Ox_1 :

$$\operatorname{tg} \beta_k = \frac{u_2^{(k)}}{u_1^{(k)}} \mp a - (-1)^k \sqrt{a^2 + 1}$$

en posant

$$a = \frac{A_{22} - A_{11}}{2A_{12}}$$

ou par l'angle double

$$\operatorname{tg} 2\beta_k = \frac{2[a - (-1)^k \sqrt{a^2 + 1}]}{1 - [a^2 + a^2 + 1 - 2a(-1)^k \sqrt{a^2 + 1}]} = -\frac{1}{a}.$$

Étant donné l'expression de a et l'indétermination de π sur $2\beta_k$ la formule

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}} \tag{3. 25}$$

donne les deux directions propres orthogonales.

3. 6. — REPRÉSENTATION TENSORIELLE DES ÉLÉMENTS DE SURFACE

Par la suite, nous aurons à calculer l'intégrale de tenseurs le long d'une courbe, sur une surface, dans un volume.

Dans le premier cas, l'élément d'intégration est le vecteur dx_i et l'intégrale d'un tenseur $A_{\ldots i \ldots}$ s'écrit

$$\int_c A_{\ldots i \ldots}\, dx_i.$$

Dans le cas d'une intégrale de surface, l'élément infinitésimal est le parallélogramme construit sur les vecteurs $d\vec{x}^{(1)}$ et $d\vec{x}^{(2)}$. La projection de ce parallélogramme sur le plan de coordonnées x_jx_k a pour aire

$$ds_{jk} = dx_j^{(1)}\, dx_k^{(2)} - dx_k^{(1)}\, dx_j^{(2)}.$$

Ces quantités forment un tenseur de rang deux antisymétrique :

$$[ds_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & ds_{12} & ds_{13} \\ -ds_{12} & 0 & ds_{23} \\ -ds_{13} & -ds_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

dont les trois composantes indépendantes peuvent être repérées par un indice i : $ds_i = ds_{jk}$ tel que la permutation (ijk) soit paire :

$$\begin{aligned} ds_1 &= ds_{23} = dx_2^{(1)}\, dx_3^{(2)} - dx_3^{(1)}\, dx_2^{(2)} \\ ds_2 &= ds_{31} = dx_3^{(1)}\, dx_1^{(2)} - dx_1^{(1)}\, dx_3^{(2)} \\ ds_3 &= ds_{12} = dx_1^{(1)}\, dx_2^{(2)} - dx_2^{(1)}\, dx_1^{(2)}. \end{aligned}$$

La loi de transformation 3. 6 ne s'applique aux composantes ds_i que pour les changements d'axes qui n'inversent pas le sens du trièdre (rotations); s'il y a inversion du trièdre (symétrie par rapport à un point ou un plan) il faut changer de signe (exercice 3. 5). Le pseudo-vecteur, ou vecteur axial, ds_i n'est autre que le produit vectoriel des deux vecteurs $d\vec{x}^{(1)}$ et $d\vec{x}^{(2)}$. Étant donné les propriétés de ce produit vectoriel, $d\vec{s} = d\vec{x}^{(1)} \wedge d\vec{x}^{(2)}$ est perpendiculaire au parallélogramme et a pour longueur son aire ds. En conséquence, au lieu du tenseur antisymétrique ds_{jk}, on prend comme élément d'intégration le pseudo-vecteur ds_i. En posant $ds_i = l_i\, ds$ où l_i est le vecteur unitaire normal à la surface, l'intégrale d'un tenseur $A_{\ldots i \ldots}$ sur la surface s est :

$$\int_s A_{\ldots i \ldots} l_i\, ds.$$

Si la surface s'est fermée, cette intégrale se transforme en intégrale de volume en utilisant le théorème de Green. L'expression vectorielle de ce théorème :

$$\int_s \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_v (\text{div } \vec{A})\, dv$$

se transpose en notation tensorielle :

$$\int_s A_i\, ds_i = \int_s A_i l_i\, ds = \int_v \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\, dv$$

v est le volume limité par la surface fermée s. Pour un tenseur de rang quelconque $A_{..i..}$

$$\int_s A_{..i..} l_i\, ds = \int_v \frac{\partial A_{..i..}}{\partial x_i}\, dv. \qquad (3.\ 26)$$

Se souvenir que

$$\frac{\partial A_{..i..}}{\partial x_i} = \frac{\partial A_{..1..}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{..2..}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{..3..}}{\partial x_3}.$$

BIBLIOGRAPHIE

L. Brillouin. — *Les tenseurs en mécanique et en élasticité.* Paris : Masson et Cie (1949).
E. Bauer. — *Champs de vecteurs et de tenseurs.* Paris : Masson et Cie (1955).
J. F. Nye. — *Propriétés physiques des cristaux*, chap. 1 et 2. Paris : Dunod (1961).

EXERCICES

• **3. 1.** Montrer que le déterminant d'une matrice orthogonale α est égal à ± 1.

Solution. Le déterminant de la matrice inverse $\beta = \alpha^t$ est $\frac{1}{|\alpha|} \Rightarrow |\alpha|^2 = 1$.

• **3. 2.** Écrire les matrices de rotation d'un angle φ autour de Ox_1 et Ox_2.

Solution.

$$\alpha_{x_1,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \alpha_{x_2,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

• **3. 3.** Soit deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$, $\vec{u}$ ayant une longueur unité, tels que

$$v_i = A_{ij}u_j \qquad \text{avec} \qquad A_{ij} = A_{ji}$$

Quelle surface décrit l'extrémité de $\vec{v}$ quand $\vec{u}$ tourne?

Solution. A_{ij} étant un tenseur symétrique ses valeurs propres sont réelles et ses directions principales sont orthogonales. En s'y rapportant, comme $u_i^2 = 1$:

$$\frac{v_1^2}{[\lambda^{(1)}]^2} + \frac{v_2^2}{[\lambda^{(2)}]^2} + \frac{v_3^2}{[\lambda^{(3)}]^2} = 1.$$

L'extrémité du vecteur $\vec{v}$ décrit un ellipsoïde.

• **3. 4.** Un corps est pyroélectrique lorsqu'une variation de température $\Delta\theta$ fait apparaître une polarisation électrique $P_i = p_i \Delta\theta$. Quelles sont les classes de symétrie ponctuelle compatibles avec la pyroélectricité?

Solution. Le tenseur pyroélectrique p_i, qui est nul pour les onze classes centro-symétriques :

$\bar{1}$, $2/m$, mmm, $\bar{3}$, $\bar{3}m$, $4/m$, $4/mmm$, $6/m$, $6/mmm$, $m3$, $m3m$

est :

$$p_i = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] \qquad \text{pour la classe 1.}$$

Comme tout axe de symétrie direct parallèle à Ox_3 entraîne $p_1 = p_2 = 0$ et que tout miroir perpendiculaire à Ox_3 impose $p_3 = 0$:

$p_i = [p_1 \quad p_2 \quad 0]$ pour la classe m
$p_i = [0 \quad 0 \quad p_3]$ pour les classes 2, 3, 4, 6, $2mm$, $3m$, $4mm$, $6mm$

et $p_i = 0$ dans toutes les autres classes. En résumé la pyroélectricité n'existe que dans les dix classes possédant au plus un axe direct, sans miroir perpendiculaire.

• **3. 5.** Montrer que les trois composantes indépendantes $A_1 = A_{23}$, $A_2 = A_{31}$, $A_3 = A_{12}$ d'un tenseur antisymétrique A_{ij} se transforment comme celles d'un vecteur lorsque le sens du trièdre orthonormé est conservé.

Solution. La relation 3. 7 :

$$A'_{jk} = \alpha_j^q \alpha_k^r A_{qr}$$

fournit, en regroupant les termes A_{qr} et $A_{rq} = -A_{qr}$:

$$A'_{jk} = \sum_{q<r} (\alpha_j^q \alpha_k^r - \alpha_j^r \alpha_k^q) A_{qr}$$

Supposons $j < k$ et $q < r$, alors $M_i^p = \alpha_j^q \alpha_k^r - \alpha_j^r \alpha_k^q$ est le mineur du déterminant $|\alpha|$ de la matrice α ($i \neq j$ et k, $p \neq q$ et r). Comme par définition, $A'_i = A'_{jk}$ lorsque la permutation ijk est paire :

$A'_i = (-1)^{i+1} A'_{jk}$ lorsque $j < k$

et $A_p = (-1)^{p+1} A_{qr}$ lorsque $q < r$.

En reportant il vient

$$A'_i = \sum_p (-1)^{i+p} M_i^p A_p.$$

Pour une transformation orthogonale la matrice inverse est

$$\beta_p^i = \frac{(-1)^{i+p} M_i^p}{|\alpha|} = \alpha_i^p.$$

D'où la relation

$$A'_i = |\alpha| (\alpha_i^p A_p)$$

avec $|\alpha| = \pm 1$ suivant que la transformation change ou ne change pas le sens du trièdre de référence.

CHAPITRE 4

ÉLASTICITÉ STATIQUE

Ce chapitre est consacré à la définition des déformations et des contraintes et au dénombrement des constantes caractérisant les propriétés élastiques des solides. Ces constantes sont les composantes d'un tenseur de rang quatre mais leur nombre ne peut pour aucun milieu excéder 21 en raison de la symétrie des tenseurs des déformations et des contraintes et des exigences des principes de la thermodynamique. Ces 21 constantes sont nécessaires pour caractériser les cristaux du système triclinique, heureusement la symétrie des autres cristaux réduit notablement ce nombre. Trois constantes suffisent pour tout cristal du système cubique.

4. 1. — DÉFORMATIONS

Avant de traiter les déformations d'un solide dans le cas général, commençons par un cas simple, celui de l'allongement d'un fil.

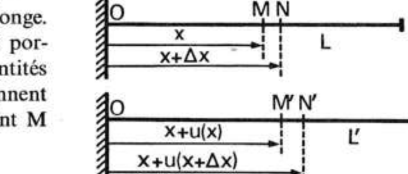


FIG. 4. 1. — *Déformation d'un fil rectiligne.*

Sous l'action de la force $\vec{F}$, le fil s'allonge. Les points M et N qui délimitent une portion Δx du fil se déplacent de quantités différentes, $u(x)$ et $u(x + \Delta x)$ et viennent en M' et N'. La déformation S au point M est :

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}.$$

Soit un fil rectiligne extensible de longueur L dont une extrémité O est ancrée dans un support rigide et fixe (fig. 4. 1). Sous l'action d'une force de traction F, appliquée à l'extrémité libre, le fil s'allonge. La déformation persiste tant que la traction est maintenue. L'allongement relatif est $\frac{L' - L}{L}$ où L' est la longueur du fil déformé. Chaque partie du fil n'est pas nécessairement déformée de la même manière : il faut définir la déformation d'un petit élément, puis à la limite la déformation (*) du fil au voisinage d'un point.

Considérons la portion du fil située initialement entre les points M et N d'abscisses x et $x + \Delta x$. Lorsque la traction est exercée, ces points viennent en M' et N' d'abscisses respectives $x + u(x)$ et $x + u(x + \Delta x)$. L'allongement relatif de cet élément MN est :

$$\frac{\overline{M'N'} - \overline{MN}}{\overline{MN}} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Par définition, la déformation S du fil au voisinage du point M d'abscisse initiale x est la limite de ce rapport lorsque Δx tend vers zéro, c'est-à-dire la dérivée de u par rapport à x :

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}. \qquad (4.\ 1)$$

Il convient de remarquer que *la déformation est un rapport sans dimension* et qu'une origine des abscisses n'est nécessaire que pour repérer le point où elle est examinée.

Dans l'exemple du fil soumis à une traction, les points peuvent se déplacer de quantités différentes, mais dans la même direction si bien que la déformation se réduit à un allongement, abstraction faite de la diminution de diamètre. Dans le cas du solide de forme quelconque soumis à des forces extérieures, il n'y a aucune raison pour que deux points, aussi voisins soient-ils, se déplacent dans la même direction. Il apparaît des variations angulaires en plus des variations de longueur. La position d'un point matériel quelconque du milieu non déformé est définie, à partir d'une origine O, par le vecteur $\vec{x}$ dont les composantes x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées. Sous l'action des forces extérieures tous les points du solide se déplacent. Après déformation, le point choisi est repéré par le vecteur $\vec{x}'$, de composantes x'_i, tel que :

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{u}.$$

Le déplacement $\vec{u}$ est une fonction continue des coordonnées x_k. Deux points infiniment voisins M et N, primitivement séparés par le vecteur $d\vec{x} = \vec{x}_N - \vec{x}_M$, de composantes dx_i, s'écartent ou se rapprochent en même temps que l'orientation du segment MN varie (fig. 4. 2) car leurs déplacements $\vec{u}_M$ et $\vec{u}_N$ sont différents :

$$\vec{u}_N = \vec{u}_M + d\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} dx_i \qquad (4.\ 2)$$

(la sommation de 1 à 3 sur l'indice muet i est sous-entendue).

(*) En fait, la déformation ne consiste pas seulement en un allongement car le diamètre du fil diminue quand celui-ci s'étire. La variation relative du diamètre est proportionnelle à l'allongement relatif (voir exercice 4. 3).



Le carré de la distance entre les deux points, séparés après déformation par le vecteur :

$$d\vec{x}' = \vec{x}'_N - \vec{x}'_M = d\vec{x} + d\vec{u}$$

est :

$$(d\vec{x}')^2 = (d\vec{x})^2 + 2(d\vec{x}) \cdot (d\vec{u}) + (d\vec{u})^2.$$

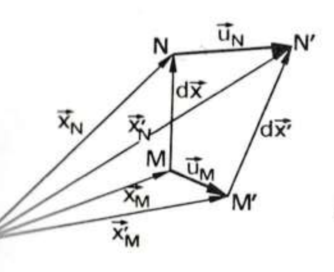


FIG. 4. 2. — *Déformation d'un solide.*
Deux points M et N voisins se déplacent de quantités différentes dans des directions distinctes.

En développant les produits scalaires :

$$(d\vec{x}')^2 - (d\vec{x})^2 = 2\, dx_i\, du_i + du_k\, du_k$$

et en remplaçant les composantes du_i, du_k par leurs expressions tirées de 4. 2 il vient :

$$(d\vec{x}')^2 - (d\vec{x})^2 = 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i\, dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_i\, dx_j. \quad (4.\ 3)$$

Comme la permutation des indices muets i et j ne change pas la valeur de la somme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i\, dx_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_j\, dx_i \quad (4.\ 4)$$

la relation 4. 3 s'écrit sous forme symétrique (*) :

$$(d\vec{x}')^2 - (d\vec{x})^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) dx_i\, dx_j$$

ou encore :

$$(d\vec{x}')^2 - (d\vec{x})^2 = 2S_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

en posant :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right). \quad (4.\ 5)$$

(*) La relation 4. 4 montre que le tenseur antisymétrique $R_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ n'intervient pas dans la variation de longueur. Il traduit une rotation du solide qui n'entraîne pas de déformation. Il est donc logique d'exprimer les déformations par un tenseur symétrique.

Les neuf quantités S_{ij} forment un tenseur de rang deux car la somme $2S_{ij}\, dx_i\, dx_j$, égale à la différence des carrés de la longueur du segment MN après et avant déformation, est un invariant; c'est le tenseur des déformations.

Dans la quasi-totalité des cas envisagés, les déformations sont petites, c'est-à-dire que la variation relative des distances dans le solide est faible :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1.$$

Avec cette condition, l'infiniment petit du second ordre $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ est négligeable par rapport au terme du premier ordre $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ de l'expression 4. 5. Les composantes du tenseur des déformations se réduisent à :

$$\boxed{S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \quad (4.\ 6)$$

Seules six des neuf composantes sont distinctes car le tenseur S_{ij} est symétrique

$$S_{ij} = S_{ji}.$$

La valeur des composantes dépend des coordonnées du point d'analyse M de la déformation. L'état d'un milieu déformé est décrit par un champ de tenseurs de rang deux symétriques.

En chaque point le tenseur S_{ij} est réductible à ses axes principaux ou directions propres. Celles-ci changent d'un point à un autre mais elles sont orthogonales entre elles car S_{ij} est symétrique (paragr. 3. 5). Dans ce système d'axes principaux $M\xi_1\xi_2\xi_3$, seules les composantes diagonales égales aux valeurs propres $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ ne sont pas nulles. La déformation se réduit donc à :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = S^{(1)} \qquad \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = S^{(2)} \qquad \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} = S^{(3)}$$

c'est-à-dire à trois *allongements* indépendants, suivant les trois axes principaux :

$$d\xi_i \to d\xi'_i = (1 + S^{(i)})\, d\xi_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Les axes principaux étant orthogonaux, l'élément de volume

$$dV = d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$

devient, après déformation :

$$dV' = d\xi'_1\, d\xi'_2\, d\xi'_3 = (1 + S^{(1)})(1 + S^{(2)})(1 + S^{(3)})\, dV$$

soit au premier ordre :

$$dV' = (1 + S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)})\, dV.$$

La dilatation $\Delta = \dfrac{dV' - dV}{dV}$ est ainsi égale à la somme des valeurs propres. Cette somme est égale (formule 3. 22) à la trace $S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33}$ du tenseur des déformations au point considéré :

$$\Delta = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} = S_{ii}. \qquad (4.\ 7)$$

Les termes S_{ij} $(i \neq j)$, qui font intervenir des déplacements du_j perpendiculaires à l'élément dx_i, correspondent à un mouvement de *cisaillement*. Supposons, par exemple, que la seule composante non diagonale soit S_{12}. Deux éléments infinitésimaux MN_1 et MN_2 initialement dirigés suivant les axes 1 et 2 ne restent pas perpendiculaires (fig. 4. 3). Pendant la déformation, les points se déplacent de $\vec{u}$ pour M, $\vec{u} + d\vec{u}^{(1)}$ pour N_1, $\vec{u} + d\vec{u}^{(2)}$ pour N_2, avec:

$$d\vec{u}^{(1)} \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \\ 0 \end{cases} \qquad d\vec{u}^{(2)} \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 \\ 0 \end{cases}$$

car $\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0$ $\quad(S_{13} = S_{23} = 0$ par hypothèse).

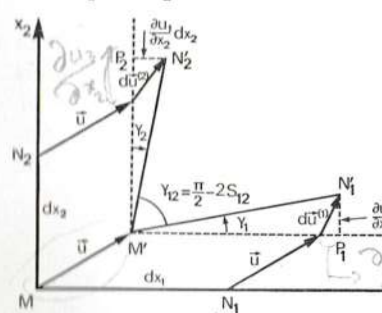


FIG. 4. 3. — *Signification physique de la composante de cisaillement S_{12}.* Deux éléments MN_1, MN_2, primitivement perpendiculaires se « rapprochent » pendant la déformation d'un angle égal à $2S_{12}$.

L'angle γ_{12} entre les deux segments après déformation vaut :

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \gamma_1 - \gamma_2$$

avec :

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\overline{P_1N'_1}}{\overline{M'P_1}} = \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1} = \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}$$

comme les déformations sont très petites : $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$

$$\operatorname{tg} \gamma_1 \simeq \gamma_1 \simeq \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \gamma_2 \simeq \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Par conséquent :

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2S_{12}. \qquad (4.\ 8)$$

La variation, due à la déformation de cisaillement S_{ij}, de l'angle entre deux éléments dx_i et dx_j initialement perpendiculaires est égale à $-2S_{ij}$.

4. 2. — CONTRAINTES

Des actions extérieures sont nécessaires pour déformer un solide. Des forces peuvent être exercées sur sa surface, par contact mécanique, ou en son cœur par un champ. Les effets du champ à l'intérieur du matériau se mesurent soit par une densité de force par unité de volume (champ de pesanteur) soit par un moment par unité de volume (champ électrique dans un cristal polaire). Dans le solide déformé apparaissent des tensions mécaniques appelées contraintes qui tendent à le ramener dans son état de repos et assurent l'équilibre de la matière. Ces contraintes se transmettent de proche en proche par les forces de liaison entre atomes dont le rayon d'action — quelques distances interatomiques — est très petit du point de vue macroscopique. Il s'ensuit que la matière entourant un volume quelconque agit sur celui-ci à travers la surface de séparation (*). Nous nous proposons de définir les contraintes en un point d'une surface perpendiculaire à un axe de référence, puis d'une surface d'orientation quelconque, ensuite nous établissons les conditions d'équilibre d'un solide en état de contrainte.

4. 2. 1. — Définition du tenseur des contraintes

Soit en repère orthonormé ΔF_i la composante sur l'axe i de la force $\Delta\vec{F}$ exercée sur l'élément de surface Δs_k perpendiculaire à l'axe k, par la matière située du côté des x_k croissants (fig. 4. 4). La contrainte T_{ik} est définie comme la limite, lorsque Δs_k tend vers zéro, du rapport $\Delta F_i/\Delta s_k$:

$$T_{ik} = \lim_{\Delta s_k \to 0} \left(\frac{\Delta F_i}{\Delta s_k}\right). \qquad (4.\ 9)$$

(*) Il est possible que la déformation donne lieu, dans certains matériaux (piézoélectriques), à des champs à rayon d'action supérieur à quelques intervalles interatomiques. L'analyse n'est alors plus rigoureuse. Toutefois les conclusions que nous en tirons s'appliquent, à notre connaissance, correctement à ces matériaux.

... composante de la force agissant sur l'unité de surface *perpendiculaire à l'axe k.*

D'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, cet élément de surface est soumis de la part de la matière située du côté des x_k décroissants à une force $\Delta\vec{F'} = -\Delta\vec{F}$.

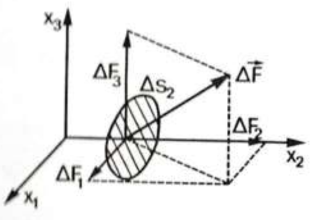


FIG. 4. 4. — *Élément de surface perpendiculaire à un axe de référence.* Sur un élément de surface Δs_2, de normale parallèle à l'axe 2, s'exercent trois contraintes : T_{12}, T_{22}, T_{32}. Par exemple

$$T_{12} = \lim_{\Delta s_2 \to 0} \left(\frac{\Delta F_1}{\Delta s_2}\right).$$

Pour expliciter l'expression de la force par unité de surface $\vec{T}(\vec{l})$ développée sur un élément ds d'orientation quelconque par la matière située du côté de sa normale unitaire $\vec{l}(l_1, l_2, l_3)$, il faut projeter cet élément de surface sur les trois plans de coordonnées. Le tétraèdre ainsi formé (fig. 4. 5) est soumis, de la part de la matière qui l'entoure et des forces extérieures de densité $\vec{f}^{\text{ext}}$, à une résultante :

$$d\vec{F'} = \vec{T}(\vec{l})\, ds + d\vec{F}'^{(1)} + d\vec{F}'^{(2)} + d\vec{F}'^{(3)} + \vec{f}^{\text{ext}}\, dv \qquad (4.\ 10)$$

où $d\vec{F}'^{(k)}$ est la force exercée sur le triangle, d'aire ds_k, perpendiculaire à l'axe k.

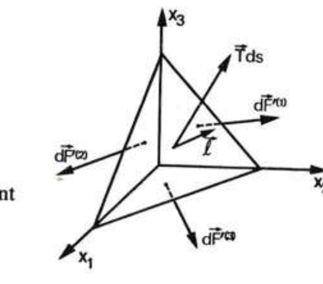


FIG. 4. 5. — *Élément de surface d'orientation quelconque*
La tension mécanique $\vec{T}$ dépend de l'orientation $\vec{l}$ de l'élément de surface ds :

$$T_i(\vec{l}) = T_{ik} l_k.$$

En projetant sur l'axe i et en tenant compte de la définition des composantes T_{ik} :

$$dF_i'^{(k)} = -\, dF_i^{(k)} = -\, T_{ik}\, ds_{(k)}$$

les parenthèses indiquant qu'il n'y a pas de sommation sur l'indice k, l'équation 4. 10 s'écrit :

$$dF_i' = T_i(\vec{l})\, ds - (T_{i1}\, ds_1 + T_{i2}\, ds_2 + T_{i3}\, ds_3) + f_i^{\text{ext}}\, dv.$$

Comme d$s_k = l_k$ ds, la résultante des forces agissant sur le tétraèdre se met sous une forme :

$$dF_i' = [T_i(\vec{l}) - T_{ik} l_k]\, ds + f_i^{\text{ext}}\, dv$$

qui conduit à une densité de force par unité de volume dF_i'/dv infinie car dv est un infiniment petit d'ordre supérieur à ds, sauf si :

$$\boxed{T_i(\vec{l}) = T_{ik} l_k.} \qquad (4.\ 11)$$

Cette relation, avec sommation sur l'indice muet k, fournit la tension mécanique $\vec{T}(\vec{l})$ sur une surface d'orientation quelconque $\vec{l}$. Les neufs grandeurs T_{ik} qui définissent l'état de contrainte du milieu déformé forment un tenseur de rang deux, appelé tenseur des contraintes, car $T_i(\vec{l})$ et l_k sont les composantes de deux vecteurs $\vec{T}(\vec{l})$ et $\vec{l}$.

4. 2. 2. — Conditions d'équilibre

Dans un corps en équilibre mécanique statique, la résultante et le moment des forces agissant sur un volume quelconque — au repos par hypothèse — sont nuls. Supposons l'état de contrainte provoqué par des forces appliquées sur la surface du corps.

En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la résultante des forces d'interaction entre les différentes parties d'un volume v quelconque intérieur au solide est nulle. La force $\vec{F}$ agissant sur ce volume est donc la somme des forces exercées par la matière l'entourant. Comme celles-ci sont appliquées sur la surface de séparation s, la résultante $\vec{F}$ est l'intégrale de la tension mécanique $\vec{T}(\vec{l})$ sur la surface s :

$$\vec{F} = \int_s \vec{T}(\vec{l})\, ds$$

soit pour chaque composante F_i, en remplaçant $T_i(\vec{l})$ par son expression 4. 11 en fonction des contraintes T_{ik} :

$$F_i = \int_s T_{ik} l_k\, ds.$$

Cette intégrale de surface se transforme en intégrale de volume à l'aide du théorème de Green généralisé (formule 3. 26)

$$F_i = \int_v \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\, dv.$$

L'intégrant apparaît comme la densité de force f_i par unité de volume du corps déformé :

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \qquad (4.\ 12)$$

Lorsque le solide n'est soumis qu'à des efforts exercés sur la surface ondition d'équilibre statique $F_i = 0$ impose $f_i = 0$, soit :

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \qquad (4.\ 13)$$

S'il faut tenir compte d'une densité massique de forces extérieures due exemple au champ de pesanteur $\vec{g}$, l'équation d'équilibre devient :

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \qquad (4.\ 14)$$

ρ est la masse volumique du corps.

Le moment de la tension $\vec{T}$ par rapport à l'origine, représenté par le duit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{T}$, est en analyse tensorielle un tenseur de rang deux isymétrique $T_j x_i - T_i x_j$. Étant donné le principe de l'action et de la ction, le volume v est soumis à un moment dont les composantes se culent par intégration sur sa surface s :

$$M_{ij} = \int_s (T_j x_i - T_i x_j)\, ds.$$

ntégrale de surface :

$$M_{ij} = \int_s (T_{jk} x_i - T_{ik} x_j) l_k\, ds$$

tenue en remplaçant T_i par $T_{ik} l_k$ et T_j par $T_{jk} l_k$ se transforme en intéale de volume :

$$M_{ij} = \int_v \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{jk} x_i - T_{ik} x_j)\, dv.$$

développement de cette équation

$$M_{ij} = \int_v \left[\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} x_i - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} x_j + T_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} - T_{ik} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right] dv$$

simplifie, compte tenu de la condition d'équilibre 4. 13 et de l'indépendance s coordonnées x_i :

$$M_{ij} = \int_v (T_{jk} \delta_{ik} - T_{ik} \delta_{jk})\, dv$$

u encore :

$$M_{ij} = \int_v (T_{ji} - T_{ij})\, dv. \qquad (4.\ 15)$$

e volume v étant arbitraire, l'annulation des trois composantes du moment nplique :

$$T_{ij} = T_{ji} \qquad \forall\, i \text{ et } j. \qquad (4.\ 16)$$

des composantes indépendantes à six :

T_{11}, T_{22}, T_{33} : contraintes normales aux faces,

T_{12}, T_{23}, T_{13} : contraintes tangentielles.

Si le matériau est soumis à un couple $\vec{G}$ par unité de volume, le moment sur le volume v est

$$M_{ij} + \int_v G_k\, dv$$

où l'indice k est tel que la permutation (ijk) soit paire. La condition d'équilibre des moments exige :

$$T_{ji} - T_{ij} + G_k = 0.$$

Le tenseur des contraintes T_{ij} n'est plus symétrique. Ce cas se rencontre en pratique quand des cristaux polaires sont placés dans un champ électrique (par exemple entre deux électrodes pour constituer un transducteur). Nous admettons néanmoins par hypothèse que, ce couple restant faible, la symétrie du tenseur T_{ij} subsiste.

Les forces extérieures appliquées sur la surface du solide déterminent la tension mécanique en chaque point de cette surface. Si nous orientons la normale $\vec{l}$ vers l'extérieur, la densité des forces appliquées $\vec{p}$ sur la surface du corps est égale à la tension mécanique $\vec{T}(\vec{l})$ (rappelons que celle-ci a été définie comme la force exercée sur l'unité de surface par la matière située du côté de la normale). La condition limite à satisfaire en chaque point de la surface du corps déformé est :

$$p_i = T_i(\vec{l}) = T_{ik} l_k. \qquad (4.\ 17)$$

4. 3. — RELATION ENTRE CONTRAINTES ET DÉFORMATIONS. CONSTANTES ÉLASTIQUES

Par définition, un corps est élastique s'il retrouve son état initial lorsque les forces extérieures sont supprimées. Ce retour à l'état de départ est l'œuvre des contraintes internes. Les contraintes et les déformations s'annulent simultanément au repos. Dans un corps élastique (non piézoélectrique), il existe une relation biunivoque entre contraintes et déformations. L'expérience montre que le comportement élastique de la plupart des substances est décrit correctement, dans l'hypothèse des petites déformations, par le terme du premier ordre du développement de Taylor de la relation :

$$T_{ij}(S_{kl}) = T_{ij}(0) + \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}}\right)_{S_{kl}=0} S_{kl} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial S_{kl} \partial S_{mn}}\right)_{\substack{S_{kl}=0 \\ S_{mn}=0}} S_{kl} S_{mn} + \cdots$$

t comme $T_{ij}(0) = 0$

$$\boxed{T_{ij} = c_{ijkl}S_{kl}} \tag{4. 18}$$

posant

$$c_{ijkl} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}}\right)_{S_{kl}=0} \tag{4. 19}$$

Les coefficients c_{ijkl} qui traduisent la relation linéaire la plus générale re les tenseurs de rang deux S_{kl} et T_{ij} sont les composantes d'un tenseur rang quatre appelé *tenseur des rigidités élastiques*. La loi de propor-nnalité entre contraintes et déformations a été énoncée pour la première s au XVII[e] siècle par Hooke dans le cas simple de l'allongement d'un fil.

Un tenseur de rang quatre possède $3^4 = 81$ composantes. Les ten-rs T_{ij} et S_{kl} étant symétriques, les constantes élastiques définies par la ation 4. 19 ne changent pas lors d'une permutation des deux premiers des deux derniers indices :

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \qquad \text{et} \qquad c_{ijkl} = c_{ijlk}. \tag{4. 20}$$

loi de Hooke 4. 18 s'écrit en fonction des déplacements :

$$T_{ij} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}.$$

omme $c_{ijkl} = c_{ijlk}$, les deux sommes sont égales :

$$\boxed{T_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}} \tag{4. 21}$$

Ces relations de symétrie ramènent de 81 à 36 le nombre de constantes astiques indépendantes. En effet, un couple non ordonné d'indices (i, j) prend que six valeurs distinctes numérotées de 1 à 6 de la manière iivante :

$$\begin{array}{lll} (11) \leftrightarrow 1 & (22) \leftrightarrow 2 & (33) \leftrightarrow 3 \\ (23) = (32) \leftrightarrow 4 & (31) = (13) \leftrightarrow 5 & (12) = (21) \leftrightarrow 6. \end{array} \tag{4. 22}$$

es modules élastiques indépendants, repérés par seulement deux indices α β variant de 1 à 6, se rangent dans un tableau carré 6×6 à 36 cases :

$$c_{\alpha\beta} = c_{ijkl}$$

vec $\alpha \leftrightarrow (ij)$ et $\beta \leftrightarrow (kl)$ conformément à 4. 22. Exemples :

$$c_{14} = c_{1123} = c_{1132}$$

$$c_{56} = c_{1312} = c_{1321} = c_{3121} = c_{3112}.$$

Cette notation, dite matricielle, peut être étendue aux contraintes et aux déformations afin d'écrire la loi de Hooke sous la forme :

$$T_\alpha = c_{\alpha\beta}S_\beta \qquad \alpha, \beta = 1, 2, ..., 6. \tag{4. 23}$$

Mais, si nous adoptons pour les contraintes la convention :

$$T_\alpha = T_{ij} \text{ avec } \alpha \leftrightarrow (ij) \text{ conformément à 4. 22} \tag{4. 24}$$

il faut poser :

$$S_1 = S_{11} \quad S_2 = S_{22} \quad S_3 = S_{33} \quad S_4 = 2S_{23} \quad S_5 = 2S_{13} \quad S_6 = 2S_{12} \tag{4. 25}$$

pour que la relation 4. 23 exprime effectivement la loi de Hooke. Par exemple, le développement de T_{11} d'après 4. 18 :

$$T_{11} = c_{11kl}S_{kl}$$

ou

$$T_{11} = c_{1111}S_{11} + c_{1122}S_{22} + c_{1133}S_{33} + 2c_{1123}S_{23} + 2c_{1113}S_{13} + 2c_{1112}S_{12}$$

s'identifie à celui de T_1 d'après 4. 23 :

$$T_1 = c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + c_{13}S_3 + c_{14}S_4 + c_{15}S_5 + c_{16}S_6$$

si les relations 4. 25 sont satisfaites.

Il est possible d'inverser la loi de Hooke afin d'exprimer les déformations en fonction des contraintes :

$$S_{ij} = s_{ijkl}T_{kl}. \tag{4. 26}$$

Les constantes de flexibilité s_{ijkl} forment un tenseur de rang quatre qui possède les mêmes propriétés de symétrie que le tenseur c_{ijkl} :

$$s_{ijkl} = s_{jikl} \qquad \text{et} \qquad s_{ijkl} = s_{ijlk}.$$

De même, la résolution du système d'équations 4. 23 en fonction des S_α conduit à la solution :

$$S_\alpha = s_{\alpha\beta}T_\beta \tag{4. 27}$$

où la matrice $s_{\alpha\beta}$ est l'inverse de la matrice $c_{\alpha\beta}$:

$$s_{\alpha\beta} = (c_{\alpha\beta})^{-1}$$

c'est-à-dire :

$$s_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}$$

$\delta_{\alpha\gamma}$ étant le symbole de Kronecker à six dimensions.

Pour relier les $s_{\alpha\beta}$ aux s_{ijkl}, développons par exemple S_{13} suivant 4. 26 :

$$S_{13} = s_{1311}T_{11} + s_{1322}T_{22} + s_{1333}T_{33} + 2s_{1323}T_{23} + 2s_{1313}T_{13} + 2s_{1312}T_{12}.$$

D'après la règle de correspondance 4. 24, il vient en comparant $S_5 = 2S_{13}$ développé suivant 4. 27 :

$$s_{51} = 2s_{1311} \qquad s_{52} = 2s_{1322} \qquad s_{53} = 2s_{1333}$$

$$s_{54} = 4s_{1323} \qquad s_{55} = 4s_{1313} \qquad s_{56} = 4s_{1312}.$$

D'une manière générale, si p est le nombre d'indices supérieurs à 3 dans le couple (α, β) :

$$s_{\alpha\beta} = 2^p s_{ijkl}. \qquad (4.\ 28)$$

Les considérations thermodynamiques qui suivent réduisent encore le nombre de constantes élastiques indépendantes.

4. 4. — ÉNERGIE ÉLASTIQUE D'UN CORPS DÉFORMÉ. RELATIONS DE MAXWELL

Le travail effectué par les forces extérieures pendant la déformation est emmagasiné dans le corps sous forme d'énergie potentielle élastique puisque, dès que les forces extérieures sont supprimées, cette énergie est restituée par les tensions internes qui redonnent au solide son état primitif. Au cours de la déformation, le travail des forces extérieures pour une variation $d\vec{u}$ du déplacement $\vec{u}$ se compose du travail des forces par unité de masse $\vec{g}$ et de celui des forces extérieures $\vec{p}$ agissant sur la surface du corps :

$$\delta W = \int_v \rho\vec{g} \,.\, d\vec{u}\, dv + \int_s \vec{p} \,.\, d\vec{u}\, ds$$

ou :

$$\delta W = \int_v \rho g_i \, du_i \, dv + \int_s p_i \, du_i \, ds.$$

Supposons l'état d'équilibre correspondant aux forces appliquées atteint à chaque instant; la transformation est alors thermodynamiquement réversible et les conditions d'équilibre 4. 14 et 4. 17 s'appliquent. Ainsi, en remplaçant p_i par $T_{ik}l_k$:

$$\delta W = \int_v \rho g_i \, du_i \, dv + \int_s T_{ik} \, du_i l_k \, ds$$

Le deuxième terme se transforme en intégrale de volume :

$$\delta W = \int_v \rho g_i \, du_i \, dv + \int_v \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ik} \, du_i) \, dv.$$

En développant et en regroupant les facteurs :

$$\delta W = \int_v \left(\rho g_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\right) du_i \, dv + \int_v T_{ik} \, d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) dv \qquad (4.\ 29)$$

il apparaît la quantité $\rho g_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ qui est nulle à chaque instant en vertu de la condition d'équilibre 4. 14. Le travail des forces extérieures pour cette transformation élémentaire se réduit donc à :

$$\delta W = \int_v T_{ik} \, d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) dv = \int_v T_{ki} \, d\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dv$$

ou bien puisque $T_{ik} = T_{ki}$:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_v T_{ik} \, d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dv = \int_v T_{ik} \, dS_{ik} \, dv.$$

Par unité de volume, le travail $\delta\mathscr{W}$ des forces extérieures lors d'une variation des déformations dS_{ik} est égal à :

$$\boxed{\delta\mathscr{W} = T_{ik} \, dS_{ik}}\,.$$

Convenons de désigner par une lettre majuscule les grandeurs thermodynamiques qui se rapportent à l'unité de volume du corps. Ainsi la variation de l'énergie interne $\mathscr{U}$ par unité de volume est :

$$d\mathscr{U} = \delta\mathscr{W} + \delta\mathscr{Q} \qquad (4.\ 30)$$

$\delta\mathscr{Q}$ étant la quantité de chaleur reçue par unité de volume. D'après le premier principe de la thermodynamique $\mathscr{U}$ est une fonction d'état du corps et $d\mathscr{U}$ une différentielle exacte; ce n'est pas le cas séparément de $\delta\mathscr{W}$ et $\delta\mathscr{Q}$. Le second principe de la thermodynamique fournit pour une transformation réversible :

$$\delta\mathscr{Q} = \theta \, d\sigma$$

où θ est la température absolue et σ l'entropie par unité de volume du corps.

L'expression 4. 30 qui s'écrit :

$$d\mathscr{U} = \theta \, d\sigma + T_{ik} \, dS_{ik} \qquad (4.\ 31)$$

montre que l'énergie interne d'un corps déformé est fonction de l'entropie et des déformations : $\mathscr{U} = \mathscr{U}(\sigma, S_{ik})$. Il s'ensuit que :

$$T_{ik} = \left(\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial S_{ik}}\right)_\sigma$$

l'indice σ précise qu'il s'agit d'une dérivée partielle à entropie constante.

En reportant les expressions analogues de T_{ij} et T_{kl} dans la relation 4. 19 définissant les constantes élastiques :

$$c_{ijkl} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}}\right) \qquad \text{et} \qquad c_{klij} = \left(\frac{\partial T_{kl}}{\partial S_{ij}}\right)$$

il vient :

$$c_{ijkl}^{(\sigma)} = \left(\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial S_{ij}\partial S_{kl}}\right)_\sigma = c_{klij}^{(\sigma)}. \qquad (4.\ 32)$$

La permutation des deux premiers indices avec les deux derniers ne change pas la valeur des modules élastiques isentropiques ($\sigma = C^{te}$). Ce sont

...es modules qui interviennent dans la propagation des ondes élastiques où la vibration est trop rapide pour que l'échange de chaleur avec l'extérieur puisse s'établir : $\delta\mathcal{Q} = 0 \Rightarrow d\sigma = 0$ si la transformation est réversible. La relation de symétrie 4. 32 — dite relation de Maxwell — est valable dans d'autres conditions thermodynamiques. Il suffit de considérer la bonne fonction d'état, par exemple pour les transformations isothermes ($\theta = C^{te}$), l'énergie libre définie par $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \theta\sigma$. En effet, en tenant compte de 4. 31 :

$$d\mathcal{F} = -\sigma\, d\theta + T_{ik}\, dS_{ik}. \tag{4. 33}$$

L'énergie libre dépend de la température θ et des déformations S_{ik} :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\theta, S_{ik})$$

Il s'ensuit que :

$$T_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_{ik}}\right)_\theta$$

et pour les constantes élastiques isothermes :

$$c_{ijkl}^{(\theta)} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial S_{ij}\partial S_{kl}}\right)_\theta = c_{klij}^{(\theta)}.$$

Dans le domaine de validité de la loi de Hooke, la variation d'énergie interne donnée par l'expression 4. 31 :

$$d\mathcal{U} = \theta\, d\sigma + c_{ijkl}^{(\sigma)} S_{kl}\, dS_{ij}$$

s'écrit en permutant les couples d'indices muets (ij) et (kl) :

$$d\mathcal{U} = \theta\, d\sigma + \frac{1}{2}\left(c_{ijkl}^{(\sigma)} S_{kl}\, dS_{ij} + c_{klij}^{(\sigma)} S_{ij}\, dS_{kl}\right)$$

et en tenant compte de la relation de Maxwell 4. 32 :

$$d\mathcal{U} = \theta\, d\sigma + \frac{1}{2} c_{ijkl}^{(\sigma)}\, d(S_{ij}S_{kl}).$$

Après intégration, l'énergie interne du corps déformé s'exprime par :

$$\mathcal{U}(\sigma, S_{ik}) = \mathcal{U}_0(\sigma) + \frac{1}{2} c_{ijkl}^{(\sigma)} S_{ij} S_{kl},$$

$\mathcal{U}_0(\sigma)$ est l'énergie interne du corps non déformé : $\mathcal{U}_0(\sigma) = \mathcal{U}(\sigma, S_{ik} = 0)$. L'énergie libre par unité de volume s'obtient de la même manière, à partir de l'équation 4. 33 :

$$\mathcal{F}(\theta, S_{ik}) = \mathcal{F}_0(\theta) + \frac{1}{2} c_{ijkl}^{(\theta)} S_{ij} S_{kl}.$$

Ainsi, l'énergie interne ou l'énergie libre d'origine mécanique que nous appelons, sans préciser les conditions thermodynamiques, l'énergie potentielle élastique Φ (par unité de volume), est une forme quadratique des déformations :

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}}. \tag{4. 34}$$

Suivant que le processus de déformation est adiabatique ou isotherme, cette quantité représente l'accroissement de l'énergie interne ou de l'énergie libre par unité de volume.

4. 5. — RESTRICTIONS IMPOSÉES PAR LA SYMÉTRIE DES CRISTAUX AU NOMBRE DE MODULES ÉLASTIQUES INDÉPENDANTS

La relation de Maxwell 4. 32, qui résulte de considérations thermodynamiques est vraie dans tout milieu. Elle s'écrit en notation matricielle :

$$c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}.$$

Le tableau 6 × 6 des coefficients $c_{\alpha\beta}$ est donc symétrique par rapport à la diagonale principale

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{vmatrix} \quad \textit{triclinique.} \tag{4. 35}$$

Cette propriété réduit à 21 le nombre des composantes indépendantes $(6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$. Les cristaux du système triclinique, qui sont les plus riches de ce point de vue puisqu'un centre de symétrie n'apporte aucune restriction, possèdent effectivement 21 constantes élastiques indépendantes. Fort heureusement, la symétrie ponctuelle des autres systèmes cristallins intervient et réduit le nombre des modules élastiques indépendants. Montrons d'abord, en passant à l'autre cas extrême, que les propriétés mécaniques d'un solide isotrope, qui possède le plus haut degré de symétrie, sont entièrement décrites par deux coefficients.

4. 5. 1. — Solide isotrope

Les constantes physiques d'un matériau isotrope sont, par définition, indépendantes du choix des axes de référence (supposés orthonormés). En

particulier le tenseur élastique c_{ijkl} doit être invariant dans tous les changements d'axes orthonormés (rotation, symétrie par rapport à un point ou un plan). Or seul un scalaire ou le tenseur unité δ_{ij} est insensible à ces transformations orthogonales. En conséquence, chaque composante c_{ijkl} doit s'exprimer en fonction des composantes du tenseur unité. Comme, en raison de la symétrie $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, il n'y a que trois combinaisons distinctes contenant les quatre indices $ijkl$:

$$\delta_{ij}\delta_{kl},\ \delta_{ik}\delta_{jl},\ \delta_{il}\delta_{jk}$$

le tenseur c_{ijkl} se présente sous la forme :

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_1\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu_2\delta_{il}\delta_{jk}$$

où λ, μ_1, μ_2 sont des constantes. De plus, la condition $c_{ijkl} = c_{jikl}$ exige $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Les autres relations de symétrie sont satisfaites si bien que :

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{4. 36}$$

Ainsi les propriétés mécaniques d'un milieu isotrope sont définies par deux constantes indépendantes, les coefficients de Lamé λ et μ par exemple.

En donnant aux couples (ij), (kl) les valeurs de 1 à 6, il vient :

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu \\ c_{12} &= c_{23} = c_{13} = \lambda \\ c_{44} &= c_{55} = c_{66} = \mu = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{aligned} \tag{4. 37}$$

les douze autres modules c_{ijkl} sont nuls car ils ont un nombre impair d'indices $ijkl$ distincts (ex : $c_{25} = c_{2213}$). En exprimant toutes les composantes en fonction de c_{11} et c_{12}, la matrice $c_{\alpha\beta}$ prend l'aspect suivant :

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{vmatrix} \quad \textit{isotrope.} \tag{4. 38}$$

Dans un milieu isotrope, la loi de Hooke se réduit aux deux équations de Lamé :

— pour les contraintes normales (T_{11}, T_{22}, T_{33}) :

$$T_{ii} = c_{iikl}S_{kl} = (\lambda\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{il})S_{kl}$$

soit :

$$T_{ii} = \lambda(S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2\mu S_{ii}; \tag{4. 39}$$

— pour les contraintes tangentielles (T_{ij} avec $i \neq j$) :

$$T_{ij} = c_{ijkl}S_{kl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})S_{kl}$$

soit :

$$T_{ij} = 2\mu S_{ij}. \tag{4. 40}$$

Les équations 4. 39 et 4. 40 peuvent se grouper en une seule :

$$T_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \tag{4. 41}$$

où $\Delta = S_{11} + S_{22} + S_{33}$ est la dilatation $\Delta v/v$.

La relation 4. 40 montre que $\mu = \dfrac{T_{ij}}{2S_{ij}}$ est le coefficient de proportionnalité entre la contrainte de cisaillement T_{ij} et la variation de l'angle entre les deux directions i et j initialement perpendiculaires (fig. 4. 3).

4. 5. 2. — *Cristaux*

Les axes étant orthonormés, la condition générale d'invariance 3. 11 s'écrit pour le tenseur des rigidités :

$$c_{ijkl} = \alpha_i^p\alpha_j^q\alpha_k^r\alpha_l^s c_{pqrs}. \tag{4. 42}$$

Comme il a déjà été dit, les cristaux du système *triclinique* ont *21constantes élastiques* qui se rangent dans le tableau 4. 35.

En orientant l'axe Ox_3 parallèlement à l'axe binaire direct ou inverse (miroir) des cristaux du système *monoclinique*, la matrice α de changement de repère est diagonale :

$$\alpha = \pm\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La relation 4. 42 qui devient :

$$c_{ijkl} = \alpha_i^i\alpha_j^j\alpha_k^k\alpha_l^l c_{ijkl}$$

implique la nullité des constantes ayant un nombre impair d'indices 3 pour lesquelles $\alpha_i^i\alpha_j^j\alpha_k^k\alpha_l^l = -1$. Le tableau 4. 43 contient *13 constantes indépendantes*, celles dont le groupement d'indices comprend 0, 2 ou 4 fois l'indice 3 :

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix} \quad \textit{monoclinique.} \tag{4. 43}$$

Les cristaux du système *orthorhombique* sont caractérisés par la présence de trois axes binaires directs ou inverses orthogonaux que nous choisissons comme trièdre de référence. Le raisonnement précédent, appliqué à chacun des axes, *i.e.* à chaque indice, conduit au tableau 4. 44 où ne subsistent que les composantes munies d'indices se répétant un nombre pair de fois. Il existe ainsi *9 constantes* indépendantes :

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix} \quad \textit{orthorhombique.} \quad (4.\ 44)$$

Les cristaux du système *cubique* comportent au moins quatre axes A_3 et trois axes binaires directs que nous prenons comme axes de référence. Les termes non nuls sont les mêmes que ci-dessus (système orthorhombique). La rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe ternaire dirigé suivant [111] transforme Ox_1 en Ox_2, Ox_2 en Ox_3, Ox_3 en Ox_1. Les c_{ijkl} doivent donc être invariants dans une permutation circulaire des indices :

$$(123) \rightarrow (231) \rightarrow (312).$$

Ceci entraîne les relations :

$$c_{1111} = c_{2222} \qquad c_{2222} = c_{3333}$$

et

$$c_{1122} = c_{2233} = c_{3311} \qquad c_{1212} = c_{2323} = c_{3131}$$

qui réduisent à *trois* (c_{11}, c_{12}, c_{44}) le nombre de modules élastiques indépendants des cristaux appartenant au système cubique. Le tableau 4. 44 devient :

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix} \quad \textit{cubique} \quad (4.\ 45)$$

Cristaux possédant un axe principal A_n ($n > 2$). — Les cristaux des systèmes trigonal, tétragonal, hexagonal possèdent un seul axe direct ou inverse d'ordre n supérieur à 2. La matrice de rotation α autour de cet axe principal, porté par Ox_3, n'est plus diagonale :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi}{n} \neq \pi. \qquad (4.\ 46)$$

La relation d'invariance 4. 42 est dans ce cas difficile à exploiter car elle met en jeu beaucoup de composantes. Pour se ramener à une matrice de changement d'axes diagonale, il suffit de se placer dans la base des vecteurs propres $\vec{\xi}^{(1)}, \vec{\xi}^{(2)}, \vec{\xi}^{(3)}$ de la rotation. Il faut pour cela diagonaliser la matrice α c'est-à-dire résoudre le système d'équations analogue à 3. 19 :

$$(\alpha_i^k - \lambda\delta_{ik})\xi_k = 0. \qquad (4.\ 47)$$

Les valeurs propres λ sont déterminées par la condition de compatibilité analogue à 3. 20 :

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant :

$$[(\lambda - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi](1 - \lambda) = 0$$

fournit

$$\lambda^{(1)} = e^{i\varphi} \qquad \lambda^{(2)} = e^{-i\varphi} \qquad \lambda^{(3)} = 1. \qquad (4.\ 48)$$

A chacune de ces valeurs correspond un vecteur propre $\vec{\xi}^{(i)}$ dont les composantes s'obtiennent en résolvant le système 4. 47 :

— pour $\lambda^{(1)}$

$$\begin{cases} \xi_1(-i\sin\varphi) + \xi_2\sin\varphi = 0 \\ (1 - e^{i\varphi})\xi_3 = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\xi_2 = i\xi_1, \qquad \xi_3 = 0;$$

— pour $\lambda^{(2)}$: $\quad \xi_1 = i\xi_2, \quad \xi_3 = 0,$

— pour $\lambda^{(3)}$: $\quad \xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \xi_3$ quelconque.

Les composantes étant complexes pour normer ces vecteurs il faut utiliser le produit hermitique $\xi_i\xi_i^*$, ce qui conduit à :

$$\vec{\xi}^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \vec{\xi}^{(2)}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \vec{\xi}^{(3)}(0, 0, 1). \qquad (4.\ 49)$$

appelant γ_{ijkl} les modules élastiques dans la base orthonormée $\vec{\xi}^{(1)}\ \vec{\xi}^{(2)}\ \vec{\xi}^{(3)}$, la relation d'invariance 4. 42 s'écrit :

$$\gamma_{ijkl} = \lambda^{(i)}\lambda^{(j)}\lambda^{(k)}\lambda^{(l)}\gamma_{ijkl}$$

puisque la matrice de changement d'axes est diagonale dans cette base. Si ν_1 et ν_2 sont les nombres d'indices 1 et 2 de la permutation $ijkl$ il vient compte tenu des relations 4. 48 :

$$\lambda^{(i)}\lambda^{(j)}\lambda^{(k)}\lambda^{(l)} = e^{i(\nu_1 - \nu_2)\frac{2\pi}{n}}.$$

Par conséquent γ_{ijkl} n'est pas nul lorsque $\nu_1 - \nu_2$ est un multiple de l'ordre n de l'axe, car le produit $\lambda^{(i)}\lambda^{(j)}\lambda^{(k)}\lambda^{(l)}$ est alors égal à 1. C'est toujours le cas des cinq modules :

$$\gamma_{1122},\ \gamma_{1212},\ \gamma_{3312},\ \gamma_{2313},\ \gamma_{3333}$$

pour lesquels $\nu_1 = \nu_2$. Il n'y en a pas d'autres pour les cristaux du système *hexagonal* ($n = 6$) qui possèdent donc *cinq* modules élastiques indépendants. Par contre les cristaux du système *trigonal* comptent *sept* constantes élastiques indépendantes car γ_{1113} et γ_{2223} ne sont pas nuls ($\nu_1 - \nu_2 = \pm 3$). Il en est de même pour les cristaux du système *tétragonal* ($n = 4$) pour lesquels γ_{1111} et γ_{2222} sont différents de zéro ($\nu_1 - \nu_2 = \pm 4$).

Le retour aux constantes c_{ijkl} se fait par la relation de changement d'axes :

$$c_{ijkl} = a_i^p a_j^q a_k^r a_l^s \gamma_{pqrs} \tag{4. 50}$$

où la matrice de passage (a) du système $Ox_1x_2x_3$ (constantes c_{ijkl}) à la base $\vec{\xi}^{(1)}, \vec{\xi}^{(2)}, \vec{\xi}^{(3)}$ (constantes γ_{ijkl}) a pour i-ième ligne les composantes (4. 49) du vecteur propre $\vec{\xi}^{(i)}$ dans le repère $Ox_1x_2x_3$:

$$a = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4. 51}$$

Le nombre réduit de constantes γ_{pqrs} simplifie le développement de l'expression 4. 50. De plus $a_3^3 = 1$ étant le seul coefficient à indice 3 non nul, il ne figure dans ce développement que les constantes γ_{pqrs} ayant la même répartition d'indice 3 que le module c_{ijkl}.

Commençons par le système *trigonal* où γ_{3333}, γ_{3312}, γ_{2313}, γ_{1113}, γ_{2223}, γ_{1122}, γ_{1212} sont différents de zéro. Par ordre de nombre d'indices 3 décroissant :

— $c_{3333} = \gamma_{3333}$ par conséquent $c_{33} \neq 0$;

— c_{3313} et c_{3323} sont nuls car $\gamma_{3313} = \gamma_{3323} = 0$, soit $c_{35} = c_{34} = 0$;

— les modules à deux indices 3 (c_{ij33} et c_{i3k3}) s'expriment en fonction de $\gamma_{1233} = \gamma_{2133}$ et $\gamma_{1323} = \gamma_{2313}$

$$c_{ij33} = (a_i^1 a_j^2 + a_i^2 a_j^1)\gamma_{1233};$$

comme $a_1^1 a_1^2 + a_1^2 a_1^1 = a_2^1 a_2^2 + a_2^2 a_2^1$:

$$c_{1133} = c_{2233} \quad \text{soit} \quad c_{13} = c_{23}$$

et comme $a_1^1 a_2^2 + a_1^2 a_2^1 = 0$:

$$c_{1233} = 0 \quad \text{soit} \quad c_{36} = 0.$$

De même le développement :

$$c_{i3k3} = (a_i^1 a_k^2 + a_i^2 a_k^1)\gamma_{1323}$$

conduit à :

$$c_{1313} = c_{2323} \quad \text{soit} \quad c_{55} = c_{44}$$

et :

$$c_{2313} = 0 \quad \text{soit} \quad c_{45} = 0;$$

— pour les modules à un seul indice 3, la relation 4. 50 s'écrit :

$$c_{ijk3} = a_i^1 a_j^1 a_k^1 \gamma_{1113} + a_i^2 a_j^2 a_k^2 \gamma_{2223}$$

d'où :

$$c_{22k3} = -\frac{1}{2} a_k^1 \gamma_{1113} + \frac{1}{2} a_k^2 \gamma_{2223} = -c_{11k3}$$

et

$$c_{i223} = -\frac{1}{2} a_i^1 \gamma_{1113} + \frac{1}{2} a_i^2 \gamma_{2223} = -c_{i113}$$

soit en notation matricielle :

$$k = 2 \Rightarrow c_{24} = -c_{14}, \qquad k = 1 \Rightarrow c_{25} = -c_{15}$$
$$i = 1 \Rightarrow c_{46} = -c_{15}, \qquad i = 2 \Rightarrow c_{24} = -c_{56}$$

ou encore :

$$c_{14} = -c_{24} = c_{56} \quad \text{et} \quad c_{25} = -c_{15} = c_{46};$$

— les modules sans indice 3, c_{1111}, c_{2222}, c_{1112}, c_{2221}, c_{1122}, c_{1212} s'expriment en fonction de γ_{1122} et γ_{1212}

$$c_{ijkl} = (a_i^1 a_j^1 a_k^2 a_l^2 + a_i^2 a_j^2 a_k^1 a_l^1)\gamma_{1122} + (a_i^1 a_j^2 + a_i^2 a_j^1)(a_k^1 a_l^2 + a_k^2 a_l^1)\gamma_{1212} \tag{4. 52}$$

d'où :

$$c_{iiii} = 2(a_i^1 a_i^2)^2(\gamma_{1122} + 2\gamma_{1212}) = -\frac{1}{2}(\gamma_{1122} + 2\gamma_{1212})$$

soit :

$$c_{11} = c_{22} = -\frac{1}{2}(\gamma_{1122} + 2\gamma_{1212}). \tag{4. 53}$$

Examinons le module c_{1112} :

$$c_{1112} = a_1^1 a_1^2 (a_1^1 a_2^2 + a_1^2 a_2^1)(\gamma_{1122} + 2\gamma_{1212}) = 0$$

car $a_1^1 a_2^2 + a_1^2 a_2^1 = 0$. On montre de la même manière que $c_{2221} = 0$ par conséquent :

$$c_{16} = c_{26} = 0.$$

Il existe une relation entre c_{1111}, c_{1122} et c_{1212} car il n'y a que deux constantes sans indice 3 indépendantes. En effet, il résulte du développement 4. 52 que :

$$c_{1122} = \frac{1}{2}(\gamma_{1122} - 2\gamma_{1212}) = c_{12}$$

et

$$c_{1212} = -\frac{1}{2}\gamma_{1122} = c_{66}.$$

Compte tenu de la relation 4. 53, il vient :

$$c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}.$$

La matrice $c_{\alpha\beta}$ ci-dessous rassemble tous ces résultats :

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{25} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & c_{25} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & c_{25} \\ -c_{25} & c_{25} & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & c_{25} & c_{14} & \dfrac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{vmatrix} \quad \textit{trigonal} \qquad (4.\ 54)$$

Dans les *classes 32, 3m,* $\bar{3}m$, les axes binaires perpendiculaires à l'axe principal imposent des conditions supplémentaires qui se traduisent, en portant Ox_1 sur un de ces axes, pa l'annulation des constantes c_{ijkl} possédant un nombre impair d'indice 1 (cf. cas du système monoclinique). Ceci réduit à six le nombre de modules élastiques indépendants pour ces classes car $c_{15} = c_{1113} = 0$.

Les relations entre les modules à quatre, trois et deux indices 3, des cristaux du système *tétragonal* sont les mêmes que celles établies ci-dessus, en raison de l'identité des composantes γ_{ijkl} non nulles intervenant dans les deux cas. Par contre les constantes élastiques à un seul indice 3 sont nulles car $\gamma_{1113} = \gamma_{2223} = 0$:

$$c_{14} = c_{24} = c_{15} = c_{25} = c_{46} = c_{56} = 0.$$

Restent les modules sans indice 3 qui s'expriment en fonction de γ_{1111}, γ_{2222}, γ_{1122} et γ_{1212} :

$$c_{ijkl} = a_i^1 a_j^1 a_k^1 a_l^1 \gamma_{1111} + a_i^2 a_j^2 a_k^2 a_l^2 \gamma_{2222} + c_{ijkl}^{(3)}$$

où $c_{ijkl}^{(3)}$ représente le développement 4. 52 de la constante correspondante dans le cas $n = 3$. En tenant compte de la relation 4. 53, il vient :

$$c_{iiii} = \frac{1}{4}(\gamma_{1111} + \gamma_{2222}) - \frac{1}{2}(\gamma_{1122} + 2\gamma_{1212})$$

soit $c_{11} = c_{22}$. Comme $c_{1112}^{(3)}$ et $c_{2221}^{(3)}$ sont nuls :

$$c_{1112} = \frac{i}{4}(\gamma_{1111} - \gamma_{2222}) = -c_{2221} \qquad \text{soit} \qquad c_{26} = -c_{16}.$$

Les quatre modules sans indice 3 indépendants c_{11}, c_{12}, c_{16}, c_{66} s'ajoutent à c_{13}, c_{33} et c_{44} pour former le tableau ci-dessous :

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & -c_{16} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ c_{16} & -c_{16} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix} \quad \textit{tétragonal} \qquad (4.\ 55)$$

Pour les classes 422, *4mm*, $\bar{4}2m$, *4/mmm*, l'axe Ox_1 étant parallèle à un des axes binaires perpendiculaires à l'axe principal, la constante $c_{1112} = c_{16}$ s'annule car elle possède un nombre impair d'indice 1.

En élasticité, l'axe principal des cristaux du système *hexagonal* se comporte comme un axe direct d'ordre 6, c'est-à-dire comme un axe binaire et un axe ternaire réunis. La matrice $c_{\alpha\beta}$ résulte donc de la combinaison des matrices 4. 43 et 4. 54 caractéristiques des systèmes monoclinique et trigonal :

$$(c_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{vmatrix} \quad \textit{hexagonal} \qquad (4.\ 56)$$

Ce tenseur est invariant dans toute rotation autour de l'axe d'ordre 6. Cette propriété, dont la démonstration fait l'objet de l'exercice 4. 4, se traduit de plusieurs façons :

— les plans perpendiculaires à l'axe principal sont isotropes vis-à-vis des propriétés élastiques;

— tous les plans passant par l'axe principal sont équivalents ainsi que toutes les directions également inclinées sur cet axe.

Les résultats de la réduction du nombre de modules élastiques indépendants sont rassemblés dans le tableau de la figure 4. 6. Les relations, indiquées par des symboles dus à K. S. Van Dyke, s'appliquent directement aux constantes de rigidité c_{ijkl} ou $c_{\alpha\beta}$. En repère orthonormé, la réduction du tenseur des flexibilités s_{ijkl} est identique à celle du tenseur c_{ijkl}. Par contre, pour trouver les relations entre les composantes $s_{\alpha\beta}$ il faut tenir compte de la formule 4. 28 :

$$s_{\alpha\beta} = 2^p s_{ijkl}$$

p est le nombre d'indices supérieurs à 3 dans le couple (α, β). Par
mple, dans les systèmes trigonal, hexagonal et les milieux isotropes :

$$c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \qquad \text{soit} \qquad c_{1212} = \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2}.$$

même relation existe entre les flexibilités s_{ijkl} correspondantes :

$$s_{1212} = \frac{s_{1111} - s_{1122}}{2}$$

is, comme $s_{66} = 4s_{1212}$, $s_{11} = s_{1111}$ et $s_{12} = s_{1122}$:

$$s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}).$$

TRICLINIQUE — 21 — Axes quelconques

MONOCLINIQUE — 13 — $Ox_3 // A_2$ ou ⊥M, Ox_1 quelconque

ORTHORHOMBIQUE — 9 — $Ox_1, Ox_2, Ox_3 // A_2, A'_2, A''_2$

TRIGONAL — 3_$\bar{3}$ — 7 — $Ox_3 // A_3$, Ox_1 quelconque; 32-3m-$\bar{3}$m — 6 — $Ox_3 // A_3$, $Ox_1 // A_2$ ou ⊥M

TETRAGONAL — 4-$\bar{4}$-4/m — 7 — $Ox_3 // A_4$, Ox_1 quelconque; $\bar{4}$2m, 422, 4mm, 4/mmm — 6 — $Ox_3 // A_4$, $Ox_1 // A_2$ ou ⊥M

HEXAGONAL — 5 — $Ox_3 // A_6$, Ox_1 quelconque

CUBIQUE — 3 — $Ox_i // A_2$

ISOTROPE — 2 — Axes quelconques

FIG. 4. 6. — *Tableau des matrices des rigidités $c_{\alpha\beta}$.*
● ○ composante non nulle · composante nulle
●—● composantes égales ●—○ composantes opposées
× composante égale à $(c_{11} - c_{12})/2$
a symétrie par rapport à la diagonale principale n'est pas mentionnée. Le nombre de constantes indépendantes est indiqué en bas à droite de chaque matrice.

Matériaux	Classe	Rigidités (10^{10} N/m²)									Masse volumique (10^3 kg/m³)	Réf.
Système cubique et isotrope		c_{11}	c_{12}	c_{44}							ρ	
Aluminium (Al)	$m3m$	10,73	6,08	2,83							2,702	[1]
* Arséniure de gallium (AsGa)	$\bar{4}3m$	11,88	5,38	5,94							5,307	[2]
Grenat d'yttrium et d'aluminium ($Y_3Al_5O_{12}$). YAG	$m3m$	33,2	11,07	11,50							4,55	[3]
Grenat d'yttrium et de fer ($Y_3Fe_5O_{12}$). YIG	$m3m$	26,9	10,77	7,64							5,17	[3]
* Oxyde de bismuth et de germanium ($Bi_{12}GeO_{20}$)	23	12,8	3,05	2,55							9,23	[4]
Or (Au)	$m3m$	19,25	16,30	4,24							19,3	[5]
Platine (Pt)	$m3m$	34,7	25,1	7,65							21,4	[6]
Silice (SiO_2)	isotrope	7,85	1,61	3,12							2,203	
Silicium (Si)	$m3m$	16,56	6,39	7,95							2,329	[7]
Tungstène (W)	$m3m$	52,24	20,44	16,06							19,26	[8]
Système hexagonal		c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}						
Béryllium (Be)	$6/mmm$	29,23	2,67	1,4	33,64	16,25					1,848	[9]
* Céramique PZT-4	trans. isotrope	13,9	7,8	7,4	11,5	2,56					7,5	[25]
* Oxyde de zinc (ZnO)	$6mm$	20,97	12,11	10,51	21,09	4,25					5,676	[10]
* Sulfure de cadmium (CdS)	$6mm$	8,565	5,32	4,62	9,36	1,49					4,824	[11]
Titane (Ti)	$6/mmm$	16,24	9,20	6,90	18,07	4,67					4,506	[12]
Système tétragonal		c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	c_{66}	c_{16}				
Indium	$4/mmm$	4,53	4,00	4,15	4,51	0,651	1,21	0			7,28	[13]
Molybdate de plomb ($PbMoO_4$)	$4/m$	10,92	6,83	5,28	9,17	2,67	3,37	1,36			6,95	[14]
Molybdatedecalcium($CaMoO_4$)	$4/m$	14,5	6,6	4,46	12,65	3,69	4,5	1,3			4,255	[15]
* Paratellurite (TeO_2)	422	5,6	5,1	2,2	10,6	2,65	6,6	0			6,00	[16]
Rutile (TiO_2)	$4/mmm$	27,3	17,6	14,9	48,4	12,5	19,4	0			4,25	[17]
* Titanate de baryum ($BaTiO_3$)	$4mm$	27,5	17,9	15,2	16,5	5,43	11,3	0			6,02	[18]
Système trigonal		c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	c_{14}					
Corindon (Al_2O_3)	$\bar{3}m$	49,7	16,3	11,1	49,8	14,7	− 2,35				3,986	[19]
* Niobate de lithium ($LiNbO_3$)	$3m$	20,3	5,3	7,5	24,5	6,0	0,9				4,7	[20]
* Tantalate de lithium ($LiTaO_3$)	$3m$	23,3	4,7	8,0	27,5	9,4	− 1,1				7,45	[20]
* Quartz α (SiO_2)	32	8,67	0,70	1,19	10,72	5,79	− 1,79				2,648	[21]
* Tellure (Te)	32	3,27	0,86	2,49	7,22	3,12	1,24				6,25	[22]
Système orthorhombique		c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{22}	c_{23}	c_{33}	c_{44}	c_{55}	c_{66}		
* Acide α-iodique (HIO_3)	222	3,01	1,61	1,11	5,80	0,80	4,29	1,69	2,06	1,58	4,64	[23]
* Niobate de baryum et de sodium ($Ba_2NaNb_5O_{15}$)	$2mm$	23,9	10,4	5,0	24,7	5,2	13,5	6,5	6,6	7,6	5,30	[24]

Le tableau 4. 7 donne les constantes de rigidité et la masse volumique de quelques matériaux classés par système cristallin. Pour les cristaux piézoélectriques, marqués d'un astérisque, il s'agit des constantes $c^E_{\alpha\beta}$ définies au paragraphe 6. 1. 3. Les rigidités sont de l'ordre de 10^{11} N/m^2.

Références du tableau des constantes élastiques

[1] J. Vallin and *Al.* — *J. Appl. Phys. 35*, 1825 (1964).
[2] T. B. Bateman, H. J. McSkimin and J. M. Whelan. — *J. Appl. Phys. 30*, 544 (1959).
[3] E. G. Spencer and *Al.* — *J. Appl. Phys. 34*, 3059 (1963).
[4] A. J. Slobodnik, Jr., and J. C. Sethares. — *J. Appl. Phys. 43*, 247 (1972).
[5] Y. A. Chang and L. Himmel. — *J. Appl. Phys. 37*, 3567 (1966).
[6] R. E. Macfarlane, J A. Rayne and C. K. Jones. — *Phys. Letters 18*, 91 (1965).
[7] J. J. Hall. — *Phys. Rev. 161*, 756 (1967).
[8] R. Lowrie and A. M. Gonas. — *J. Appl. Phys. 38*, 4505 (1967).
[9] J. F. Smith and C. L. Arbogast. — *J. Appl. Phys. 31*, 99 (1960).
[10] T. B. Bateman. — *J. Appl. Phys. 33*, 3309 (1962).
[11] J. A. Corll. — *Phys. Rev. 157*, 623 (1967).
[12] E. S. Fischer and C. J. Renken. — *Phys. Rev. 135*, A 482 (1964).
[13] B. S. Chandrasekhar and J. A. Rayne. — *Phys. Rev. 124*, 1011 (1961).
[14] G. A. Coquin, D. A. Pinnow and A. W. Warner. — *J. Appl. Phys. 42*, 2162 (1971).
[15] W. J. Alton and A. J. Barlow. — *J. Appl. Phys. 38*, 3817 (1967).
[16] Y. Ohmachi and N. Uchida. — *J. Appl. Phys. 41*, 2307 (1970).
[17] R. K. Verma. — *J. Geophys. Res. 65*, 757 (1960).
[18] D. Berlincourt and H. Jaffe. — *Phys. Rev. 111*, 143 (1958).
[19] J. B. Wachtman, W. E. Tefft, D. G. Lam and R. P. Stinchfield. — *J. Res. Natl. Bur. Std. 64 A*, 213 (1960).
[20] A. W. Warner, M. Onoe, and G. A. Coquin. — *J. Acoust. Soc. Am. 42*, 1223 (1967).
[21] R. Bechman. — *Phys. Rev. 110*, 1060 (1958).
[22] J. L. Malgrange, G. Quentin et J. M. Thuillier. — *Phys. Status Solidi 4*, 139 (1964).
[23] S. Haussühl. — *Acta Cryst. A 24*, 697 (1968).
[24] A. W. Warner, G. A. Coquin, and J. L. Fink. — *J. Appl. Phys. 40*, 4353 (1969).
[25] H. Jaffee and D. A. Berlincourt. — *Proc. IEEE, 53*, 1372 (1965).

Bibliographie

J. F. Nye. — *Propriétés physiques des cristaux*, chap. V, VI, VIII. Paris : Dunod (1961).
F. I. Fedorov. — *Theory of elastic waves in crystals*, chap. I. New York : Plenum Press (1968).
S. Bhagavantam. — *Crystal symmetry and Physical properties*, chap. 11. London and New York: Academic-Press (1966).
L. Landau et E. Lifchitz. — *Théorie de l'élasticité.* Moscou : Mir (1967).
G. Bruhat et A. Kastler. — *Cours de physique générale. Thermodynamique*, chap. IX. Paris : Masson et Cie (1962).

EXERCICES

• **4. 1.** Une tige ayant une symétrie de révolution est suspendue verticalement comme l'indique la figure 4. 8. Comment doit varier la section $s(x)$ pour que la tension moyenne T due à la pesanteur soit constante ($\forall x$)?

Solution.

$$T = \frac{\rho g \int_x^\infty s(x)\,dx}{s(x)} = C^{te} = T_0$$

En dérivant

$$-\rho g s(x) = T_0 \frac{ds}{dx} \quad \Rightarrow \quad s = s_0\, e^{-\frac{\rho g}{T_0}x}.$$

• **4. 2.** Calculer le coefficient de compressibilité $\chi = -\Delta/p$ (Δ dilatation) d'un cristal soumis à une pression hydrostatique p.

Solution. Avec $T_{kl} = -p\delta_{kl}$ la loi de Hooke :

$$S_{ij} = s_{ijkl}T_{kl} = -p s_{ijkk}$$

fournit la dilatation $\Delta = \Delta v/v$ (formule 4. 7) :

$$\Delta = S_{ii} = -p s_{iikk}$$

et

$$\chi = s_{iikk} = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{23} + s_{31}).$$

• **4. 3.** Exprimer, en fonction des rigidités, le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν définis pour un solide isotrope par l'allongement relatif $\Delta l/l$ et la variation relative de diamètre $\Delta d/d$ d'un cylindre de section s soumis à une contrainte uniforme F/s suivant son axe x_1 :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{s} \qquad \frac{\Delta d}{d} = -\nu\frac{\Delta l}{l} = -\frac{\nu}{E}\frac{F}{s}.$$

Solution. Les déformations sont : $S_{11} = \frac{1}{E}T_{11}$ et $S_{22} = S_{33} = -\frac{\nu}{E}T_{11}$.

Pour un solide isotrope $T_{22} = c_{12}(S_{11} + S_{33}) + c_{11}S_{22} = 0 \Rightarrow \nu = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}}$

et

$$T_{11} = c_{11}S_{11} + c_{12}(S_{22} + S_{33}) \Rightarrow E = c_{11} - 2c_{12}\nu = c_{11} - 2\frac{c_{12}^2}{c_{11} + c_{12}}.$$

• **4. 4.** Montrer que les rigidités des cristaux du système hexagonal sont invariantes dans toute rotation autour de l'axe sénaire.

Solution. Examinons le comportement des cinq modules indépendants c_{33}, c_{13}, c_{44}, c_{12}, c_{11} dans le changement d'axes de matrice 3. 12 :

$$c'_{ijkl} = \alpha_i^p\alpha_j^q\alpha_k^r\alpha_l^s c_{pqrs}$$

— $c'_{3333} = \alpha_3^3\alpha_3^3\alpha_3^3\alpha_3^3 c_{3333} \Rightarrow c'_{33} = c_{33}$

— $c'_{1133} = \alpha_1^p\alpha_1^q\alpha_3^3\alpha_3^3 c_{pq33}$ les seuls termes non nuls correspondent à $p = q = 1$ ou 2 :

$$c'_{13} = c_{13}\cos^2\varphi + c_{23}\sin^2\varphi = c_{13} \quad \text{car} \quad c_{23} = c_{13}$$

— $c'_{2323} = \alpha_2^p\alpha_2^r c_{p3r3} \Rightarrow c'_{44} = c_{44}\cos^2\varphi + c_{55}\sin^2\varphi = c_{44}$ car $c_{55} = c_{44}$

— $c'_{1122} = \alpha_1^p\alpha_1^q\alpha_2^r\alpha_2^s c_{pqrs}$ avec $p, q, r, s \neq 3$, il vient :

$$c'_{12} = (c_{11} + c_{22} - 4c_{66})\cos^2\varphi\sin^2\varphi + c_{21}\sin^4\varphi + c_{12}\cos^4\varphi$$

et en remplaçant c_{66} par $\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$

$$c'_{12} = (2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi + \cos^4\varphi)c_{12} = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 c_{12} = c_{12}$$

— de même $c'_{11} = c_{11}$.

• **4. 5.** Exprimer pour les cristaux des systèmes quadratiques (classes $4/mmm$, 422, $4mm$, $\bar{4}2m$), hexagonal, cubique, les flexibilités $s_{\alpha\beta}$ en fonction des rigidités $c_{\alpha\beta}$.

Solution. L'inversion de la matrice $c_{\alpha\beta}$ fournit immédiatement $s_{44} = 1/c_{44}$ et $s_{66} = 1/c_{66}$.

Les autres relations résultent simplement de la transformation suivante des trois premières équations 4. 23 :

$$\begin{cases} (1) \quad T_1 = c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + c_{13}S_3 \\ (2) \quad T_2 = c_{12}S_1 + c_{11}S_2 + c_{13}S_3 \\ (3) \quad T_3 = c_{13}S_1 + c_{13}S_2 + c_{33}S_3 \end{cases} \overset{(1)-(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} T_1 - T_2 = (c_{11} - c_{12})(S_1 - S_2) \\ T_2 = c_{12}(S_1 - S_2) + (c_{11} + c_{12})S_2 + c_{13}S_3 \\ T_3 = c_{13}(S_1 - S_2) + 2c_{13}S_2 + c_{33}S_3. \end{cases}$$

La même transformation effectuée sur les équations 4. 27 montre, avec les variables $\tau_1 = T_1 - T_2$, $\tau_2 = T_2$, $\tau_3 = T_3$, $\sigma_1 = S_1 - S_2$, $\sigma_2 = S_2$, $\sigma_3 = S_3$, que la matrice

$$\begin{pmatrix} s_{11} - s_{12} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} + s_{12} & s_{13} \\ s_{13} & 2s_{13} & s_{33} \end{pmatrix} \text{ est l'inverse de } \begin{pmatrix} c_{11} - c_{12} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} + c_{12} & c_{13} \\ c_{13} & 2c_{13} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ d'où les relations :}$$

$$s_{11} - s_{12} = \frac{1}{c_{11} - c_{12}} \qquad s_{11} + s_{12} = \frac{c_{33}}{c^2} \qquad s_{13} = -\frac{c_{13}}{c^2} \qquad s_{33} = \frac{c_{11} + c_{12}}{c^2}$$

en posant

$$c^2 = (c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2.$$

CHAPITRE 5

ÉLASTICITÉ DYNAMIQUE

Nous abordons l'étude détaillée de la propagation des ondes élastiques dans les solides. Le lecteur a peut-être entendu dire qu'il existait une grande variété d'ondes élastiques. Il est vrai qu'on parle, suivant les conditions de propagation, d'ondes de Rayleigh, de Bleustein-Gulyaev, de Lamb, de Love, de Stoneley... Il nous paraît utile de préciser qu'il n'existe toutefois que deux types d'ondes fondamentales :

— les ondes longitudinales encore appelées *ondes de compression* (fig. 5. 1*a*). Elles sont caractérisées par un déplacement des particules parallèle à la direction de propagation c'est-à-dire par une polarisation colinéaire au vecteur d'onde. Le passage d'une onde longitudinale plane entraîne une variation de la distance entre les plans parallèles contenant les particules si bien que le volume occupé par un nombre donné de particules varie.

— les ondes transversales, appelées aussi *ondes de cisaillement* (fig. 5. 1 *b*). Le déplacement des particules s'effectue perpendiculairement au vecteur d'onde. Le glissement des plans parallèles ne donne lieu à aucune variation de volume.

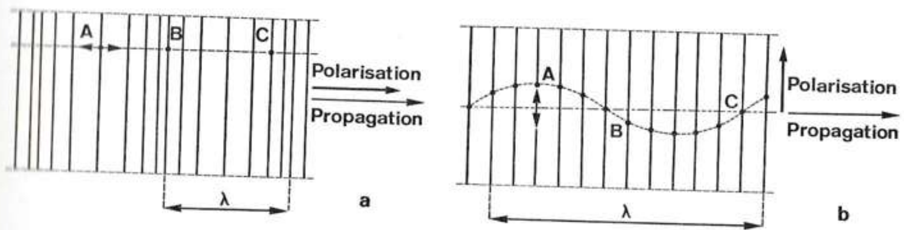


FIG 5. 1. — *Ondes élastiques dans un milieu isotrope illimité.*

a) *Onde longitudinale :* polarisation et vecteur d'onde sont parallèles. Les particules A, B, C oscillent suivant une même droite. L'onde apparaît, à un instant donné, comme une succession de compressions et de dilatations.

b) *Onde transversale :* polarisation et vecteur d'onde sont perpendiculaires. Les particules A, B, C oscillent de part et d'autre de la droite sur laquelle elles sont situées en l'absence d'onde. Les plans perpendiculaires au vecteur d'onde glissent les uns par rapport aux autres en conservant leurs distances.

(...). Le terme illimité revient à supposer pratiquement que les dimensions du milieu sont grandes devant les dimensions du faisceau d'ondes et que les effets de bord sont négligeables.

Lorsque le milieu, toujours illimité, est anisotrope *i. e.* cristallin, trois ondes, comme nous le montrons aux paragraphes 5. 1. 1. et 5. 1. 2., peuvent se propager suivant une direction quelconque et, dans le cas le plus compliqué, aucune de ces ondes n'est purement longitudinale ou purement transversale. La situation est en effet la suivante. Quelle que soit la direction choisie, il y a propagation :

— d'une onde quasi longitudinale, ainsi appelée parce que la vibration des particules a lieu suivant une direction faisant un angle non nul avec le vecteur d'onde.

— d'une onde quasi transversale rapide,

— d'une onde quasi transversale lente.

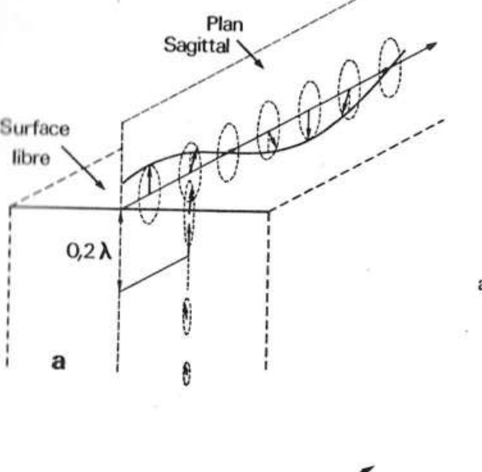
Les polarisations de ces trois ondes qui se propagent à des vitesses différentes sont toujours perpendiculaires entre elles. Les vecteurs d'énergie indiquant le sens de l'écoulement de l'énergie pour chacune de ces ondes forment des angles différents avec le vecteur d'onde. Il est évident qu'en pratique ces conditions de propagation ne sont pas intéressantes à utiliser. Il est préférable de choisir des directions particulières telles que des axes de symétrie suivant lesquelles se propagent des modes purs, les vecteurs d'énergie et les vecteurs de propagation étant parallèles comme dans le solide isotrope (paragr. 5. 1. 3 et 5. 1. 5).

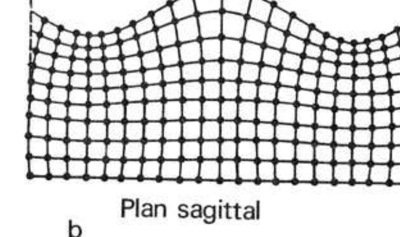
Quand le milieu a des dimensions finies, des conditions aux limites mécaniques et électriques (si le milieu est piézoélectrique) sont à satisfaire — par exemple tension mécanique nulle sur une surface libre, continuité des composantes normales de l'induction électrique en l'absence de charges — et les ondes pouvant se propager au voisinage des frontières ne sont plus, sauf exception, des ondes simples : elles comprennent une composante longitudinale et une (ou deux) composante (s) transversale (s).

Décrivons brièvement les propriétés des ondes que nous avons citées.

A la surface de tout milieu semi-infini, une onde complexe, portant le nom de Rayleigh, qui l'a découverte en 1885, peut se propager. Dans le cas simple d'un solide isotrope, c'est une onde constituée d'une composante longitudinale et d'une composante transversale déphasées de $\pi/2$ contenues dans le plan sagittal, plan défini par le vecteur d'onde et la normale à la surface (fig. 5. 2*a* et *b*). La décroissance en fonction de la profondeur est différente pour chaque composante. Comme la composante longitudinale s'annule puis change de signe à une distance de la surface de $0{,}2\,\lambda$ environ, la polarisation devient purement transversale puis à nouveau elliptique mais avec sens de rotation opposé. Le déplacement des particules est définitivement nul à partir d'une profondeur de $2\,\lambda$. Ceci est illustré par les courbes de la figure 5. 42 du paragraphe 5. 3. 1.

A la surface d'un milieu semi-infini *piézoélectrique*, la propagation d'une onde de surface transversale, de polarisation parallèle à la surface, est (...). La profondeur de pénétration est d'autant plus petite que le matériau est plus piézoélectrique (paragr. 6. 2. 2. 3). L'épaisseur de matière mise en vibration par ces ondes, appelées ondes de Bleustein-Gulyaev, est plus grande — par exemple $100\,\lambda$ — que pour les ondes de Rayleigh.





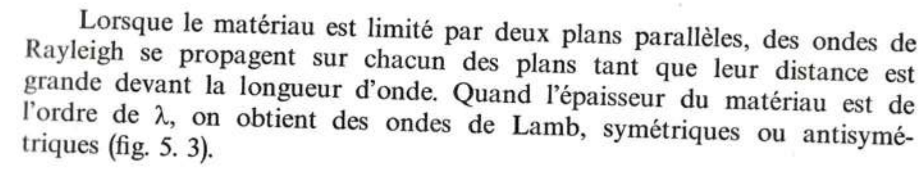
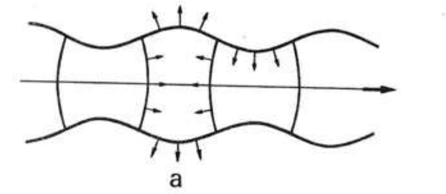


FIG. 5. 2. — *Ondes de surface.*

a) et b) *Onde de Rayleigh.* — Dans un milieu isotrope le déplacement des particules, contenu dans le plan sagittal, résulte d'une composante longitudinale et d'une composante transversale déphasées de $\pi/2$ et dont les amplitudes décroissent différemment. L'extrémité du vecteur polarisation décrit une ellipse dans le sens rétrograde à la surface (*a*). Le déplacement est nul à une profondeur de 2λ. L'onde provoque une ondulation de la surface (*b*; d'après la figure 1 de la référence 8).

c) *Onde de Bleustein-Gulyaev.* — La polarisation purement transversale est parallèle à la surface du matériau piézoélectrique. L'amplitude du déplacement des particules décroît exponentiellement. La surface reste plane.

Lorsque le matériau est limité par deux plans parallèles, des ondes de Rayleigh se propagent sur chacun des plans tant que leur distance est grande devant la longueur d'onde. Quand l'épaisseur du matériau est de l'ordre de λ, on obtient des ondes de Lamb, symétriques ou antisymétriques (fig. 5. 3).



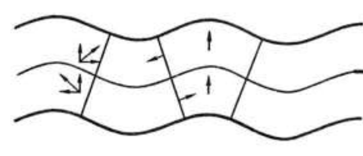


FIG. 5. 3. — *Ondes de Lamb.*

a) *symétrique*. de part et d'autre du plan médian les composantes longitudinales sont égales et les composantes transversales sont opposées.

b) *antisymétrique* : de part et d'autre du plan médian la composante longitudinale change de signe mais pas la composante transversale.

Ce qui précède se rapporte à un milieu homogène. Pour un milieu [in]homogène, constitué par exemple de deux matériaux de propriétés élastiques [diff]érentes deux cas principaux peuvent être distingués suivant l'épaisseur [rel]ative des matériaux. Le premier, illustré sur la figure 5. 4*a* correspond à [la] propagation, suivant l'interface de deux solides isotropes semi-infinis, [d'u]ne onde appelée onde de Stoneley. Le déplacement, situé dans le plan [sag]ittal, décroît de part et d'autre de la surface de séparation. Le second [cas] est représenté sur la figure 5. 4*b* : le milieu est composé d'une couche [min]ce déposée sur un substrat. Les ondes de surface à polarisation trans[ver]sale sont alors appelées ondes de Love. Ces ondes de Stoneley et de [Lo]ve, n'existent que sous certaines conditions, par exemple la vitesse de [l'o]nde transversale dans la couche mince doit être inférieure à la vitesse [da]ns le substrat (paragr. 5. 2. 4).

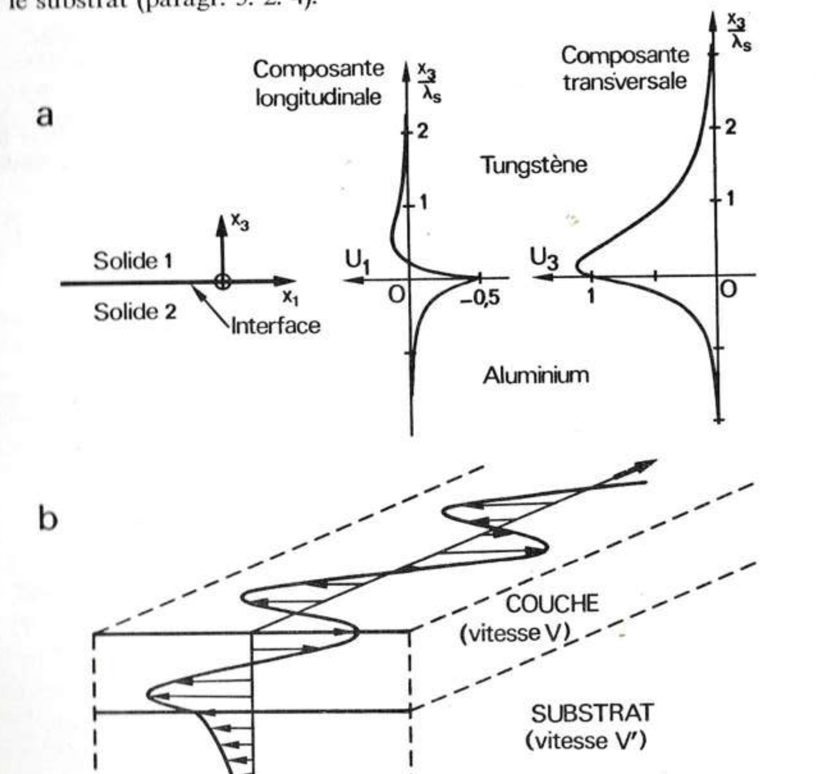


FIG. 5. 4. — *Ondes élastiques à l'interface de deux solides.*

[a)] Dans certains couples de solides, pour lesquels les conditions de continuité sont satisfaites, une onde de Rayleigh se propage de part et d'autre de la frontière. Cette onde d'interface est appelée *onde de Stoneley*. A droite, exemple de décroissance des composantes longitudinale et transversale pour le couple aluminium-tungstène [1].

[b)] *Onde de Love* : c'est une onde transversale dispersive qui se propage dans un milieu constitué d'une couche et d'un substrat, sous certaines conditions de symétrie et de vitesse (V' > V) des matériaux.

Signalons que Rayleigh, Love, Stoneley, ont découvert les ondes qui portent leur nom en étudiant la propagation des tremblements de terre.

5. 1. — ONDES ÉLASTIQUES DANS UN CRISTAL ILLIMITÉ

Dans le chapitre précédent, il a été admis qu'une fois le solide déformé tous les points restaient au repos. Le déplacement u_i subi par chaque point ne dépendait que de ses coordonnées initiales x_k. Nous supposons maintenant que le milieu, traversé par un ébranlement, est localement en mouvement; le déplacement de chaque point matériel varie au cours du temps :

$$u_i = u_i(x_k, t).$$

5. 1. 1. — *Équation de propagation*

L'équation du mouvement résulte de la loi fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m\vec{\gamma}$. Il a été montré (paragr. 4. 2. 2) que la densité de force par unité de volume du corps sous contraintes internes T_{ij} est :

$$f_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}.$$

L'action de la pesanteur étant négligée, écrivons que cette force communique, suivant l'axe *i*, l'accélération $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ à la masse ρ de l'unité de volume :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \qquad (5.\ 1)$$

En utilisant la loi de Hooke sous la forme 4. 21 :

$$T_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}.$$

l'équation du mouvement devient :

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}}. \qquad (5.\ 2)$$

Ce système de trois équations différentielles du second ordre généralise, à trois dimensions et dans un milieu anisotrope, l'équation de propagation 1. 13 établie dans le cas d'un fluide :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

ar analogie avec la solution générale de cette équation :

$$u = F\left(t - \frac{x}{V}\right) \qquad \text{avec} \qquad V^2 = \frac{1}{\rho\chi}$$

herchons une solution sous la forme d'une onde plane progressive se ropageant dans la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ erpendiculaire aux plans d'onde d'équation $\vec{n} \cdot \vec{x} = C^{te}$:

$$u_i = {}^\circ u_i F\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{V}\right) = {}^\circ u_i F\left(t - \frac{n_j x_j}{V}\right). \qquad (5.\ 3)$$

Pour déterminer la vitesse de phase V et la polarisation ${}^\circ u_i$ de onde, *i. e.* la direction du déplacement des particules, reportons l'expres- on 5. 3 dans l'équation de propagation 5. 2. En appelant F″ la dérivée econde de la fonction F :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = {}^\circ u_i F''$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_j} = - {}^\circ u_l \frac{n_j}{V} F' \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = {}^\circ u_l \frac{n_j n_k}{V^2} F''.$$

insi

$$\rho {}^\circ u_i F'' = c_{ijkl} n_j n_k {}^\circ u_l \frac{F''}{V^2}$$

u encore

$$\rho V^2 {}^\circ u_i = c_{ijkl} n_j n_k {}^\circ u_l. \qquad (5.\ 4)$$

n introduisant le tenseur du second ordre :

$$\boxed{\Gamma_{il} = c_{ijkl} n_j n_k} \qquad (5.\ 5)$$

équation précédente, appelée équation de Christoffel, qui s'écrit :

$$\Gamma_{il} {}^\circ u_l = \rho V^2 {}^\circ u_i \qquad (5.\ 6)$$

ontre que la polarisation ${}^\circ u_i$ est vecteur propre du tenseur Γ_{il} avec omme valeur propre $\gamma = \rho V^2$ (nous supposons connus, ici et par la suite, s résultats du paragraphe 3. 5).

Ainsi les vitesses et les polarisations des ondes planes se propageant uivant une direction $\vec{n}$ dans un cristal de rigidité c_{ijkl} s'obtiennent en cher- hant les valeurs propres et les vecteurs propres du tenseur $\Gamma_{il} = c_{ijkl} n_j n_k$. Il a, en général, pour une direction donnée, trois vitesses de propagation, ui sont les racines de l'équation séculaire :

$$|\Gamma_{il} - \rho V^2 \delta_{il}| = 0 \qquad (5.\ 7)$$

xprimant la condition de compatibilité des trois équations homogènes 5. 6.

A chaque vitesse correspond un vecteur propre définissant la direction du déplacement de matière (polarisation de l'onde).

5. 1. 2. — Propriétés générales des ondes élastiques planes

En raison des propriétés de symétrie du tenseur de rigidité (formules 4. 20 et 4. 32) le tenseur Γ_{il} est symétrique :

$$\Gamma_{li} = c_{ljki} n_j n_k = c_{kilj} n_j n_k = c_{ikjl} n_j n_k = c_{ijkl} n_j n_k = \Gamma_{il}.$$

Ses valeurs propres sont donc *réelles* et ses vecteurs propres *orthogonaux* (paragr. 3. 5). De plus les valeurs propres $\gamma = \rho V^2$ sont *positives* (condition nécessaire pour que la vitesse de propagation V soit réelle). Pour démontrer cette propriété revenons à l'équation 5. 6 qui fournit, après contraction avec ${}^\circ u_i$:

$$\gamma = \frac{{}^\circ u_i \Gamma_{il} {}^\circ u_l}{{}^\circ u_i^2}.$$

Le signe de γ est celui du numérateur

$${}^\circ u_i \Gamma_{il} {}^\circ u_l = {}^\circ u_i n_j c_{ijkl} n_k {}^\circ u_l.$$

Or la densité d'énergie élastique (formule 4. 34) : $\Phi = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}$ est positive quelle que soit la déformation *i. e.* pour tout tenseur de rang deux symétrique S_{ij}. Dans le cas d'un tenseur quelconque A_{ij}, qui peut être décomposé en sa partie symétrique $A^+_{ij} = (A_{ij} + A_{ji})/2$ et sa partie anti-symétrique $A^-_{ij} = (A_{ij} - A_{ji})/2$:

$$A_{ij} = A^+_{ij} + A^-_{ij}$$

le produit contracté

$$P = A_{ij} c_{ijkl} A_{kl} = (A^+_{ij} + A^-_{ij}) c_{ijkl} (A^+_{kl} + A^-_{kl})$$

se réduit à

$$P = A^+_{ij} c_{ijkl} A^+_{kl}$$

car en permutant les indices muets $\imath$ et j :

$$A^-_{ij} c_{ijkl} = A^-_{ji} c_{jikl} = - A^-_{ij} c_{ijkl} = 0,$$

il s'ensuit que $P = A_{ij} c_{ijkl} A_{kl}$ est positif pour tout tenseur A_{ij}. En particulier pour $A_{ij} = {}^\circ u_i n_j$ il vient :

$$P = {}^\circ u_i n_j c_{ijkl} {}^\circ u_l n_k = {}^\circ u_i \Gamma_{il} {}^\circ u_l > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > 0.$$

Comme les valeurs propres sont réelles et positives, *il existe dans le cas*

général trois ondes planes se propageant dans une même direction avec des vitesses différentes, les polarisations étant orthogonales. Cette situation est illustrée sur la figure 5. 5.

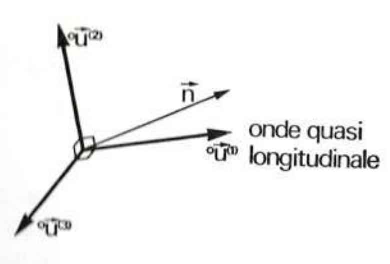


FIG. 5. 5. — *Milieu anisotrope. Cas général.*
Trois ondes planes peuvent se propager dans un cristal suivant une même direction $\vec{n}$, chacune avec sa vitesse propre. Celle dont le déplacement $°\vec{u}^{(1)}$ est le plus proche du vecteur $\vec{n}$ est appelée onde quasi longitudinale. Sa vitesse est ordinairement supérieure à celle des deux autres ondes appelées quasi transversales de polarisations $°\vec{u}^{(2)}$ et $°\vec{u}^{(3)}$. Les trois vecteurs $°\vec{u}^{(1)}$, $°\vec{u}^{(2)}$, $°\vec{u}^{(3)}$ sont mutuellement perpendiculaires.

Le vecteur déplacement $\vec{u}$ n'est pas, en général, colinéaire ou perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{n}$. L'onde dont la polarisation est la plus proche de $\vec{n}$ est dite quasi longitudinale, les autres sont appelées quasi transversales. Ces dernières progressent habituellement toujours plus lentement que l'onde quasi longitudinale. Ce n'est que suivant des directions de propagation particulières que les ondes sont purement longitudinales ou transversales [2, 3].

Avant d'étudier la propagation dans des directions liées aux éléments de symétrie, établissons l'expression des composantes du tenseur $\Gamma_{il} = c_{ijkl}n_j n_k$. En développant la somme sur les indices j et k, il vient :

$$\Gamma_{il} = c_{i11l}n_1^2 + c_{i22l}n_2^2 + c_{i33l}n_3^2 + (c_{i12l} + c_{i21l})n_1 n_2 + (c_{i13l} + c_{i31l})n_1 n_3 + (c_{i23l} + c_{i32l})n_2 n_3$$

d'où les six composantes :

$$= c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2 + 2c_{16}n_1 n_2 + 2c_{15}n_1 n_3 + 2c_{56}n_2 n_3$$
$$= c_{16}n_1^2 + c_{26}n_2^2 + c_{45}n_3^2 + (c_{12} + c_{66})n_1 n_2 + (c_{14} + c_{56})n_1 n_3 + (c_{46} + c_{25})n_2 n_3$$
$$= c_{15}n_1^2 + c_{46}n_2^2 + c_{35}n_3^2 + (c_{14} + c_{56})n_1 n_2 + (c_{13} + c_{55})n_1 n_3 + (c_{36} + c_{45})n_2 n_3$$
$$= c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{44}n_3^2 + 2c_{26}n_1 n_2 + 2c_{46}n_1 n_3 + 2c_{24}n_2 n_3$$
$$= c_{56}n_1^2 + c_{24}n_2^2 + c_{34}n_3^2 + (c_{46} + c_{25})n_1 n_2 + (c_{36} + c_{45})n_1 n_3 + (c_{23} + c_{44})n_2 n_3$$
$$= c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2 + c_{33}n_3^2 + 2c_{45}n_1 n_2 + 2c_{35}n_1 n_3 + 2c_{34}n_2 n_3.$$
$$= \Gamma_{12} \qquad \Gamma_{31} = \Gamma_{13} \qquad \Gamma_{32} = \Gamma_{23} \tag{5. 8}$$

5. 1. 3. — *Propagation suivant des directions liées aux éléments de symétrie*

a) Le tenseur de propagation Γ_{il} le long de l'axe Ox_3 ($n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$) s'écrit : $\Gamma_{il} = c_{i33l}$ ou explicitement :

$$\Gamma_{x_3} = \begin{bmatrix} c_{55} & c_{45} & c_{35} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Lorsque Ox_3 est porté par l'axe binaire des cristaux du système monoclinique (voir tabl. 4. 43) $c_{35} = c_{34} = 0$:

$$\Gamma_{x_3/\!/A_2} = \begin{bmatrix} c_{55} & c_{45} & 0 \\ c_{45} & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

il se propage une onde longitudinale à la vitesse $V_1 = \sqrt{c_{33}/\rho}$ et deux ondes transversales à des vitesses différentes (paragr. 3. 5).

Si Ox_3 est un des axes binaires du système orthorhombique, c_{45} est nul aussi. L'onde transversale de vitesse $V_2 = \sqrt{c_{44}/\rho}$ est polarisée suivant Ox_2, celle de vitesse $V_3 = \sqrt{c_{55}/\rho}$ est polarisée suivant Ox_1.

Dans le cas d'un axe d'ordre $p > 2$, $c_{44} = c_{55}$, *les deux ondes transversales ont la même vitesse,* la polarisation est alors quelconque dans le plan perpendiculaire à l'axe car deux des valeurs propres sont identiques : les ondes transversales sont dégénérées. Une telle direction suivant laquelle peut se propager une onde transversale de polarisation quelconque est appelée *axe acoustique.* Des directions autres que les axes de symétrie peuvent aussi satisfaire à la condition d'égalité des deux vitesses des ondes transversales.

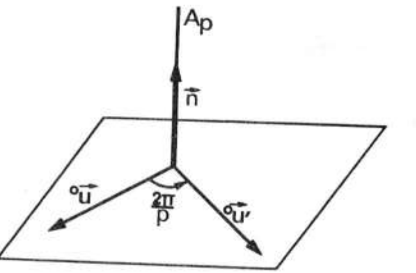


FIG. 5. 6. — *Propagation suivant un axe de symétrie* $A_p (p > 2)$.
Tout vecteur perpendiculaire à A_p se décompose suivant les vecteurs $°\vec{u}$ et $°\vec{u}'$ homologues dans la rotation de $2\pi/p$ et est vecteur propre de Γ avec la même valeur propre que $°\vec{u}$ et $°\vec{u}'$.

Ces résultats se retrouvent par des considérations de symétrie. Lorsque $\vec{n}$ est porté par l'axe A_p, la symétrie de l'ensemble cristal-direction de propagation est celle de l'axe A_p. Les polarisations des ondes doivent donc être invariantes dans la rotation d'angle $2\pi/p$ autour

De plus, si p est supérieur à 2, le vecteur déplacement $\vec{u}$ d'une onde transversale et son transformé $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires (fig. 5. 6). Comme ils correspondent à la même vitesse, *i. e.* à la même valeur propre du tenseur Γ_{il}, tout vecteur perpendiculaire à A_p se décompose suivant $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ et est donc un vecteur propre de Γ_{il} pour la même valeur propre : les ondes transversales se déplacent à la même vitesse avec une polarisation arbitraire.

b) Examinons la propagation dans un plan de symétrie ou dans un plan perpendiculaire à un axe de symétrie A_p d'ordre pair. Dans les deux cas il existe un axe binaire; les propriétés élastiques et la direction de propagation étant invariantes dans une inversion (paragr. 3. 4. 2) et compte tenu de l'équivalence $A_2C = \bar{A}_2 = M$ l'ensemble cristal-onde est symétrique par rapport au plan perpendiculaire à l'axe A_p. Les polarisations ne peuvent être que parallèles à A_p : onde transversale T, ou situées dans le plan perpendiculaire à A_p : ondes quasi longitudinale QL et quasi transversale QT (fig. 5. 7). Le raisonnement précédent montre que les composantes Γ_{13} et Γ_{23} du tenseur de propagation dans le plan x_1x_2 perpendiculaire à l'axe A_p porté par Ox_3 sont nulles :

$$\Gamma_{il} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{33} \end{bmatrix}.$$

FIG. 5. 7. — *Pour toute direction $\vec{n}$ perpendiculaire à un axe A_p d'ordre pair (direct ou inverse), il existe une onde transversale polarisée suivant A_p.*

Dans le cas d'un axe d'ordre 4 ou 6, l'expression de Γ_{33} tirée de 5. 8 ($n_3 = 0$) :

$$\Gamma_{33} = c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2 + 2c_{45}n_1n_2$$

se simplifie car $c_{45} = 0$ et $c_{55} = c_{44}$ (voir matrices 4. 55 et 4. 56) :

$$\Gamma_{33} = c_{44}(n_1^2 + n_2^2) = c_{44}.$$

La vitesse de l'onde transversale $V_3 = \sqrt{\Gamma_{33}/\rho} = \sqrt{c_{44}/\rho}$ est indépendante de la direction de propagation dans un plan perpendiculaire à un axe de symétrie d'ordre 4 ou 6.

5. 1. 4. — *Ondes élastiques dans un milieu isotrope*

Dans un milieu isotrope les modules élastiques s'expriment en fonction des coefficients de Lamé λ et μ par la relation 4. 36 :

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

et le tenseur de propagation a pour composantes

$$\Gamma_{il} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}n_jn_k + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl}n_jn_k + \delta_{il}\delta_{jk}n_jn_k)$$

soit

$$\Gamma_{il} = (\lambda + \mu)n_in_l + \mu\delta_{il}n_kn_k.$$

Étant donné les relations 4. 37 :

$$\lambda + \mu = \frac{c_{11} + c_{12}}{2}, \qquad \mu = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

il vient

$$\Gamma_{il} = \frac{c_{11} + c_{12}}{2} n_in_l + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} n_kn_k\delta_{il}. \tag{5. 9}$$

Comme $n_kn_k = \vec{n}^2 = 1$

$$\Gamma_{il} = \frac{c_{11} + c_{12}}{2} n_in_l + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \delta_{il}$$

l'équation aux vecteurs propres 5. 6 s'écrit :

$$\frac{c_{11} + c_{12}}{2} n_in_l {}^\circ u_l + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} {}^\circ u_i = \rho V^2 {}^\circ u_i.$$

Elle a l'avantage de se mettre sous la forme vectorielle :

$$\frac{c_{11} + c_{12}}{2} (\vec{n} \cdot {}^\circ\vec{u})\vec{n} = \left(\rho V^2 - \frac{c_{11} - c_{12}}{2}\right) {}^\circ\vec{u}$$

qui met en évidence les deux solutions :

— $\vec{n} \cdot {}^\circ\vec{u} = 0$ qui correspond à une onde transversale dégénérée se propageant à la vitesse $V_T = \sqrt{(c_{11} - c_{12})/2\rho}$;

— ${}^\circ\vec{u} /\!/ \vec{n}$ (lorsque $\vec{n} \cdot {}^\circ\vec{u} \neq 0$) qui correspond à une onde longitudinale se propageant à la vitesse $V_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$ puisque $(\vec{n} \cdot {}^\circ\vec{u})\vec{n} = \vec{n}^2 {}^\circ\vec{u} = {}^\circ\vec{u}$.

Ainsi, dans un solide isotrope, les ondes planes sont longitudinales ou

transversales et leurs vitesses sont indépendantes de la direction de propagation. De plus comme c_{12} est positif :

$$\boxed{V_T < \frac{V_L}{\sqrt{2}}} \qquad (5.\ 10)$$

quel que soit le solide isotrope.

Cette décomposition en deux ondes, cheminant à des vitesses différentes V_L et V_T, s'applique aussi à une onde quelconque (*non plane*). Remontons à l'équation de propagation 5. 2 :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}$$

qui s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \Delta_{il} u_l. \qquad (5.\ 11)$$

L'opérateur différentiel

$$\Delta_{il} = c_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$$

se déduit du tenseur Γ_{il} en remplaçant $n_j n_k$ par $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$.

Effectuons cette substitution dans la relation 5. 9 :

$$\Delta_{il} = \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \delta_{il} \Delta$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ est le laplacien. L'équation 5. 11 devient :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \Delta u_i$$

ou sous forme vectorielle en remarquant que $\frac{\partial u_l}{\partial x_l} = \operatorname{div} \vec{u}$ et $\Delta u_i = (\Delta \vec{u})_i$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \Delta \vec{u}.$$

Remplaçons c_{11} et c_{12} par les vitesses des ondes planes $V_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$ et $V_T = \sqrt{(c_{11} - c_{12})/2\rho}$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = V_T^2 \Delta \vec{u} + (V_L^2 - V_T^2) \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{u}. \qquad (5.\ 12)$$

Il est toujours possible de décomposer le vecteur $\vec{u}$ en un vecteur sans divergence $\vec{u}_T$ et un vecteur irrotationnel $\vec{u}_L$:

$$\vec{u} = \vec{u}_T + \vec{u}_L$$

avec $\operatorname{div} \vec{u}_T = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{u}_L = 0$. L'équation 5. 12 s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_T}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}_L}{\partial t^2} = V_T^2 \Delta \vec{u}_T + V_T^2 \Delta \vec{u}_L + (V_L^2 - V_T^2) \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{u}_L$$

ou en utilisant la relation

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{u}_L = \Delta \vec{u}_L + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{u}_L = \Delta \vec{u}_L$$

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{u}_T}{\partial t^2} - V_T^2 \Delta \vec{u}_T\right) + \left(\frac{\partial^2 \vec{u}_L}{\partial t^2} - V_L^2 \Delta \vec{u}_L\right) = 0.$$

Les deux expressions vectorielles entre parenthèses sont nulles car leur divergence et leur rotationnel sont nuls

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_T}{\partial t^2} - V_T^2 \Delta \vec{u}_T = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{u}_L}{\partial t^2} - V_L^2 \Delta \vec{u}_L = 0.$$

Ces deux équations expriment la propagation des deux composantes $\vec{u}_L$ et $\vec{u}_T$ indépendamment l'une de l'autre avec des vitesses respectives V_L et V_T. Dans le cas général, il y a propagation simultanée d'une onde de dilatation (avec une variation relative de volume égale à $\operatorname{div} \vec{u}_L$) à la vitesse V_L et d'une onde de cisaillement ($\operatorname{div} \vec{u}_T = 0$) à la vitesse V_T.

5. 1. 5. — *Flux d'énergie élastique*

La propagation d'une onde élastique est accompagnée d'un transport d'énergie. Nous montrons dans ce paragraphe que ce transport d'énergie peut être interprété comme le flux d'un vecteur de Poynting égal à la densité de puissance élastique par unité de surface et nous calculons, dans le cas d'une onde plane, les composantes du vecteur vitesse d'énergie égal au quotient du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie par unité de volume.

5. 1. 5. 1. Vecteur de Poynting. — L'énergie cinétique due au mouvement de matière apparaît dans l'expression 4. 29 du travail des forces extérieures au solide de volume v_0 :

$$\delta W = \int_{v_0} \left(\rho g_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\right) du_i \, dv + \int_{v_0} T_{ik} d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) dv$$

En effet, en élasticité dynamique, la densité de force par unité de volume $\rho g_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ n'est plus nulle :

$$\rho g_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

$$\delta W = \int_{v_0} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} du_i \, dv + \int_{v_0} T_{ik} \, dS_{ik} \, dv.$$

Comme du_i représente le déplacement pendant le temps dt : $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt$ le premier terme s'écrit :

$$\int_{v_0} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial t} dt \, dv = \int_{v_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \right] dt \, dv = \int_{v_0} \frac{\partial \mathscr{E}_c}{\partial t} dt \, dv$$

en désignant par

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \quad (5.\ 13)$$

la densité d'énergie cinétique par unité de volume. Le travail des forces agissant sur le volume v_0 devient

$$\delta W = \int_{v_0} d\mathscr{E}_c \, dv + \int_{v_0} d\Phi \, dv = \int_{v_0} d(\mathscr{E}_c + \Phi) \, dv$$

où $d\Phi = T_{ik} \, dS_{ik}$ est la variation d'énergie potentielle par unité de volume, c'est-à-dire d'énergie interne ($d\mathscr{U}$) si la transformation est isentropique, d'énergie libre ($d\mathscr{F}$) si elle est isotherme. Le travail δW des forces extérieures augmente l'énergie élastique totale $E_0 = \int_{v_0} (\mathscr{E}_c + \Phi) \, dv$ d'une quantité $dE_0 = \delta W$.

L'énergie E contenue dans un volume v intérieur au corps varie au cours du temps, son accroissement dE est égal au travail des tensions mécaniques $T_i(\vec{l})$ exercées en chaque point de la surface de séparation s par la matière qui l'entoure :

$$dE = \int_s T_i(\vec{l}) \, du_i \, ds$$

ou en remplaçant $T_i(\vec{l})$ par $T_{ik} l_k$:

$$dE = \int_s T_{ik} l_k \, du_i \, ds.$$

La variation, par unité de temps, de l'énergie contenue dans le volume v :

$$\frac{dE}{dt} = \int_s T_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial t} l_k \, ds$$

$$\frac{dE}{dt} + \int_s P_k l_k \, ds = 0 \quad (5.\ 14)$$

en introduisant le vecteur $\vec{P}$ de composantes :

$$\boxed{P_k = - T_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial t}}. \quad (5.\ 15)$$

L'équation 5. 14 montre que la variation de l'énergie contenue dans le volume v résulte du flux du vecteur $\vec{P}$ à travers la surface s délimitant le volume v. $\vec{P}$ est le vecteur de Poynting, sa direction est celle du transport d'énergie, sa longueur est égale à la quantité d'énergie traversant, pendant l'unité de temps, l'unité de surface perpendiculaire au flux d'énergie (densité de puissance). En appelant V^e la vitesse de transport de l'énergie et $\mathscr{E}$ la densité d'énergie totale par unité de volume : $P = \mathscr{E} V^e$; le vecteur vitesse d'énergie, parallèle à $\vec{P}$, a pour expression :

$$\vec{V^e} = \frac{\vec{P}}{\mathscr{E}}. \quad (5.\ 16)$$

5. 1. 5. 2. — Vitesse d'énergie d'une onde élastique plane. — Dans le cas d'une onde élastique plane le déplacement u_i obéit à la relation 5. 3; en portant

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = {}^\circ u_i F' \quad (5.\ 17)$$

dans 5. 13, la densité d'énergie cinétique s'exprime par :

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2} \rho {}^\circ u_i^2 F'^2. \quad (5.\ 18)$$

La densité d'énergie potentielle (formule 4. 34) :

$$\Phi = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$$

devient, en remplaçant

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - n_j {}^\circ u_i \frac{F'}{V} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = - n_k {}^\circ u_l \frac{F'}{V} \quad (5.\ 19)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} c_{ijkl} n_j n_k {}^\circ u_i {}^\circ u_l \frac{F'^2}{V^2}.$$

Par ailleurs l'équation, de Christoffel 5. 4, contractée avec ${}^\circ u_i$, fournit :

$$c_{ijkl} n_j n_k {}^\circ u_l {}^\circ u_i = \rho V^2 {}^\circ u_i^2. \quad (5.\ 20)$$

L'énergie potentielle a donc pour expression :

$$\Phi = \frac{1}{2}\,\rho^\circ u_i^2 F'^2. \qquad (5.\,21)$$

La comparaison de 5. 18 et 5. 21 montre que *l'énergie potentielle et l'énergie cinétique d'une onde plane sont égales.* La densité d'énergie totale est :

$$\mathscr{E} = \rho^\circ u_i^2 F'^2. \qquad (5.\,22)$$

Le vecteur de Poynting

$$P_i = -\,T_{ij}\,\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\,c_{ijkl}\,\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_j}{\partial t}$$

s'écrit, compte tenu des relations 5. 17 et 5. 19

$$P_i = c_{ijkl}\,{}^\circ u_j {}^\circ u_l\,\frac{n_k}{V}\,F'^2.$$

La vitesse d'énergie s'obtient en divisant P_i par la densité d'énergie $\mathscr{E}$:

$$V_i^e = \frac{c_{ijkl}\,{}^\circ u_j {}^\circ u_l n_k}{\rho^\circ u_i^2 V} \qquad (5.\,23)$$

et en prenant un vecteur déplacement unitaire :

$$\boxed{V_i^e = c_{ijkl}\,\frac{{}^\circ u_j {}^\circ u_l n_k}{\rho V}} \qquad \text{avec} \qquad {}^\circ u_i^2 = 1. \qquad (5.\,24)$$

La vitesse d'énergie $\overrightarrow{V^e}$ indique la direction du transport d'énergie c'est-à-dire celle du *rayon acoustique. Lorsque ce rayon est perpendiculaire aux plans d'ondes — donc parallèle à $\vec{n}$ — le mode de propagation est qualifié de « pur »* (*). Ces directions de mode pur sont importantes. Les cristaux utilisés dans les applications, par exemple les lignes à retard ont la forme de cylindres ou de parallélépipèdes droits allongés portant à chaque extrémité un transducteur (fig. 9. 2). Pour que le faisceau émis par l'un des transducteurs soit recueilli par l'autre il faut que le vecteur de Poynting soit parallèle à l'axe du barreau c'est-à-dire au vecteur d'onde perpendiculaire aux faces extrêmes du cristal. La recherche systématique de ces directions de mode pur a été effectuée pour les cristaux des systèmes cubique, hexagonal et quadratique [4].

(*) De nombreux auteurs anglo-saxons désignent par « pure mode » une onde dont la polarisation est rigoureusement longitudinale ou transversale (cf. référence 3). Ces deux définitions coïncident seulement dans le cas d'une onde longitudinale (voir exercice 5. 2 et exemple qui suit).

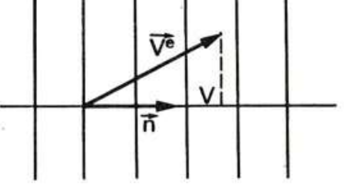
Formons le produit scalaire

$$\overrightarrow{V^e}\,.\,\vec{n} = V_i^e n_i = \frac{c_{ijkl}\,{}^\circ u_j {}^\circ u_l n_i n_k}{\rho^\circ u_i^2 V}$$

et remplaçons le numérateur par l'expression 5. 20 :

$$\boxed{\overrightarrow{V^e}\,.\,\vec{n} = V}\,. \qquad (5.\,25)$$

Cette relation montre que la projection de la vitesse d'énergie sur la direction de propagation est égale à la vitesse de phase de l'onde plane (fig. 5. 8). V^e est donc toujours supérieur (ou égal) à V.



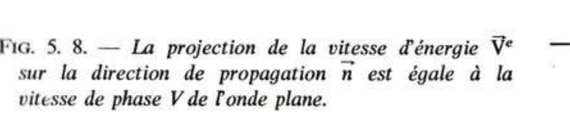


FIG. 5. 8. — *La projection de la vitesse d'énergie $\overrightarrow{V^e}$ sur la direction de propagation $\vec{n}$ est égale à la vitesse de phase V de l'onde plane.*

Il est intéressant de comparer cette vitesse d'énergie à la *vitesse de groupe* V^g définie au paragraphe 1. 1. 3 par la relation 1. 10 :

$$V^g = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Ici dans l'espace à trois dimensions les composantes de la vitesse de groupe $\overrightarrow{V^g}$ sont :

$$V_j^g = \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \qquad \text{avec} \qquad k_j = kn_j.$$

La résolution de l'équation séculaire 5. 7 :

$$|\,c_{ijkl} n_j n_k - \rho V^2 \delta_{il}\,| = 0 \qquad (5.\,26)$$

fournit la dépendance entre la vitesse de phase V et la direction de propagation n_j :

$$V = f(n_j).$$

La multiplication de 5. 26 par k^6, c'est-à-dire de chaque ligne du déterminant par k^2 :

$$|\,c_{ijkl} kn_j kn_k - \rho k^2 V^2 \delta_{il}\,| = 0$$

met en évidence la même relation entre $\omega = kV$ et $k_j = kn_j$:

$$\omega = f(k_j)$$

et par conséquent

$$V_j^g = \frac{\partial \omega}{\partial k_j} = \frac{\partial V}{\partial n_j}. \tag{5. 27}$$

Calculons $\partial V/\partial n_j$ en dérivant V^2 tiré de la formule 5. 20 :

$$2V \frac{\partial V}{\partial n_j} = 2c_{ijkl} \frac{n_k {}^\circ u_i {}^\circ u_l}{\rho {}^\circ u_i^2}$$

d'où :

$$V_j^g = \frac{\partial V}{\partial n_j} = c_{ijkl} \frac{n_k {}^\circ u_i {}^\circ u_l}{\rho {}^\circ u_i^2 V}. \tag{5. 28}$$

la vitesse de groupe $\overrightarrow{V^g}$ est égale à la vitesse de transport de l'énergie $\overrightarrow{V^e}$ donnée par la formule 5. 23.

Remarquons que la relation $\overrightarrow{V^e} . \vec{n} = V$ résulte du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes : si f est une fonction homogène en n_i de rang p :

$$n_i \frac{\partial f}{\partial n_i} = pf$$

or la relation $\omega = Vk = f(kn_i)$ montre que $V = f(n_i)$ est une fonction homogène en n_i de degré 1 :

$$n_i \frac{\partial V}{\partial n_i} = V \quad \Rightarrow \quad \vec{n} . \overrightarrow{V^e} = V.$$

Ce théorème appliqué à $V_i^e = \dfrac{\partial V}{\partial n_i}$, fonction homogène en n_i de degré zéro, montre que :

$$n_k \frac{\partial V_i^e}{\partial n_k} = 0.$$

Exemple. — Afin de concrétiser cette notion de vitesse d'énergie, cherchons la direction du rayon acoustique pour une propagation le long d'un axe d'ordre 3, celui du *corindon* (classe $\bar{3}m$) par exemple. La matrice $c_{\alpha\beta}$ est donnée sur la figure 4. 6. Comme $n_k = \delta_{k3}$, la vitesse d'énergie déduite de la formule 5. 24 est :

$$V_i^e = \frac{c_{ij3l} {}^\circ u_j {}^\circ u_l}{\rho V}. \tag{5. 29}$$

Pour l'onde longitudinale se propageant à la vitesse $V_1 = \sqrt{c_{33}/\rho}$ (paragr. 5. 1. 3)

$${}^\circ u_i = \delta_{i3} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{V^e} \begin{cases} \dfrac{c_{53}}{\rho V_1} = 0 \\ \dfrac{c_{43}}{\rho V_1} = 0 \\ \dfrac{c_{33}}{\rho V_1} = V_1. \end{cases}$$

Ce mode longitudinal est pur.

Pour l'onde transversale dégénérée de vitesse $V_2 = \sqrt{c_{44}/\rho}$ le déplacement est arbitraire dans le plan Ox_1x_2 (fig. 5. 9) :

$$u_1 = \cos \varphi \qquad u_2 = \sin \varphi \qquad u_3 = 0.$$

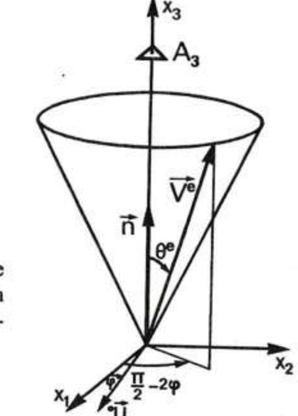


Fig. 5. 9. — *Propagation suivant un axe ternaire.*

La vitesse d'énergie $\overrightarrow{V^e}$ de l'onde transversale dégénérée de polarisation ${}^\circ\vec{u}$ fait un angle constant θ^e avec la direction de propagation $\vec{n}$ portée par l'axe ternaire. Pour le corindon $\theta^e = 9°$.

Le développement de l'expression 5. 29 :

$$\rho V_2 V_i^e = c_{i131} \cos^2 \varphi + (c_{i132} + c_{i231}) \cos \varphi \sin \varphi + c_{i232} \sin^2 \varphi$$

fournit les composantes de la vitesse d'énergie :

$$\begin{cases} \rho V_2 V_1^e = c_{15} \cos^2 \varphi + (c_{14} + c_{56}) \cos \varphi \sin \varphi + c_{46} \sin^2 \varphi \\ \rho V_2 V_2^e = c_{56} \cos^2 \varphi + (c_{46} + c_{25}) \cos \varphi \sin \varphi + c_{24} \sin^2 \varphi \\ \rho V_2 V_3^e = c_{55} \cos^2 \varphi + (c_{54} + c_{45}) \cos \varphi \sin \varphi + c_{44} \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

Compte tenu de la nullité des constantes c_{15}, c_{46}, c_{25} et c_{45} et des relations $c_{56} = c_{14} = -c_{24}$ et $c_{55} = c_{44}$ il vient :

$$\begin{cases} \rho V_2 V_1^e = c_{14} \sin 2\varphi \\ \rho V_2 V_2^e = c_{14} \cos 2\varphi \\ \rho V_2 V_3^e = c_{44} \end{cases} \Rightarrow \quad \overrightarrow{V^e} \begin{cases} V_1^e = \dfrac{c_{14}}{\rho V_2} \sin 2\varphi \\ V_2^e = \dfrac{c_{14}}{\rho V_2} \cos 2\varphi \\ V_3^e = \dfrac{c_{44}}{\rho V_2}. \end{cases}$$

L'angle θ^e entre $\overrightarrow{V^e}$ et l'axe ternaire est indépendant de φ :

$$\operatorname{tg} \theta^e = \frac{|c_{14}|}{c_{44}} \tag{5. 30}$$

par conséquent, le vecteur vitesse d'énergie décrit un cône d'angle au som-

met θ^e lorsque la polarisation de l'onde transversale tourne dans le plan Ox_1x_2 (fig. 5. 9). Dans le cas du corindon :

$$c_{14} = -2{,}35 \cdot 10^{10}\ \text{N/m}^2 \qquad c_{44} = 14{,}74 \cdot 10^{10}\ \text{N/m}^2 \quad \Rightarrow \quad \theta^e = 9^\circ.$$

L'axe ternaire est le seul exemple d'axe de symétrie qui ne soit pas une direction de propagation de modes purs. En effet pour $n = 2$, 4 et 6 le module c_{14} est nul ce qui entraîne $\theta^e = 0$.

5. 1. 6. — Surfaces caractéristiques

De même que la surface des indices et la surface d'ondes sont utilisées en optique cristalline, plusieurs surfaces caractéristiques sont utilisées pour illustrer les phénomènes de propagation des ondes élastiques dans les cristaux.

5. 1. 6. 1. — Définitions et propriétés. — Portons à partir d'une origine O et perpendiculairement aux plans d'onde un vecteur de longueur égale à la vitesse de phase V. Le lieu, lorsque la direction de propagation varie, de l'extrémité de ce vecteur $\vec{\mathcal{V}} = \mathrm{V}\vec{n}$ est appelé *surface des vitesses;* elle est en général formée de trois nappes : une pour l'onde quasi longitudinale (nappe V_1) et deux pour les ondes quasi transversales (nappes V_2 et V_3). Comme dans chaque direction l'onde quasi longitudinale est ordinairement plus rapide (*) que les ondes quasi transversales, la nappe V_1 entoure les nappes V_2 et V_3 sans jamais les couper. Par contre les nappes V_2 et V_3 ont des points communs dans les directions des axes acoustiques, par exemple suivant un axe de rotation d'ordre $p > 2$. Dans le cas d'un milieu isotrope, la surface des vitesses est constituée de deux sphères de rayon V_L et V_T.

La surface des lenteurs (L) est le lieu des extrémités du vecteur $\vec{\mathrm{L}} = \vec{n}/\mathrm{V}$ mené d'un point fixe O. Comme $\vec{\mathrm{L}}$ et $\vec{\mathcal{V}}$ sont colinéaires et $\mathrm{LV} = 1$, surface des lenteurs et surface des vitesses se correspondent dans l'inversion de pôle O et de puissance 1. La surface des lenteurs, analogue à la surface des indices en optique, joue un rôle important dans les problèmes de réflexion et de réfraction des ondes élastiques qui font l'objet du paragraphe 5. 2. Par ailleurs, cette surface a le mérite de fournir, en plus de la vitesse de phase, la direction du déplacement d'énergie. En effet, si $\vec{\mathrm{L}}$ et $\vec{\mathrm{L}} + \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}$ sont les rayons vecteurs dans les directions infiniment voisines $\vec{n}$ et $\vec{n} + \mathrm{d}\vec{n}$, le vecteur

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = \frac{\partial \vec{\mathrm{L}}}{\partial n_k}\,\mathrm{d}n_k$$

est tangent à la surface des lenteurs (fig. 5. 10). Or la contraction de

$$\frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial n_k} = \frac{\partial\left(\dfrac{n_i}{\mathrm{V}}\right)}{\partial n_k} = \frac{\delta_{ik}}{\mathrm{V}} - \frac{n_i}{\mathrm{V}^2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_k}$$

(*) Il existe des exceptions, par exemple TeO_2 (fig. 5. 20).

avec les composantes V_i^e de la vitesse d'énergie donne :

$$\mathrm{V}_i^e \frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial n_k} = \frac{1}{\mathrm{V}}\left(\mathrm{V}_k^e - \frac{\mathrm{V}_i^e n_i}{\mathrm{V}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_k}\right).$$

En se souvenant des relations 5. 25 : $\mathrm{V}_i^e n_i = \mathrm{V}$ et 5. 28 : $\mathrm{V}_k^e = \mathrm{V}_k^g = \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_k}$ il vient

$$\mathrm{V}_i^e \frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial n_k} = 0$$

et

$$\vec{\mathrm{V}^e} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = \mathrm{V}_i^e \frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial n_k}\,\mathrm{d}n_k = 0 \qquad \forall\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}.$$

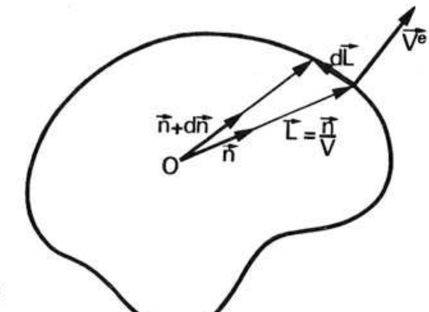


FIG. 5. 10. — *Surface des lenteurs et vitesse d'énergie.* La vitesse d'énergie est en tout point normale à la surface des lenteurs : $\vec{\mathrm{V}^e} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = 0$.

Cette relation d'orthogonalité s'appliquant à tous les vecteurs $\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}$ du plan tangent à la surface des lenteurs, *la vitesse d'énergie est en tout point normale à la surface des lenteurs.* Comme la précédente, cette surface est constituée de trois nappes mais cette fois la nappe correspondant à l'onde quasi longitudinale est tout entière à l'intérieur des nappes des ondes quasi transversales.

La troisième surface, appelée *surface d'onde*, est le lieu, lorsque la direction de propagation varie, des extrémités du vecteur vitesse d'énergie $\vec{\mathrm{V}^e}$ lié à un point O. Le rayon vecteur joignant l'origine O à un point de la surface d'onde R représente la distance parcourue par l'énergie élastique pendant l'unité de temps. Par conséquent la surface d'onde est l'ensemble des points atteints à l'instant unité par la vibration émise, à l'instant zéro, par une source ponctuelle de vibrations élastiques placée en O. C'est aussi une surface équiphase puisque tous les points se mettent à osciller au même instant. Cette surface possède d'autres propriétés remarquables; la direction de propagation d'une onde plane de vitesse d'énergie $\vec{\mathrm{V}^e}$ est normale à la surface d'onde au point correspondant. En effet les relations :

$$\vec{\mathrm{V}^e} \cdot \vec{\mathrm{L}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathrm{V}^e} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = 0$$

entraînent

$$\vec{L} \cdot \overrightarrow{dV^e} = 0$$

ou encore

$$\vec{n} \, . \, \overrightarrow{dV^e} = 0 \qquad \text{puisque} \qquad \vec{L} = \frac{\vec{n}}{V}$$

$\vec{n}$ est donc perpendiculaire à tous les vecteurs $\overrightarrow{dV^e}$ du plan tangent à la surface d'onde à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{V^e}$ (fig. 5. 11).

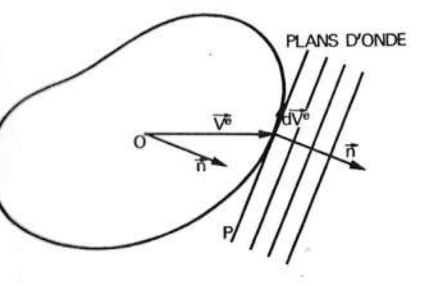
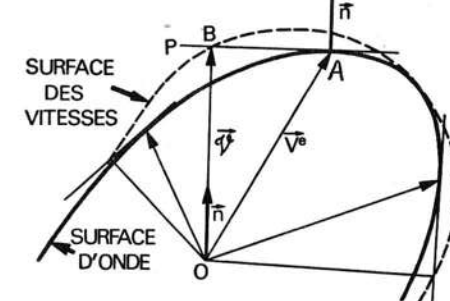


FIG. 5. 11. — *Surface d'onde et direction de propagation.* Le plan d'onde P est tangent à la surface d'onde à l'extrémité du vecteur d'énergie $\vec{V}^e$.

On passe facilement de la surface d'onde à la surface des vitesses et inversement (fig. 5. 12). Menons du point A le plan tangent P à la surface d'onde R. La relation $\overrightarrow{V^e} \, . \, \vec{n} = V$ montre que la vitesse de phase V est la projection du rayon vecteur $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V^e}$ sur la normale à la surface d'onde $\vec{n}$. Par conséquent l'extrémité B du vecteur $\overrightarrow{\mathscr{V}}$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan P. La surface des vitesses est donc la podaire de la surface d'onde par rapport à l'origine O, c'est-à-dire le lieu de la projection orthogonale du point O sur les plans tangents à la surface d'onde. Inversement la surface d'onde est l'enveloppe de la famille des plans perpendiculaires à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{\mathscr{V}}$ lié au point O.



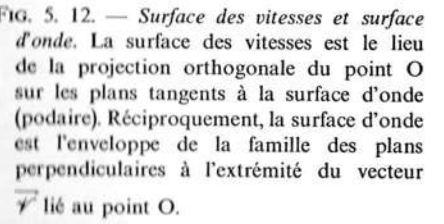


FIG. 5. 12. — *Surface des vitesses et surface d'onde.* La surface des vitesses est le lieu de la projection orthogonale du point O sur les plans tangents à la surface d'onde (podaire). Réciproquement, la surface d'onde est l'enveloppe de la famille des plans perpendiculaires à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{\mathscr{V}}$ lié au point O.

5. 1. 6. 2. — Exemples de surface des lenteurs. — Les exemples qui suivent décrivent la surface des lenteurs de quelques cristaux. Il n'est possible de dessiner sur une feuille que les intersections de cette surface avec un plan. Si le plan de section est un plan de symétrie pour les propriétés élastiques (miroir ou plan perpendiculaire à un axe d'ordre pair), la surface est symétrique par rapport à ce plan qui contient donc la normale. La direction de propagation est repérée par les deux angles polaires θ et φ comme l'indique la figure 5. 13 :

$$n_1 = \sin\theta \cos\varphi \qquad n_2 = \sin\theta \sin\varphi \qquad n_3 = \cos\theta. \tag{5. 31}$$

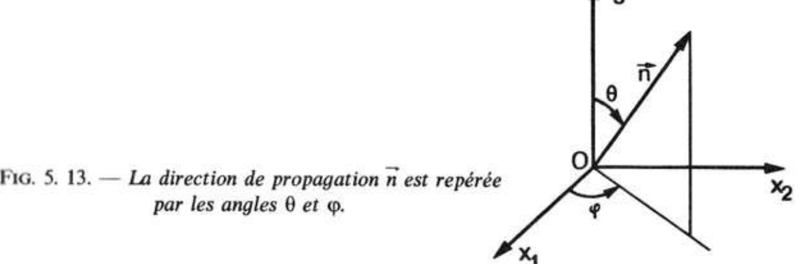


FIG. 5. 13. — *La direction de propagation $\vec{n}$ est repérée par les angles θ et φ.*

L'équation séculaire ne peut être résolue analytiquement que pour des directions ou des plans particuliers pour lesquels au moins deux des trois composantes non diagonales du tenseur Γ_{il} sont nulles. Le déterminant se factorise alors en un produit de polynômes de degré un ou deux en V^2 (paragr. 3. 5).

a) SYSTÈME CUBIQUE. — Le développement 5. 8 des composantes du tenseur de propagation Γ_{il} se simplifie en tenant compte de l'expression 4. 45 de la matrice $c_{\alpha\beta}$ des cristaux du système cubique :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= c_{11}n_1^2 + c_{44}(n_2^2 + n_3^2) \\
\Gamma_{21} = \Gamma_{12} &= (c_{12} + c_{44})n_1 n_2 \\
\Gamma_{31} = \Gamma_{13} &= (c_{12} + c_{44})n_1 n_3 \\
\Gamma_{22} &= c_{44}(n_1^2 + n_3^2) + c_{11}n_2^2 \\
\Gamma_{32} = \Gamma_{23} &= (c_{12} + c_{44})n_2 n_3 \\
\Gamma_{33} &= c_{44}(n_1^2 + n_2^2) + c_{11}n_3^2.
\end{aligned} \tag{5. 32}$$

De plus si la propagation a lieu dans *le plan d'une face du cube*, par exemple (001) :

$$n_1 = \cos\varphi, \quad n_2 = \sin\varphi, \quad n_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{13} = \Gamma_{23} = 0$$

le tenseur Γ_{il} a l'aspect suivant

$$\Gamma_{il} = \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{11} = c_{11}\cos^2\varphi + c_{44}\sin^2\varphi \qquad \Gamma_{12} = (c_{12} + c_{44})\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\Gamma_{22} = c_{11}\sin^2\varphi + c_{44}\cos^2\varphi \qquad \Gamma_{33} = c_{44}.$$

Quelle que soit la direction de propagation dans le plan (001), il existe une onde transversale polarisée suivant Ox_3 et de vitesse $V_3 = \sqrt{c_{44}/\rho}$ indépendante de l'angle φ. Les deux autres vitesses s'obtiennent en résolvant l'équation aux valeurs propres $\gamma = \rho V^2$, d'après la formule 3. 24 :

$$\gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Gamma_{11} - \Gamma_{22})^2 + 4(\Gamma_{12})^2}. \qquad (5.\ 33)$$

En fonction de l'angle φ les vitesses V_1 et V_2 ont pour expression :

$$2\rho V_1^2 = c_{11} + c_{44} + \sqrt{(c_{11} - c_{44})^2\cos^2 2\varphi + (c_{12} + c_{44})^2\sin^2 2\varphi} \qquad (5.\ 34)$$

$$2\rho V_2^2 = c_{11} + c_{44} - \sqrt{(c_{11} - c_{44})^2\cos^2 2\varphi + (c_{12} + c_{44})^2\sin^2 2\varphi}. \qquad (5.\ 35)$$

La polarisation n'est en général ni longitudinale ni transversale. Lorsque $\varphi = 0$ ou $\pi/2$, la vitesse $V_1 = \sqrt{c_{11}/\rho}$ correspond à une onde longitudinale, l'autre, $V_2 = \sqrt{c_{44}/\rho}$, à une onde transversale. Dans les autres directions, les formules 5. 34 et 5. 35 donnent les vitesses V_1 et V_2 des modes quasi longitudinal et quasi transversal.

Les courbes des lenteurs du silicium ont été tracées sur la figure 5. 14 en utilisant les constantes élastiques du tableau 4. 7. Ces courbes présentent la symétrie maximale du système cubique car le tenseur des rigidités, qui est identique pour les cinq classes de ce système, est invariant sous l'action des opérations de la classe d'holoédrie. La vitesse de l'onde quasi transversale est extrémale dans les directions [100] et [110] :

$$V_2[100] = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \qquad V_2[110] = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}}.$$

Le rapport de ces deux valeurs :

$$\frac{V_2[100]}{V_2[110]} = \sqrt{\frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}}$$

caractérise l'anisotropie du cristal du point de vue mécanique. Les courbes du silicium correspondent au cas le plus fréquent où le *facteur d'anisotropie* défini par

$$A = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}} \qquad (5.\ 36)$$

est supérieur à 1 (A(Si) = 1,565). Lorsque A est inférieur à 1, la distorsion des courbes est inversée, c'est le cas de l'oxyde de bismuth et de germanium ($Bi_{12}GeO_{20}$) matériau piézoélectrique (fig. 6. 6). Remarquons que A est égal à 1 pour un corps isotrope.

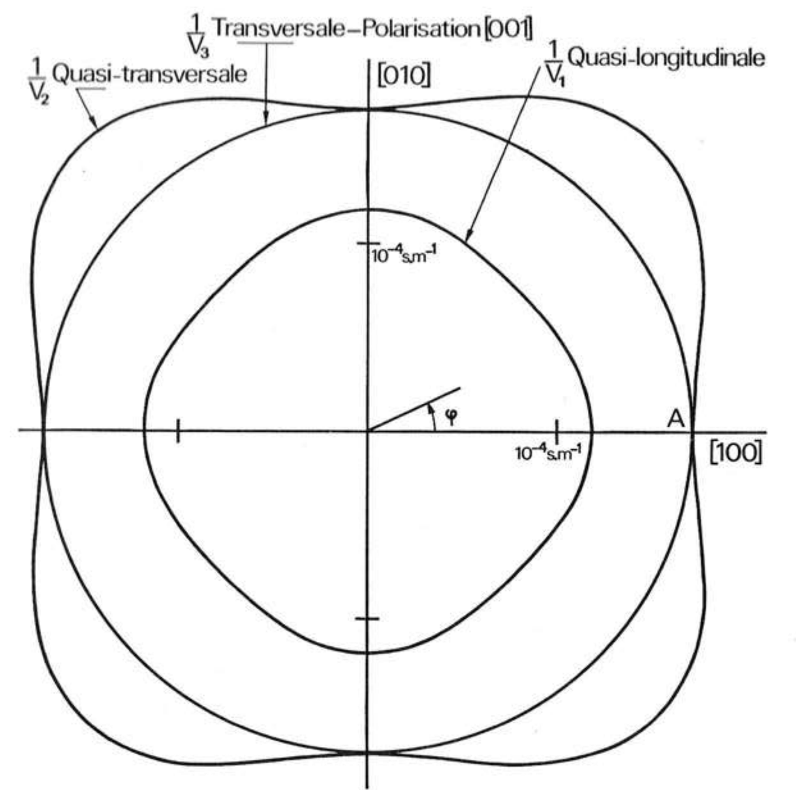


FIG. 5. 14. — *Système cubique. Section de la surface des lenteurs du silicium par le plan (001).* Le point A correspond à une vitesse de 5 843 m/s.

La disposition du trièdre des polarisations change aussi avec la direction de propagation. Les angles β_1 et β_2 avec Ox_1 des vecteurs déplacement quasi longitudinal et quasi transversal sont donnés par la formule 3. 25

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\Gamma_{12}}{\Gamma_{11} - \Gamma_{22}}$$

soit dans le plan (001) d'un cristal du système cubique

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{c_{12} + c_{44}}{c_{11} - c_{44}}\operatorname{tg} 2\varphi. \qquad (5.\ 37)$$

La figure 5. 15 représente la déviation $\beta_1 - \varphi$ du vecteur déplacement quasi longitudinal par rapport à la direction de propagation dans le plan

(001) du silicium. La déviation est maximale pour l'angle $\varphi_M = 18° 52'$ tel que

$$\operatorname{tg} 2\varphi_M = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{44}}{c_{12} + c_{44}}}.$$

La valeur maximale (7° 16′) est égale à

$$\beta_1 - \varphi_M = \frac{\pi}{4} - 2\varphi_M.$$

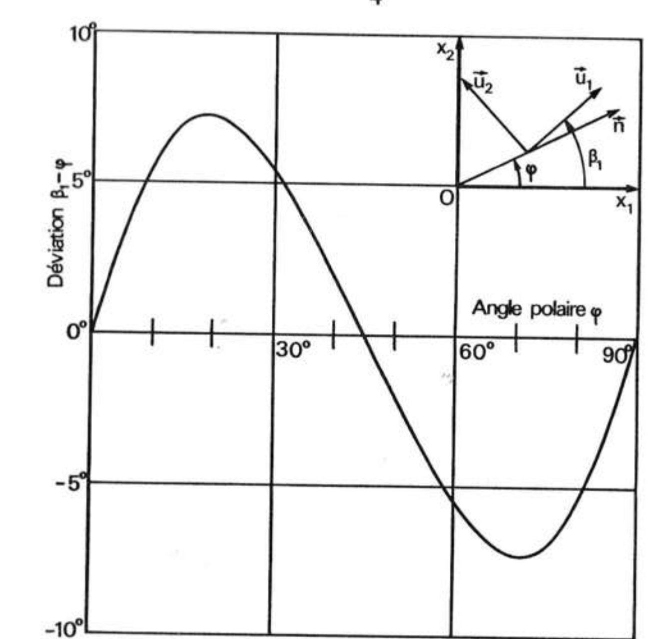


FIG. 5. 15. — *Système cubique. Déviation $\beta_1 - \varphi$ du vecteur déplacement quasi longitudinal par rapport à la direction de propagation dans le plan (001) du silicium.*

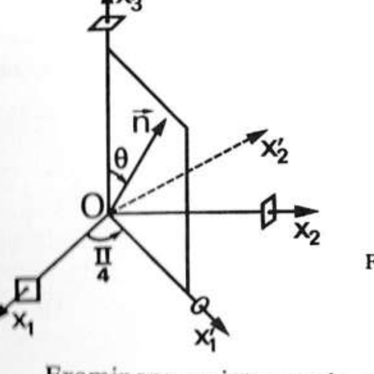


FIG. 5. 16. — *Système cubique. Nouveau repère $Ox'_1x'_2x_3$ utilisé pour calculer les vitesses dans le plan diagonal $(1\bar{1}0)$.*

Examinons maintenant la propagation dans le plan diagonal $(1\bar{1}0)$. Il est commode de se placer dans le repère $Ox'_1x'_2x_3$ déduit des axes cristallographiques $Ox_1x_2x_3$ par rotation de $\pi/4$ autour de Ox_3 (fig. 5. 16). La matrice des rigidités $c'_{\alpha\beta}$ est analogue à celle d'un cristal du système tétragonal, avec $c'_{16} = 0$ car Ox'_1 est porté par un axe binaire. Le développement 5. 8 des composantes Γ'_{il} du tenseur de propagation se réduit, compte tenu du tableau 4. 55 et des valeurs $n'_1 = \sin\theta$, $n'_2 = 0$, $n'_3 = \cos\theta$, à :

$$\Gamma'_{il} = \begin{vmatrix} \Gamma'_{11} & 0 & \Gamma'_{13} \\ 0 & \Gamma'_{22} & 0 \\ \Gamma'_{13} & 0 & \Gamma'_{33} \end{vmatrix}$$

avec

$$\Gamma'_{11} = c'_{11}\sin^2\theta + c'_{44}\cos^2\theta \qquad \Gamma'_{13} = \frac{c'_{13} + c'_{44}}{2}\sin 2\theta$$

$$\Gamma'_{22} = c'_{66}\sin^2\theta + c'_{44}\cos^2\theta \qquad \Gamma'_{33} = c'_{44}\sin^2\theta + c'_{33}\cos^2\theta.$$

Il se propage donc une onde transversale polarisée suivant Ox'_2, *i. e.* $[1\bar{1}0]$ à la vitesse :

$$V_3 = \sqrt{\frac{\Gamma'_{22}}{\rho}} = \sqrt{\frac{c'_{66}\sin^2\theta + c'_{44}\cos^2\theta}{\rho}}$$

et deux ondes, quasi longitudinale et quasi transversale, de vitesses respectives V_1 et V_2 telles que :

$$2\rho V^2_{\frac{1}{2}} = \Gamma'_{11} + \Gamma'_{33} \pm \sqrt{(\Gamma'_{11} - \Gamma'_{33})^2 + 4(\Gamma'_{13})^2}$$

soit en remplaçant les composantes par leurs expressions :

$$2\rho V^2_{\frac{1}{2}} = c'_{44} + c'_{11}\sin^2\theta + c'_{33}\cos^2\theta$$
$$\pm \sqrt{[(c'_{11} - c'_{44})\sin^2\theta + (c'_{44} - c'_{33})\cos^2\theta]^2 + (c'_{13} + c'_{44})^2\sin^2 2\theta}.$$

Les constantes élastiques étant toujours données dans le système des axes cristallographiques, il faut exprimer les $c'_{\alpha\beta}$ en fonction des $c_{\alpha\beta}$ à l'aide de la matrice de changement d'axes

$$\alpha^j_i = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La relation

$$c'_{ijkl} = \alpha^p_i \alpha^q_j \alpha^r_k \alpha^s_l c_{pqrs}$$

conduit à

$$c'_{3333} = c_{3333} \quad \Rightarrow \quad c'_{33} = c_{33} = c_{11}$$

$$c'_{2323} = \alpha_2^1\alpha_2^1 c_{1313} + \alpha_2^2\alpha_2^2 c_{2323} = (\alpha_2^1\alpha_2^1 + \alpha_2^2\alpha_2^2)c_{44} \Rightarrow c'_{44} = c_{44}$$

$$c'_{1133} = \alpha_1^1\alpha_1^1 c_{1133} + \alpha_1^2\alpha_1^2 c_{2233} = (\alpha_1^1\alpha_1^1 + \alpha_1^2\alpha_1^2)c_{13} \Rightarrow c'_{13} = c_{13} = c_{12}$$

$$c'_{1212} = \frac{1}{4}c_{11} + \frac{1}{4}c_{22} - \frac{1}{2}c_{12} \Rightarrow c'_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

$$c'_{1111} = \frac{1}{4}c_{11} + \frac{1}{4}c_{22} + c_{66} + \frac{1}{2}c_{12} \Rightarrow c'_{11} = \frac{c_{11} + c_{12}}{2} + c_{44}.$$

où les expressions des vitesses en fonction des constantes c_{11}, c_{12}, c_{44} :

— pour l'onde transversale :

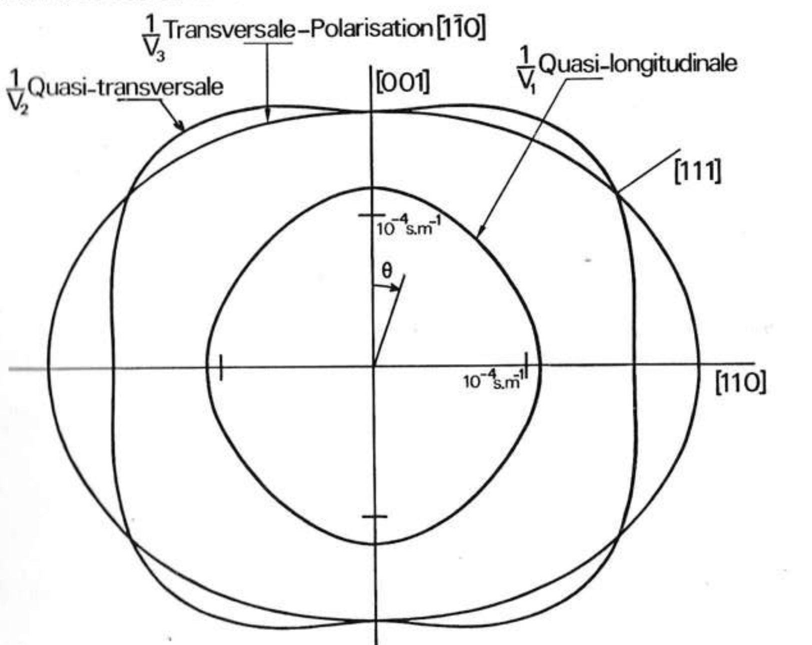
$$V_3 = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}\cos^2\theta + \frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}\sin^2\theta}. \qquad (5.\ 38)$$

— pour les ondes quasi longitudinale (V_1) et quasi transversale (V_2) :

$$V_{\frac{1}{2}}^2 = c_{44} + \left(c_{44} + \frac{c_{11} + c_{12}}{2}\right)\sin^2\theta + c_{11}\cos^2\theta \qquad (5.\ 39)$$

$$\pm\sqrt{\left[\frac{c_{11} + c_{12}}{2}\sin^2\theta + (c_{44} - c_{11})\cos^2\theta\right]^2 + (c_{12} + c_{44})^2\sin^2 2\theta}.$$

s courbes des lenteurs $1/V_1$, $1/V_2$, $1/V_3$ sont tracées sur la figure 5. 17 ujours dans le cas du silicium



IG. 5. 17. — *Système cubique. Section de la surface des lenteurs du silicium par le plan (110)*

Le tableau ci-dessous donne les expressions des vitesses et les polarisations dans des directions de propagation particulières, ainsi que des valeurs numériques pour quelques cristaux du système cubique : silicium, arséniure de gallium (AsGa), aluminium, or, platine.

TABLEAU 5. 18. — *Système cubique*

Direction de propagation	*Polarisation*	*Vitesse*	*Exemples* (ms^{-1})				
			Si	AsGa (*)	Al	Au	Pt
[100]	[100] (L)	$\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}$	8 433	4 735	6 300	3 158	4 025
	plan (100) (T)	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	5 843	3 347	3 236	1 482	1 891
[110]	[110] (L)	$\sqrt{\frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{44}}{2\rho}}$	9 134	5 242	6 450	3 376	4 189
	[1$\bar{1}$0] (T)	$\sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}}$	4 673	2 478	2 935	874	1 498
	[001] (T)	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	5 843	3 347	3 236	1 482	1 891
[111]	[111] (L)	$\sqrt{\frac{c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44}}{3\rho}}$	9 360	5 401	6 496	3 447	4 242
	plan (111) (T)	$\sqrt{\frac{c_{11} - c_{12} + c_{44}}{3\rho}}$	5 085	2 798	3 039	1 114	1 639

(*) Le calcul des vitesses a été effectué en négligeant la piézoélectricité.

b) SYSTÈME TÉTRAGONAL. — Le tenseur de Christoffel est, compte tenu de 5. 8 et 4. 55 :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{44}n_3^2 + 2c_{16}n_1n_2 \\
\Gamma_{12} &= c_{16}(n_1^2 - n_2^2) + (c_{12} + c_{66})n_1n_2 \\
\Gamma_{13} &= (c_{13} + c_{44})n_1n_3 \\
\Gamma_{22} &= c_{66}n_1^2 + c_{11}n_2^2 + c_{44}n_3^2 - 2c_{16}n_1n_2 \\
\Gamma_{23} &= (c_{13} + c_{44})n_2n_3 \\
\Gamma_{33} &= c_{44}(n_1^2 + n_2^2) + c_{33}n_3^2.
\end{aligned} \qquad (5.\ 40)$$

Si la propagation a lieu dans un *plan perpendiculaire à l'axe quaternaire* ($n_1 = \cos\varphi$, $n_2 = \sin\varphi$, $n_3 = 0$) le tenseur Γ_{il} se met sous la forme

$$\Gamma_{il} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$\Gamma_{11} = c_{11}\cos^2\varphi + c_{66}\sin^2\varphi + c_{16}\sin 2\varphi$$

$$\Gamma_{12} = c_{16}\cos 2\varphi + (c_{12} + c_{66})\frac{\sin 2\varphi}{2}$$

$$\Gamma_{22} = c_{66}\cos^2\varphi + c_{11}\sin^2\varphi - c_{16}\sin 2\varphi$$

$$\Gamma_{33} = c_{44}.$$

L'équation séculaire étant identique à celle du système cubique, il existe une onde transversale, polarisée suivant Ox_3, de vitesse $V_3 = \sqrt{c_{44}/\rho}$ et deux ondes polarisées dans le plan (001) dont les vitesses V_1 et V_2 sont données par :

$$2\rho V_{\substack{1\\2}}^2 = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} \pm \sqrt{(\Gamma_{11} - \Gamma_{22})^2 + 4(\Gamma_{12})^2}.$$

En remplaçant Γ_{11}, Γ_{22}, Γ_{12} par leurs expressions en fonction de φ, il vient :

$$2\rho V_{\substack{1\\2}}^2 = c_{11} + c_{66} \pm \sqrt{[(c_{11} - c_{66})\cos 2\varphi + 2c_{16}\sin 2\varphi]^2 + [(c_{12} + c_{66})\sin 2\varphi + 2c_{16}\cos 2\varphi]^2}$$

ou encore

$$2\rho V_{\substack{1\\2}}^2 = c_{11} + c_{66} \pm \sqrt{(c_{11} - c_{66})^2\cos^2 2\varphi + (c_{12} + c_{66})^2\sin^2 2\varphi + 2c_{16}(c_{11} + c_{12})\sin 4\varphi + 4c_{16}^2}. \qquad (5.\,41)$$

La vitesse V_1 (signe +) correspond à l'onde quasi longitudinale, V_2 (signe −) à l'onde quasi transversale.

Pour les cristaux appartenant *aux classes 422, 4mm, $\bar{4}$2m, 4/mmm*, l'annulation du module c_{16} simplifie les formules :

$$2\rho V_{\substack{1\\2}}^2 = c_{11} + c_{66} \pm \sqrt{(c_{11} - c_{66})^2\cos^2 2\varphi + (c_{12} + c_{66})^2\sin^2 2\varphi}. \qquad (5.\,42)$$

C'est le cas du rutile (formule TiO_2, classe 4/*mmm*) dont les courbes des lenteurs ont été tracées sur la figure 5. 19 à partir des constantes du tableau 4. 7. Ces courbes présentent une forte anisotropie en raison de la valeur élevée du rapport

$$A = \frac{2c_{66}}{c_{11} - c_{12}} = 4.$$

La vitesse de l'onde quasi transversale est deux fois plus grande dans la direction [100] que dans la direction [110].

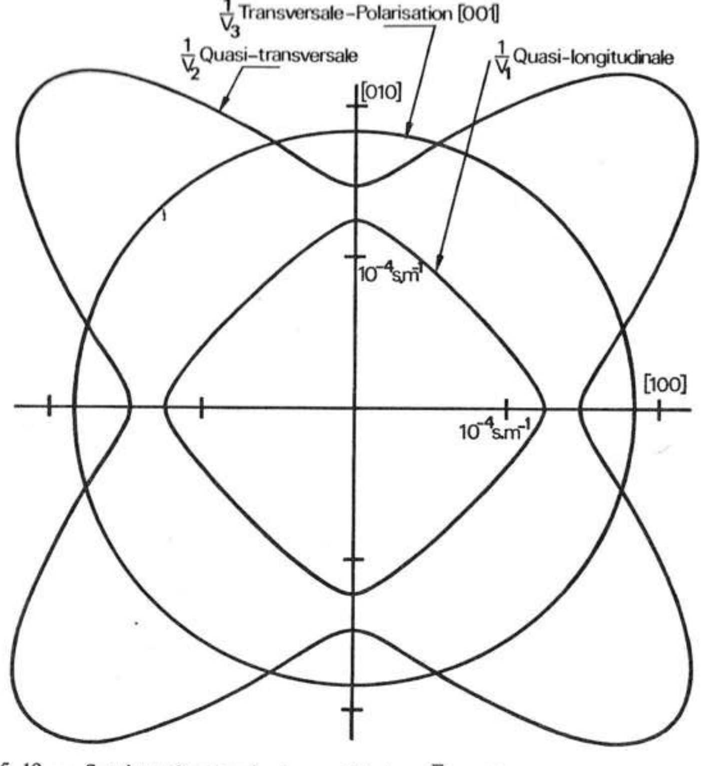


FIG. 5. 19. — *Système tétragonal, classes 422, 4mm, $\bar{4}$2m, 4/mmm. Section de la surface des lenteurs du rutile (4/mmm) par le plan (001).*

Le tableau ci-dessous donne les vitesses dans quelques cristaux appartenant aux classes pour lesquelles $c_{16} = 0$ dans le système des axes cristallographiques : rutile (TiO_2), paratellurite (TeO_2), indium (In).

Pour les cristaux de *symétrie ponctuelle 4, $\bar{4}$, 4/m*, le module c_{16} n'est pas nul. La figure 5. 21 représente les courbes des lenteurs dans le plan (001) du molybdate de plomb (formule PbM_0O_4, classe 4/*m*, constantes élastiques du tableau 4. 7). Ces courbes ont la même allure que celles du rutile tournées dans le plan (001) d'un angle φ_0. Cette ressemblance n'est pas fortuite, elle provient du fait qu'il est possible de se ramener au cas précédent par un changement d'axes qui annule la constante c_{16}. En effet (exercice 5. 5) c'_{16} est nul dans le repère $Ox'_1x'_2x_3$ défini par l'angle $(Ox_1, Ox'_1) = \varphi_0$ tel que

$$\operatorname{tg} 4\varphi_0 = \frac{4c_{16}}{c_{11} - c_{12} - 2c_{56}}. \qquad (5.\,43)$$

Dans les directions Ox_1 et Ox_2 ainsi que suivant leurs bissectrices, les
es polarisées dans le plan (001) sont longitudinales ou transversales; les deux cas ce sont des modes de propagation purs. Pour le molybde plomb $\varphi_0 = -16°$ et les directions de modes purs font des angles $-16°$ et de $+29°$ ($= -16° + 45°$) avec l'axe cristallographique [100].

TABLEAU 5. 20. — *Système tétragonal*, classes 422, 4*mm*, $\bar{4}$2*m*, 4/*mmm*.

Direction de propagation	*Polarisation*	*Vitesse*	*Exemples* (m/s)		
			TiO_2	TeO_2	In
[100]	[100] (L)	$\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}$	8 014	3 050	2 495
	[010] (T)	$\sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}$	6 756	3 317	1 290
	[001] (T)	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	5 424	2 100	946
[110]	[110] (L)	$\sqrt{\frac{c_{11}+c_{12}+2c_{66}}{2\rho}}$	9 923	4 663	2 740
	[1$\bar{1}$0] (T)	$\sqrt{\frac{c_{11}-c_{12}}{2\rho}}$	3 378	616	603
	[001] (T)	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	5 424	2 100	946
[001]	[001] (L)	$\sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}$	10 671	4 200	2 490
	plan (001) (T)	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	5 424	2 100	946

arquer que dans la direction [100] l'onde transversale est plus rapide que l'onde longitudinale dans la paratellurite (TeO_2)

En résumé, pour ces derniers cristaux, les vitesses peuvent être calculées deux méthodes :

— à partir des constantes $c_{\alpha\beta}$ données dans le système des axes crisographiques à l'aide des formules complètes 5. 41.

— en effectuant un changement d'axes pour annuler c_{16} et en utilisant formules simplifiées 5. 42 avec les nouvelles constantes $c'_{\alpha\beta}$ et l'angle aire φ' repéré par rapport à Ox'_1.

La deuxième méthode a l'avantage de fournir les directions des modes s et des expressions simples des vitesses dans ces directions importantes

en pratique, par exemple suivant Ox_1, $V_1 = \sqrt{c_{11}/\rho}$ et $V_2 = \sqrt{c_{66}/\rho}$ soit pour le molybdate de plomb $V_1 = 3\,780$ ms^{-1} et $V_2 = 2\,460$ ms^{-1}.

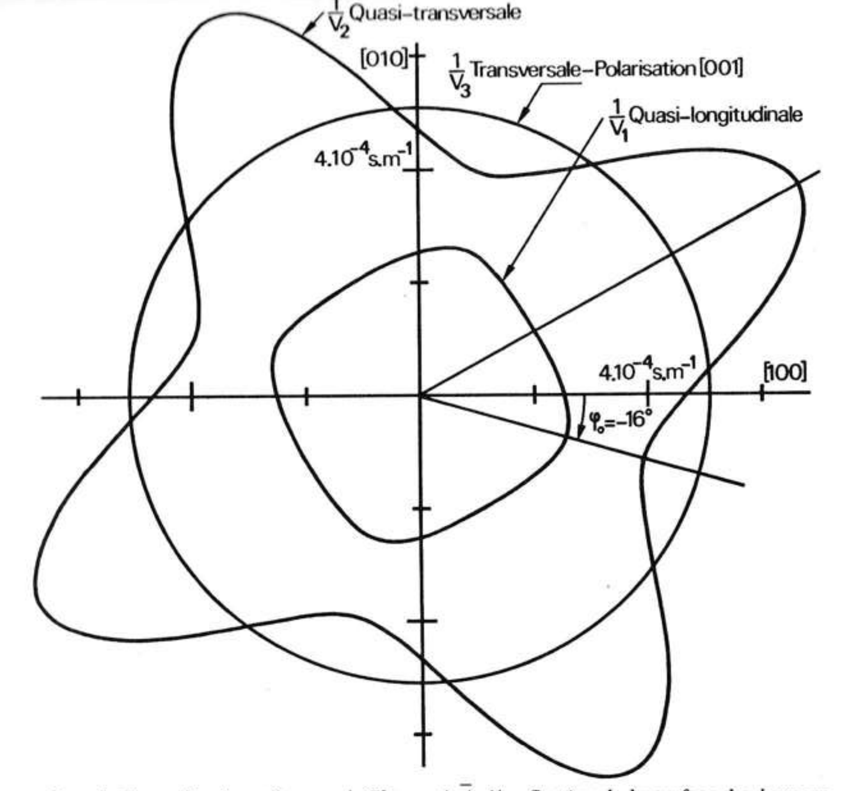


FIG. 5. 21. — *Système tétragonal. Classes 4, $\bar{4}$, 4/m. Section de la surface des lenteurs du molybdate de plomb (4/m) par le plan (001).*

c) SYSTÈME HEXAGONAL. — Dans un cristal du système hexagonal tous les plans passant par l'axe sénaire (plans méridiens) sont équivalents du point de vue des propriétés élastiques (cf. exercice 4. 4). Les surfaces caractéristiques sont des surfaces de révolution autour de cet axe de rotation. Pour la même raison, *dans un plan perpendiculaire à l'axe, les vitesses sont indépendantes de la direction de propagation.* Pour les calculer explicitons le tenseur Γ_{il} d'un cristal du système hexagonal :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{44}n_3^2 \\
\Gamma_{12} &= (c_{12} + c_{66})n_1 n_2 \\
\Gamma_{13} &= (c_{13} + c_{44})n_1 n_3 \qquad \text{avec} \qquad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}. \qquad (5.\ 44) \\
\Gamma_{22} &= c_{66}n_1^2 + c_{11}n_2^2 + c_{44}n_3^2 \\
\Gamma_{23} &= (c_{13} + c_{44})n_2 n_3 \\
\Gamma_{33} &= c_{44}(n_1^2 + n_2^2) + c_{33}n_3^2
\end{aligned}$$

est simple de choisir la direction [100] pour laquelle Γ est diagonal :

$$\Gamma = \begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix}.$$

Dans *le plan (001)* peuvent donc se propager :

— une onde longitudinale à la vitesse $V_1 = \sqrt{c_{11}/\rho}$;

— une onde transversale polarisée dans le plan, de vitesse $V_2 = \sqrt{c_{66}/\rho}$;

— une onde transversale de polarisation parallèle à l'axe A_6 et de esse $V_3 = \sqrt{c_{44}/\rho}$.

s courbes des lenteurs sont des *cercles* de rayons $\sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}}, \sqrt{\frac{\rho}{c_{66}}}, \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}$.

Dans un *plan méridien*, les vitesses dépendent de l'angle θ entre l'axe aire (Ox_3) et la direction de propagation $\vec{n}$. Si nous choisissons le n Ox_2x_3 :

$$n_1 = 0 \qquad n_2 = \sin\theta \qquad n_3 = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{13} = 0.$$

tenseur de propagation s'écrit :

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ 0 & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}$$

ec

$$_1 = c_{66}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta \qquad \Gamma_{22} = c_{11}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta$$
$$_3 = (c_{13} + c_{44})\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma_{33} = c_{44}\sin^2\theta + c_{33}\cos^2\theta. \qquad (5.45)$$

Une onde transversale dont la polarisation est perpendiculaire au plan ridien se propage à la vitesse

$$= \sqrt{\frac{\Gamma_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{c_{66}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta}{\rho}} \qquad \text{avec} \qquad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}. \qquad (5.46)$$

Les vitesses des deux autres modes, polarisés dans le plan méridien, t données par :

$$2\rho V_{\frac{1}{2}}^2 = \Gamma_{22} + \Gamma_{33} \pm \sqrt{(\Gamma_{22} - \Gamma_{33})^2 + 4\Gamma_{23}^2}.$$

reportant les valeurs 5. 45 de Γ_{22}, Γ_{23}, Γ_{33} en fonction de θ, il vient ur l'onde quasi longitudinale :

$$V_1^2 = c_{44} + c_{11}\sin^2\theta + c_{33}\cos^2\theta \qquad (5.47)$$
$$+ \sqrt{[(c_{11} - c_{44})\sin^2\theta + (c_{44} - c_{33})\cos^2\theta]^2 + (c_{13} + c_{44})^2\sin^2 2\theta}$$

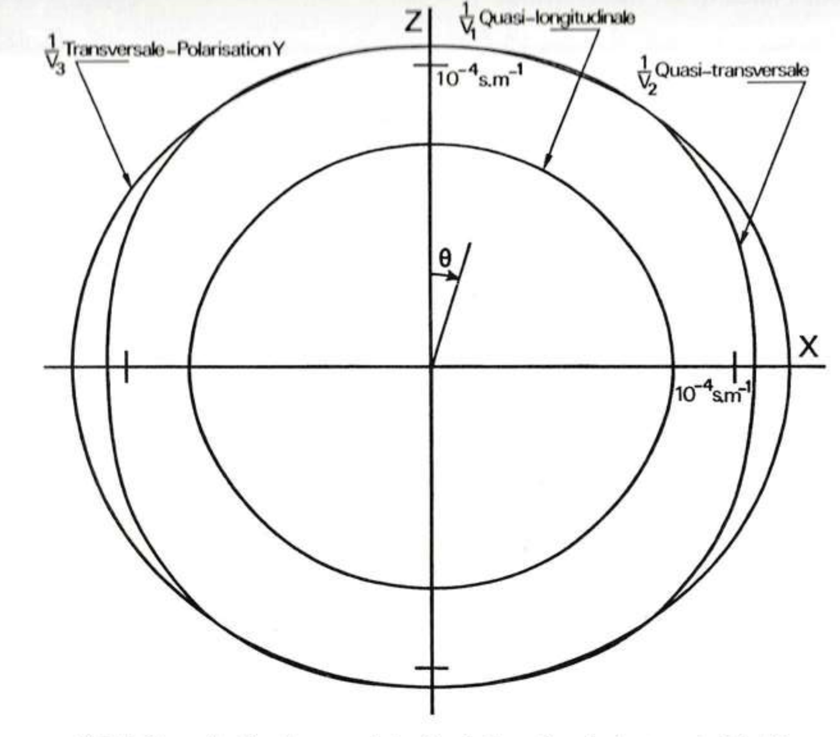


FIG. 5. 22. — *Système hexagonal. Section de la surface des lenteurs du béryllium par un plan méridien.*

TABLEAU 5. 23. — *Système hexagonal*

Direction de propagation	*Polarisation*	*Vitesse*	*Exemples* (ms^{-1})	
			Be	Ti
Z	Z(L)	$\sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}$	13 490	6 330
	Plan ⊥ Z(T)	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	9 380	3 220
Perpendiculaire à l'axe Z	Longitudinale	$\sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}$	12 580	6 000
	Transversale ⊥ Z	$\sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}}$	8 480	2 795
	Transversale // Z	$\sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$	9 380	3 220

our l'onde quasi transversale :

$$\ldots V_2^2 = c_{44} + c_{11} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta \qquad (5.48)$$
$$- \sqrt{[(c_{11} - c_{44}) \sin^2 \theta + (c_{44} - c_{33}) \cos^2 \theta]^2 + (c_{13} + c_{44})^2 \sin^2 2\theta}.$$

Les courbes de la figure 5. 22, qui représentent la section de la sur- des lenteurs du béryllium par un plan méridien, ont été calculées à tir des constantes du tableau 4. 7. Les valeurs numériques mentionnées s le tableau 5. 23 se rapportent au béryllium (Be) et au titane (Ti).

d) SYSTÈME TRIGONAL. — Le calcul, lorsque le module c_{25} n'est pas nul, compliqué. Les cristaux de ce système utilisés en pratique (corindon, rtz, niobate de lithium) appartiennent aux classes $\bar{3}m$, 32, 3*m* pour les- lles $c_{25} = 0$. La matrice de rigidité est donnée dans le tableau 4. 6 et les nposantes du tenseur de propagation sont :

$$\ldots = c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{44}n_3^2 + 2c_{14}n_2n_3$$
$$\ldots = (c_{12} + c_{66})n_1n_2 + 2c_{14}n_1n_3$$
$$\ldots = 2c_{14}n_1n_2 + (c_{13} + c_{44})n_1n_3$$
$$\ldots = c_{66}n_1^2 + c_{11}n_2^2 + c_{44}n_3^2 - 2c_{14}n_2n_3 \qquad \text{avec} \qquad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \qquad (5.49)$$
$$\ldots = c_{14}(n_1^2 - n_2^2) + (c_{13} + c_{44})n_2n_3$$
$$\ldots = c_{44}(n_1^2 + n_2^2) + c_{33}n_3^2.$$

Dans une direction quelconque perpendiculaire à l'axe ternaire $= \cos \varphi$, $n_2 = \sin \varphi$, $n_3 = 0$) aucune des composantes Γ_{il} n'est nulle si bien l'équation aux valeurs propres ne peut être résolue que numériquement, epté suivant les axes Ox_1 et Ox_2.

Le long de Ox_1 ($n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$) le tenseur Γ

$$\Gamma = \begin{vmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{66} & c_{14} \\ 0 & c_{14} & c_{44} \end{vmatrix}$$

en évidence une onde longitudinale de vitesse $V = \sqrt{c_{11}/\rho}$ et deux les transversales de vitesses V_2 et V_3 telles que :

$$2\rho V_2^2 = c_{66} + c_{44} + \sqrt{(c_{66} - c_{44})^2 + 4c_{14}^2} \qquad (5.50)$$
$$2\rho V_3^2 = c_{66} + c_{44} - \sqrt{(c_{66} - c_{44})^2 + 4c_{14}^2}. \qquad (5.51)$$

Suivant Ox_2 ($n_2 = 1$, $n_1 = n_3 = 0$) :

$$\Gamma = \begin{vmatrix} c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & -c_{14} \\ 0 & -c_{14} & c_{44} \end{vmatrix}$$

il se propage :

— une onde transversale polarisée suivant Ox_1 à la vitesse $V_3 = \sqrt{c_{66}/\rho}$;

— une onde quasi longitudinale dont la vitesse V_1 est donnée par :

$$2\rho V_1^2 = c_{11} + c_{44} + \sqrt{(c_{11} - c_{44})^2 + 4c_{14}^2}; \qquad (5.52)$$

— une onde quasi transversale de vitesse V_2 telle que

$$2\rho V_2^2 = c_{11} + c_{44} - \sqrt{(c_{11} - c_{44})^2 + 4c_{14}^2}. \qquad (5.53)$$

Les courbes des lenteurs sont tracées sur la figure 5. 24 pour le corindon (constantes du tableau 4. 7).

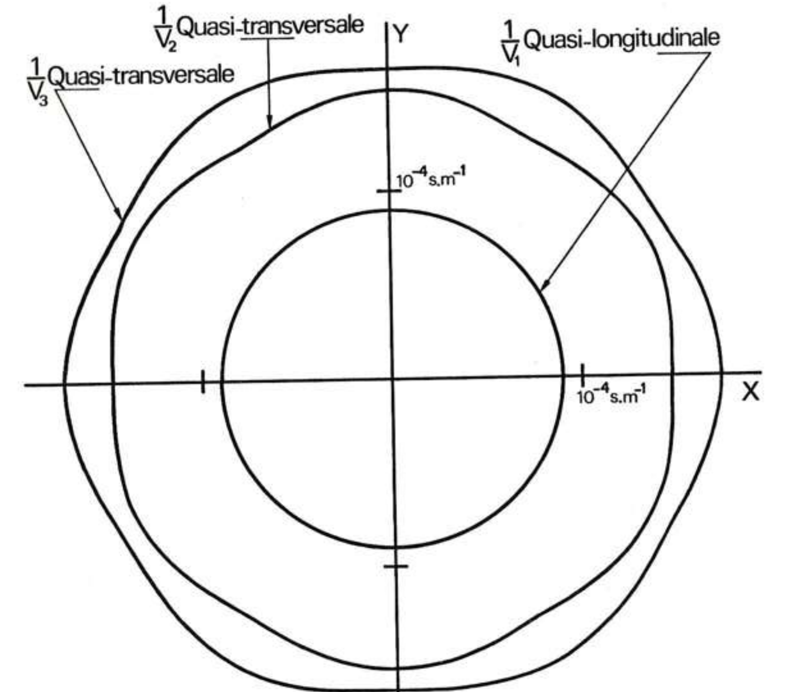


FIG. 5. 24. — *Système trigonal, classes $\bar{3}m$, 32, 3m. Section de la surface des lenteurs du corindon ($\bar{3}m$) par le plan XY.* La normale n'est pas contenue dans le plan XY car celui-ci n'est pas un miroir. Ainsi l'axe Y n'est pas une direction de mode pur : la figure 5. 25 montre que la vitesse d'énergie est inclinée par rapport au plan de section XY.

Si la propagation a lieu dans le *plan* Ox_2x_3 (plan de symétrie YZ) :

$$n_1 = 0 \qquad n_2 = \sin \theta \qquad n_3 = \cos \theta$$

et le tenseur Γ se met sous la forme

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ 0 & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_{11} = c_{66} \sin^2 \theta + c_{44} \cos^2 \theta + c_{14} \sin 2\theta$$
$$\Gamma_{22} = c_{11} \sin^2 \theta + c_{44} \cos^2 \theta - c_{14} \sin 2\theta$$
$$\Gamma_{23} = - c_{14} \sin^2 \theta + \frac{(c_{13} + c_{44})}{2} \sin 2\theta \qquad (5.\ 54)$$
$$\Gamma_{33} = c_{44} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta.$$

Il existe donc une onde transversale polarisée suivant Ox_1 de vitesse

$$V_3 = \sqrt{\frac{c_{44} \cos^2 \theta + c_{66} \sin^2 \theta + c_{14} \sin 2\theta}{\rho}} \qquad (5.\ 55)$$

et deux ondes quasi longitudinale et quasi transversale de vitesses respectives V_1 et V_2 telles que

$$2\rho V_{\substack{1\\2}}^2 = \Gamma_{22} + \Gamma_{33} \pm \sqrt{(\Gamma_{22} - \Gamma_{33})^2 + 4\Gamma_{23}^2}$$

soit

$$2\rho V_{\substack{1\\2}}^2 = c_{44} + c_{11} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta - c_{14} \sin 2\theta \qquad (5.\ 56)$$
$$\pm \sqrt{(c_{11} \sin^2 \theta - c_{33} \cos^2 \theta + c_{44} \cos 2\theta - c_{14} \sin 2\theta)^2 + [(c_{13} + c_{44}) \sin 2\theta - 2c_{14} \sin^2 \theta]^2}$$

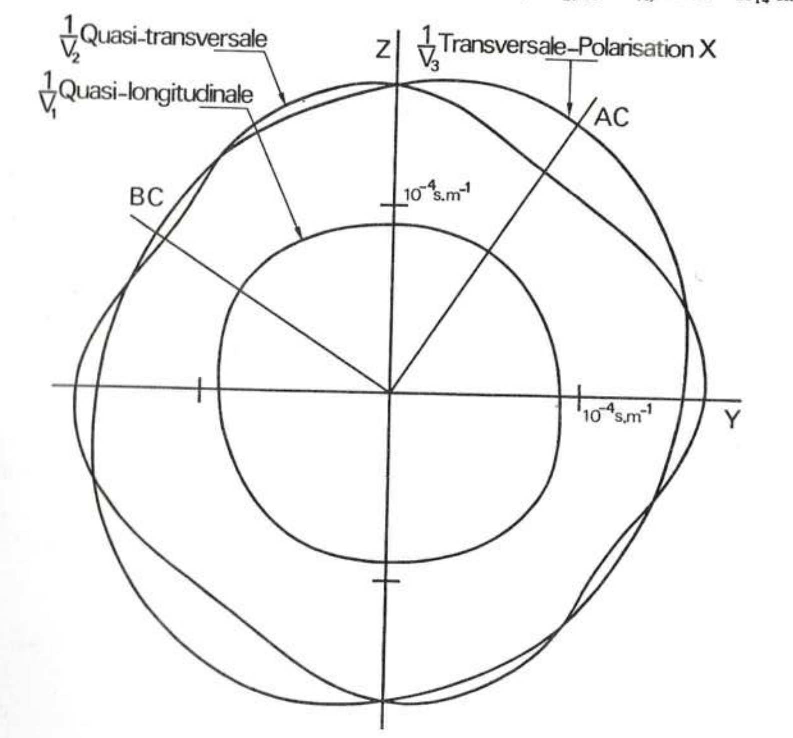


FIG. 5. 25. — *Système trigonal, classes $\bar{3}m$, 32, 3m. Section de la surface des lenteurs du corindon ($\bar{3}m$) par le plan YZ.*

Il apparaît sur la figure 5. 25, correspondant au cas du corindon, que l'axe ternaire n'est pas une direction de mode pur pour les ondes transversales (voir exemple du paragr. 5. 1. 5. 2). En effet, les normales aux deux courbes qui se croisent sur Ox_3 font un angle non nul avec cet axe. Toutefois l'onde transversale polarisée suivant X est pure dans certaines directions du plan YZ. Pour les déterminer calculons les composantes de la vitesse d'énergie à l'aide de la formule 5. 24 :

$$V_i^e = c_{i1k1} \frac{n_k}{\rho V_3} \qquad \text{car} \qquad {}^\circ u_i = \delta_{i1}$$

soit en fonction de l'angle θ ($n_1 = 0$, $n_2 = \sin \theta$, $n_3 = \cos \theta$) :

$$\overrightarrow{V^e} \begin{cases} V_1^e = 0 \\ V_2^e = \dfrac{c_{66} \sin \theta + c_{14} \cos \theta}{\rho V_3} \\ V_3^e = \dfrac{c_{14} \sin \theta + c_{44} \cos \theta}{\rho V_3} \end{cases}$$

La vitesse d'énergie fait avec l'axe Z un angle θ^e tel que

$$\operatorname{tg} \theta^e = \frac{V_2^e}{V_3^e} = \frac{c_{66} \sin \theta + c_{14} \cos \theta}{c_{14} \sin \theta + c_{44} \cos \theta}. \qquad (5.\ 57)$$

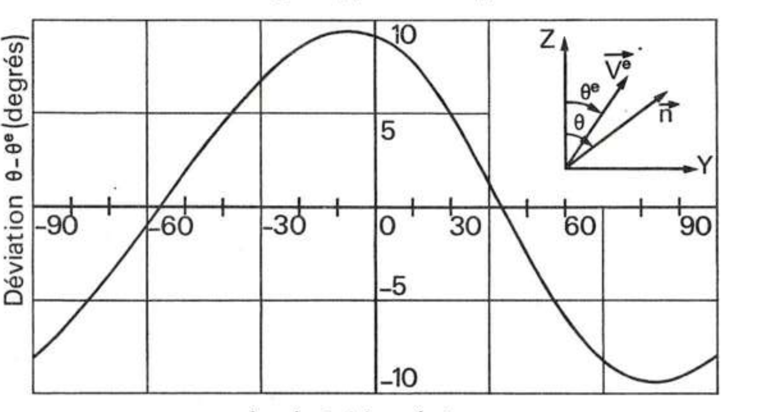


FIG. 5. 26. — *Déviation du rayon acoustique ($\overrightarrow{V^e}$) de l'onde transversale par rapport à la direction de propagation $\vec{n}$ dans le plan YZ du corindon.*

La figure 5. 26 montre la déviation $\theta - \theta^e$ du rayon acoustique par rapport à la direction de propagation dans le plan YZ. L'onde transversale est pure lorsque $\theta^e = \theta$ soit pour les angles θ_1 et θ_2 tels que :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2c_{14}}{c_{44} - c_{66}}. \qquad (5.\ 58)$$

Pour le corindon $\theta_1 = 33° 28'$ et $\theta_2 = -56° 32'$; ces deux directions perpendiculaires, désignées par AC et BC sur la figure 5. 25, sont intéressantes car l'onde est à la fois pure et transversale.

5. 2. — RÉFLEXION ET RÉFRACTION DES ONDES ÉLASTIQUES PLANES

Une onde élastique plane monochromatique de polarisation définie donne naissance, lorsqu'elle rencontre une frontière séparant deux cristaux, à trois ondes se propageant de chaque côté de la frontière. Ainsi une onde incidente quasi longitudinale peut engendrer dans le cristal où elle se propage une onde quasi longitudinale et deux ondes quasi transversales lente et rapide (ondes réfléchies) et, dans l'autre cristal, une onde quasi longitudinale et deux ondes quasi transversales lente et rapide (ondes transmises encore appelées ondes réfractées). Le cas de deux matériaux isotropes est plus simple : d'une part l'onde incidente engendre au plus deux ondes dans chaque milieu, d'autre part les polarisations sont longitudinales ou transversales.

5. 2. 1. — Équations de continuité

Le problème de la réflexion et de la réfraction s'exprime de la manière suivante : étant connues la direction de propagation, la polarisation, l'amplitude de l'onde incidente et les propriétés élastiques des deux matériaux, quelles sont les directions de propagation, les polarisations et les amplitudes des ondes réfléchies et réfractées, les directions des vitesses d'énergie? La solution s'obtient en principe en développant les équations de propagation pour chaque matériau et les conditions aux limites à la surface de séparation. En pratique la résolution analytique ne peut être menée à bien que dans des cas particuliers.

Lorsque les deux solides, en contact par un plan, sont rigidement liés, les conditions aux limites s'expriment par la *continuité des déplacements u_i et des tensions mécaniques* T_i *en tout point de la frontière.* L'équation du plan de jonction, de normale unitaire $\vec{l}\,(l_1, l_2, l_3)$, est, dans un repère dont l'origine est située à l'interface des deux solides :

$$\vec{l}\,.\,\vec{x} = 0.$$

Il faut qu'en tout point de ce plan et à chaque instant

$$u_i^{\mathrm{I}} + \sum_{\mathrm{R}} u_i^{\mathrm{R}} = \sum_{\mathrm{T}} u_i^{\mathrm{T}} \qquad (5.\ 59)$$

et

$$\mathrm{T}_i^{\mathrm{I}} + \sum_{\mathrm{R}} \mathrm{T}_i^{\mathrm{R}} = \sum_{\mathrm{T}} \mathrm{T}_i^{\mathrm{T}} \qquad (5.\ 60)$$

les indices I, R, T repérant les ondes incidentes, réfléchies et transmises. Pour des ondes planes sinusoïdales, la continuité des déplacements :

$$°u_i^{\mathrm{I}}\, e^{i(\omega^{\mathrm{I}} t - \vec{k}^{\mathrm{I}}\cdot\vec{x})} + \sum_{\mathrm{R}} °u_i^{\mathrm{R}}\, e^{i(\omega^{\mathrm{R}} t - \vec{k}^{\mathrm{R}}\cdot\vec{x})} = \sum_{\mathrm{T}} °u_i^{\mathrm{T}}\, e^{i(\omega^{\mathrm{T}} t - \vec{k}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{x})} \qquad (5.\ 61)$$

impose, pour être satisfaite à chaque instant :

$$\omega^{\mathrm{R}} = \omega^{\mathrm{T}} = \omega^{\mathrm{I}} \qquad (5.\ 62)$$

et en chaque point du plan $\vec{l}\,.\,\vec{x} = 0$:

$$\vec{k}^{\mathrm{R}}\,.\,\vec{x} = \vec{k}^{\mathrm{T}}\,.\,\vec{x} = \vec{k}^{\mathrm{I}}\,.\,\vec{x}. \qquad (5.\ 63)$$

La réflexion et la réfraction s'effectuent sans changement de fréquence.

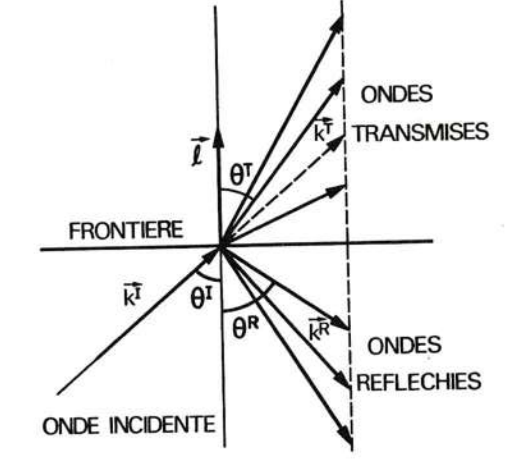


FIG. 5. 27. — *Loi de Descartes.*
Les projections sur la frontière des vecteurs d'ondes $\vec{k}^{\mathrm{R}}$ et $\vec{k}^{\mathrm{T}}$ des ondes réfléchies et transmises sont égales à celle du vecteur d'onde incident $\vec{k}^{\mathrm{I}}$.

Par ailleurs les égalités 5. 63 écrites sous la forme

$$(\vec{k}^{\mathrm{R}} - \vec{k}^{\mathrm{I}}) \cdot \vec{x} = 0, \qquad (\vec{k}^{\mathrm{T}} - \vec{k}^{\mathrm{I}}) \cdot \vec{x} = 0$$

et comparées à $\vec{l}\,.\,\vec{x} = 0$ montrent que les vecteurs $\vec{k}^{\mathrm{R}} - \vec{k}^{\mathrm{I}}$ et $\vec{k}^{\mathrm{T}} - \vec{k}^{\mathrm{I}}$ sont perpendiculaires au plan de séparation des deux solides. En conséquence, *tous les vecteurs d'ondes sont contenus dans le plan d'incidence défini par la normale $\vec{l}$ et le vecteur d'onde $\vec{k}^{\mathrm{I}}$ et leurs projections sur l'interface sont égales à celle du vecteur d'onde incident* (fig. 5. 27). Cette dernière condition exprime la loi de Descartes :

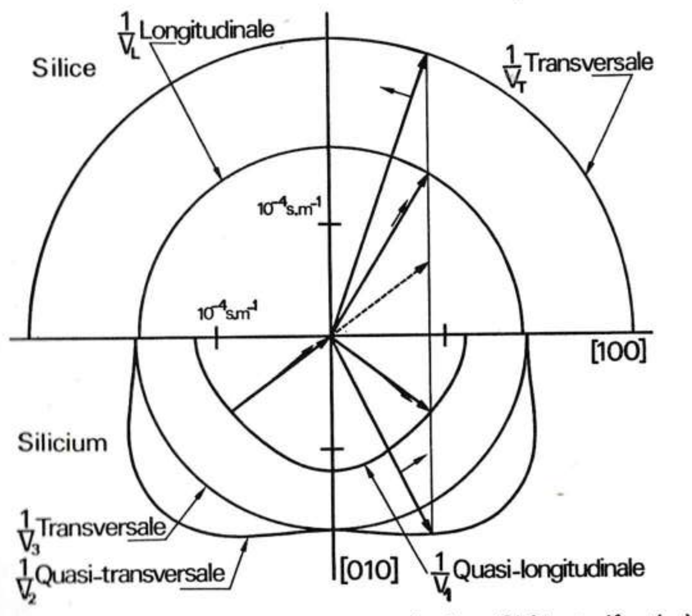
$$k^{\mathrm{R}} \sin \theta^{\mathrm{R}} = k^{\mathrm{T}} \sin \theta^{\mathrm{T}} = k^{\mathrm{I}} \sin \theta^{\mathrm{I}} \qquad (5.\ 64)$$

θ^{I}, θ^{R}, θ^{T} désignant les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction.

mpte tenu de l'égalité des fréquences, les directions de propagation ondes produites sont déterminées analytiquement par les relations :

$$\frac{\sin \theta^R}{V(\theta^R)} = \frac{\sin \theta^T}{V(\theta^T)} = \frac{\sin \theta^I}{V(\theta^I)} \qquad (5.65)$$

graphiquement par une construction géométrique faisant intervenir les faces des lenteurs des deux solides. La figure 5. 28 représente le cas n cristal cubique (silicium) accolé suivant le plan (010) à un solide trope (silice). L'onde incidente quasi longitudinale se propageant dans plan (001) du cristal donne naissance à des ondes réfléchies quasi gitudinale et quasi transversale, et à des ondes transmises longitudinale et nsversale dans le milieu isotrope. L'onde transversale réfléchie de polaation perpendiculaire au plan d'incidence n'est pas excitée puisque le placement de l'onde incidente n'a pas de composante suivant cette direcn.



G. 5. 28. — *Construction géométrique des vecteurs d'ondes réfléchis et réfractés à l'interface silicium-silice.* L'onde incidente quasi longitudinale donne naissance à des ondes réfléchies quasi longitudinale et quasi transversale et des ondes réfractées longitudinale et transversale.

ette construction fournit aussi la vitesse d'énergie pour chaque onde. A lumière de ce qui a été dit sur les surfaces des lenteurs au paraaphe précédent, le lecteur peut imaginer les différents cas possibles :

— il n'y a pas d'intersection avec l'une des surfaces des lenteurs : onde correspondante est évanescente. Ceci se traduit analytiquement par une solution imaginaire de la relation de dispersion de l'onde

$$(k^T)^2 = (k_\parallel^T)^2 + (k_\perp^T)^2 = \left(\frac{\omega}{V'}\right)^2.$$

La projection sur l'interface du vecteur d'onde réfracté $k_\parallel^T$ étant égale à $k_\parallel^I$, la composante normale $k_\perp^T$ est imaginaire si $k_\parallel^I > \omega/V'$, soit comme $k_\parallel^I = \frac{\omega}{V} \sin \theta^I$:

$$k_\perp^T = \frac{i\omega}{V}\sqrt{\sin^2 \theta^I - \left(\frac{V}{V'}\right)^2}. \qquad (5.66)$$

L'amplitude de l'onde décroît exponentiellement dans le second milieu. Cette situation apparaît à partir de l'angle d'incidence critique θ_c^I pour lequel $k_\perp^T = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta^T = \pi/2$:

$$\sin \theta_c^I = \frac{V(\theta_c^I)}{V'\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

— Le rayon acoustique, normal à la surface des lenteurs, et le vecteur d'onde d'un même mode peuvent être orientés de part et d'autre de l'interface. L'énergie est alors réfléchie bien que le vecteur d'onde soit réfracté.

Avant d'examiner un exemple écrivons les conditions aux limites simplifiées par la suppression des termes de propagation qui sont identiques en tout point de la frontière. La relation 5. 59 fournit immédiatement la condition de continuité des déplacements :

$$\boxed{{}^\circ u_i^I + \sum_R {}^\circ u_i^R = \sum_T {}^\circ u_i^T}. \qquad (5.67)$$

Pour les tensions mécaniques $T_i = T_{ij}l_j$, compte tenu de la loi de Hooke :

$$T_{ij} = c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = -\, i c_{ijkl} k_l {}^\circ u_k \, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

il vient

$$\boxed{c_{ijkl}l_j\left(k_l^I\,{}^\circ u_k^I + \sum_R k_l^R\,{}^\circ u_k^R\right) = c'_{ijkl}l_j \sum_T k_l^T\,{}^\circ u_k^T} \qquad (5.68)$$

en appelant c'_{ijkl} les constantes de rigidité du second cristal.

5. 2. 2. — *Exemple : onde incidente transversale horizontale*

Il a été montré au paragraphe 5. 1. 3*b* que le plan perpendiculaire à un axe de symétrie d'ordre quatre ou six est isotrope pour l'onde transversale polarisée suivant l'axe : sa vitesse $V_3 = \sqrt{c_{44}/\rho}$ est indépendante de la direction de propagation. Ainsi le cas le plus simple de réflexion à l'interface entre deux cristaux — représenté sur la figure 5. 29 — correspond à :

— un milieu formé de deux cristaux possédant chacun un axe d'ordre quatre ou six, orienté suivant Ox_3 et parallèle au plan de jonction;

— une onde incidente transversale polarisée suivant Ox_3 (plan d'incidence Ox_1x_2) appelée onde T. H. (transversale horizontale); en anglais S. H. (*shear horizontal*).

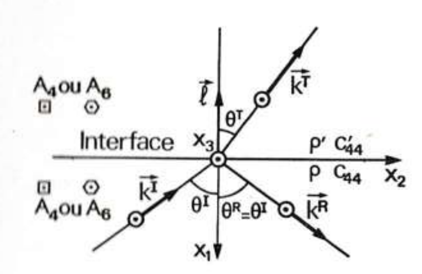


FIG. 5. 29. — *Réflexion et réfraction d'une onde transversale horizontale (T. H.) à l'interface de deux-cristaux avec axes A_4 ou A_6 perpendiculaires au plan d'incidence (ou à l'interface de deux solides isotropes).*

Les déplacements permis dans les deux cristaux étant parallèles ou perpendiculaires à l'axe de symétrie Ox_3, la polarisation de l'onde incidente se conserve et la discontinuité ne peut donner naissance qu'à deux ondes, l'une réfléchie, l'autre transmise de même polarisation transversale que l'onde incidente. Ces conditions sont aussi remplies dans le cas de deux solides isotropes. Comme pour chaque onde $°u_i = °u\delta_{i3}$, la continuité des déplacements impose :

$$°u^I + °u^R = °u^T. \qquad (5.\ 69)$$

La relation 5. 68 s'écrit, compte tenu de $l_j = -\delta_{j1}$ et $°u_k = °u\delta_{k3}$:

$$c_{i13l}(k_l^I °u^I + k_l^R °u^R) = c'_{i13l} k_l^T °u^T$$

soit

$$c_{i131}(k_1^I °u^I + k_1^R °u^R) + c_{i132}(k_2^I °u^I + k_2 °u^R) = c'_{i131} k_1^T °u^T + c'_{i132} k_2^T °u^T.$$

Les cristaux possédant un axe A_4 ou A_6, seule la valeur $i = 3$ conduit à des constantes non nulles : $c_{3131} = c_{55} = c_{44}$ et $c'_{3131} = c'_{44}$ (cf. tabl. 4. 55 et 4. 56) :

$$c_{44}(k_1^I °u^I + k_1^R °u^R) = c'_{44} k_1^T °u^T. \qquad (5.\ 70)$$

La résolution des équations 5. 69 et 5. 70 fournit directement le coefficient de réflexion :

$$A_R = \frac{°u^R}{°u^I} = \frac{c'_{44}k_1^T - c_{44}k_1^I}{c_{44}k_1^R - c'_{44}k_1^T} \qquad (5.\ 71)$$

et le coefficient de transmission :

$$A_T = \frac{°u^T}{°u^I} = A_R + 1.$$

La loi de Descartes 5. 65 impose $\theta^R = \theta^I$ et

$$\frac{\sin\theta^T}{\sin\theta^I} = \frac{V'_3}{V_3}. \qquad (5.\ 72)$$

En remplaçant $k_1^R = -k_1^I = k^I\cos\theta^I$ et $k_1^T = -k^T\cos\theta^T$, le coefficient A_R s'exprime en fonction des angles d'incidence et de réfraction par :

$$A_R = \frac{c_{44}k^I\cos\theta^I - c'_{44}k^T\cos\theta^T}{c_{44}k^I\cos\theta^I + c'_{44}k^T\cos\theta^T}.$$

En faisant apparaître les impédances élastiques $Z_3 = \rho V_3$ et $Z'_3 = \rho' V'_3$ des ondes transversales pour chaque cristal :

$$k^I c_{44} = \frac{\omega}{V_3}c_{44} = \frac{\omega\rho V_3^2}{V_3} = \omega Z_3 \qquad \text{et} \qquad k^T c'_{44} = \omega Z'_3$$

il vient

$$A_R = \frac{Z_3\cos\theta^I - Z'_3\cos\theta^T}{Z_3\cos\theta^I + Z'_3\cos\theta^T} \qquad (5.\ 73)$$

et

$$A_T = A_R + 1 = \frac{2Z_3\cos\theta^I}{Z_3\cos\theta^I + Z'_3\cos\theta^T} \qquad (5.\ 74)$$

θ^T étant relié à θ^I par 5. 72.

La manière dont les coefficients de réflexion et de transmission varient en fonction de l'angle d'incidence θ^I dépend du rapport des impédances élastiques Z'_3/Z_3 et du rapport des vitesses V'_3/V_3. Lorsque V'_3/V_3 est inférieur à 1, θ^T est inférieur à θ^I, il n'y a pas d'angle critique pour l'onde transmise. Par ailleurs si $Z'_3/Z_3 < 1$, le coefficient de réflexion A_R s'annule pour un angle θ^I tel que $\dfrac{\cos\theta^I}{\cos\theta^T} = \dfrac{Z'_3}{Z_3}$, pour cette direction il y a transmission totale dans le second milieu. Les courbes de la figure 5. 30 correspondent à un milieu constitué de silice ($V'_3 = 3\,763$ m/s, $Z'_3 = 8{,}29 \cdot 10^6$ kg/m²/s) sur du silicium ($V_3 = 5\,843$ m/s, $Z_3 = 13{,}6$ kg/m²/s). Si $V'_3 > V_3$, l'onde transmise est évanescente lorsque l'angle d'incidence θ^I est supérieur à

gle critique θ_c tel que $\sin \theta_c = \frac{V_3}{V'_3}$. La composante du vecteur d'onde k_1^T,
male à la surface, est alors imaginaire : $k_1^T = i\chi^T$ et d'après la formule 5. 71
oefficient de réflexion A_R est complexe :

$$A_R = \frac{c_{44}k^I \cos \theta^I + ic'_{44}\chi^T}{c_{44}k^I \cos \theta^I - ic'_{44}\chi^T}.$$

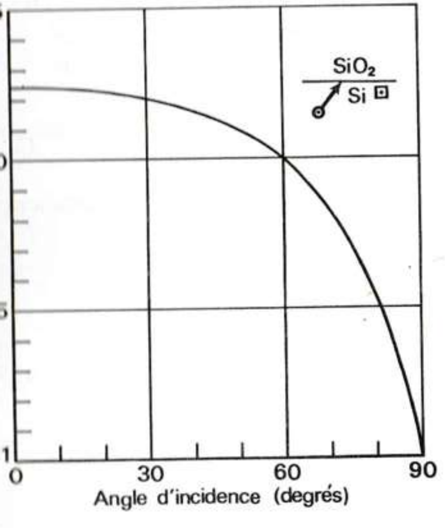
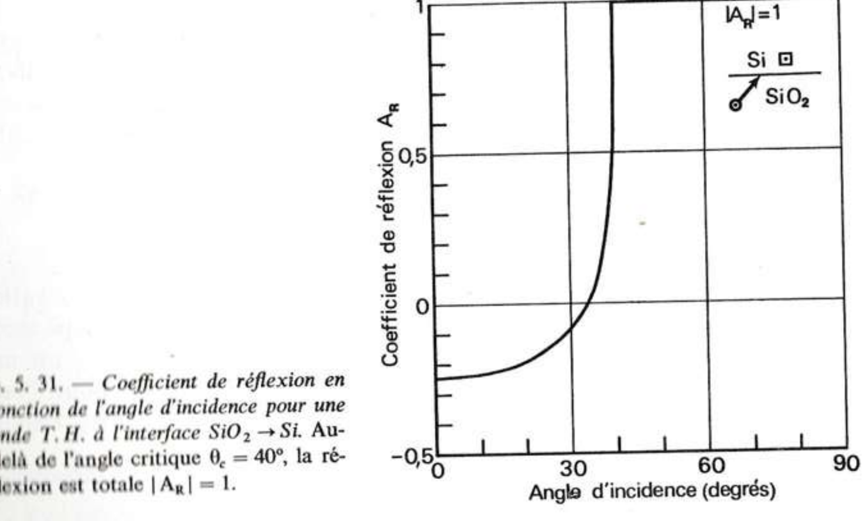


FIG. 5. 30. — *Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence pour une onde T. H. à l'interface Si → SiO₂.*



. 5. 31. — *Coefficient de réflexion en onction de l'angle d'incidence pour une onde T. H. à l'interface $SiO_2 \rightarrow Si$. Au-delà de l'angle critique $\theta_c = 40°$, la ré-lexion est totale $|A_R| = 1$.*

Comme le module de A_R est égal à 1, il y a réflexion totale de nde incidente sous un angle supérieur à l'angle critique. Le rapport A_T s déplacements de l'onde transmise et de l'onde incidente à l'interface, ne représente plus le coefficient de transmission car l'amplitude de l'onde transmise n'est pas constante : elle décroît exponentiellement dans le second milieu. La figure 5. 31 illustre ce cas avec les mêmes matériaux mais dans l'ordre inverse : silicium sur silice.

5. 2. 3. — *Réflexion sur une surface libre*

Dans le cas d'une *surface limite libre*, solide en contact avec l'air ou tout autre fluide à basse pression, il n'y a pas d'ondes transmises et la seule condition de continuité à assurer est *l'annulation de la tension mécanique* en tout point de la surface libre :

$$T_{ij}l_j = 0$$

soit

$$c_{ijkl}l_j(k_l^I \circ u_k^I + \sum_R k_l^R \circ u_k^R) = 0. \qquad (5.\ 75)$$

La comparaison avec 5. 68 montre que cette condition équivaut à annuler les rigidités c'_{ijkl} du second milieu. Dans l'exemple précédent $A_R = 1$ lorsque $Z'_3 = 0$: l'onde transversale de polarisation parallèle à la surface libre est totalement réfléchie.

A la surface libre d'un solide isotrope ou d'un cristal hexagonal dont l'axe A_6 est perpendiculaire au plan d'incidence, une onde longitudinale est réfléchie en une onde longitudinale et une onde transversale repérées par les indices (*) L et T (fig. 5. 32). Le matériau étant isotrope dans le plan d'incidence :

$$k^L = k^I = \frac{\omega}{V_L} \qquad \text{et} \qquad \frac{k^T}{k^I} = \frac{V_L}{V_T}$$

et la loi de Descartes implique :

$$\theta^L = \theta^I \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin \theta^T}{\sin \theta^I} = \frac{V_T}{V_L}. \qquad (5.\ 76)$$

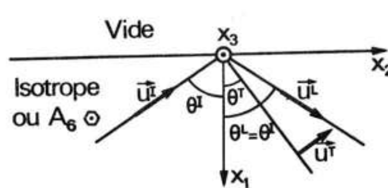


FIG. 5. 32. — *Réflexion d'une onde plane longitudinale sur la surface libre d'un solide isotrope ou d'un cristal hexagonal, A_6 étant perpendiculaire au plan d'incidence.*

(*) En toute logique il faudrait prendre comme indice RL et RT pour désigner ces ondes réfléchies longitudinale et transversale. L'omission de la lettre R ne doit entraîner aucune confusion puisque dans cet exemple il n'y a pas d'onde transmise.

Dans le développement de la condition de nullité des tensions méca-
[u]es 5. 75 sur le plan Ox_2x_3 :

$$c_{i1kl}(k_l^{\mathrm{I}} \circ u_k^{\mathrm{I}} + k_l^{\mathrm{L}} \circ u_k^{\mathrm{L}} + k_l^{\mathrm{T}} \circ u_k^{\mathrm{T}}) = 0 \qquad (5.\ 77)$$

[Les] indices l *et* k ne prennent que les valeurs 1 et 2 car tous les [vec]teurs $\vec{k}$ et $\circ\vec{u}$ sont contenus dans le plan Ox_1x_2 où ils ont pour composantes

$$\vec{k}^{\mathrm{I}} \begin{cases} -k^{\mathrm{I}} \cos \theta^{\mathrm{I}} \\ k^{\mathrm{I}} \sin \theta^{\mathrm{I}} \end{cases} \quad \vec{k}^{\mathrm{L}} \begin{cases} k^{\mathrm{I}} \cos \theta^{\mathrm{I}} \\ k^{\mathrm{I}} \sin \theta^{\mathrm{I}} \end{cases} \quad \vec{k}^{\mathrm{T}} \begin{cases} k^{\mathrm{T}} \cos \theta^{\mathrm{T}} \\ k^{\mathrm{T}} \sin \theta^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

$$\circ\vec{u}^{\mathrm{I}} \begin{cases} -\circ u^{\mathrm{I}} \cos \theta^{\mathrm{I}} \\ \circ u^{\mathrm{I}} \sin \theta^{\mathrm{I}} \end{cases} \quad \circ\vec{u}^{\mathrm{L}} \begin{cases} \circ u^{\mathrm{L}} \cos \theta^{\mathrm{I}} \\ \circ u^{\mathrm{L}} \sin \theta^{\mathrm{I}} \end{cases} \quad \circ\vec{u}^{\mathrm{T}} \begin{cases} -\circ u^{\mathrm{T}} \sin \theta^{\mathrm{T}} \\ \circ u^{\mathrm{T}} \cos \theta^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

[Po]ur $i = 1$ l'expression 5. 77 ne contient que les modules $c_{1111} = c_{11}$ et [c_{11}]$_{22} = c_{12}$:

$$[k^{\mathrm{I}}(\circ u^{\mathrm{I}} + \circ u^{\mathrm{L}}) \cos^2 \theta^{\mathrm{I}} - \frac{\circ u^{\mathrm{T}} k^{\mathrm{T}}}{2} \sin 2\theta^{\mathrm{T}}]$$
$$+ c_{12}[k^{\mathrm{I}}(\circ u^{\mathrm{I}} + \circ u^{\mathrm{L}}) \sin^2 \theta^{\mathrm{I}} + \frac{\circ u^{\mathrm{T}} k^{\mathrm{T}}}{2} \sin 2\theta^{\mathrm{T}}] = 0.$$

[Po]ur $i = 2$ seules les constantes $c_{2112} = c_{2121} = c_{66}$ ne sont pas nulles :

$$c_{66}[k^{\mathrm{I}}(-\circ u^{\mathrm{I}} + \circ u^{\mathrm{L}}) \sin 2\theta^{\mathrm{I}} + \circ u^{\mathrm{T}} k^{\mathrm{T}} \cos 2\theta^{\mathrm{T}}] = 0.$$

[Po]ur $i = 3$ tous les termes de 5. 77 sont nuls. Les deux inconnues $A_{\mathrm{L}} = \dfrac{\circ u^{\mathrm{L}}}{\circ u^{\mathrm{I}}}$ [et] $A_{\mathrm{T}} = \dfrac{\circ u^{\mathrm{T}}}{\circ u^{\mathrm{I}}}$ satisfont aux équations :

$$\begin{cases} (1 + A_{\mathrm{L}}) k^{\mathrm{I}} (c_{11} \cos^2 \theta^{\mathrm{I}} + c_{12} \sin^2 \theta^{\mathrm{I}}) - A_{\mathrm{T}} k^{\mathrm{T}} \left(\dfrac{c_{11} - c_{12}}{2}\right) \sin 2\theta^{\mathrm{T}} = 0 \\ (A_{\mathrm{L}} - 1) k^{\mathrm{I}} \sin 2\theta^{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{T}} k^{\mathrm{T}} \cos 2\theta^{\mathrm{T}} = 0. \end{cases} \qquad (5.\ 78)$$

Transformons le facteur

$$F = c_{11} \cos^2 \theta^{\mathrm{I}} + c_{12} \sin^2 \theta^{\mathrm{I}} = c_{11} + (c_{12} - c_{11}) \sin^2 \theta^{\mathrm{I}}$$

[En i]ntroduisant les vitesses des ondes longitudinale $V_{\mathrm{L}} = \sqrt{c_{11}/\rho}$ et transver-[sale] $V_{\mathrm{T}} = \sqrt{(c_{11} - c_{12})/2\rho}$

$$F = \rho V_{\mathrm{L}}^2 - 2\rho V_{\mathrm{T}}^2 \sin^2 \theta^{\mathrm{I}}$$

[et] compte tenu de la relation 5. 76 :

$$F = \rho V_{\mathrm{L}}^2(1 - 2 \sin^2 \theta^{\mathrm{T}}) = \rho V_{\mathrm{L}}^2 \cos 2\theta^{\mathrm{T}}.$$

En reportant cette expression et en remplaçant $k^{\mathrm{T}}/k^{\mathrm{I}}$ par $V_{\mathrm{L}}/V_{\mathrm{T}}$, le système 5. 78 s'écrit :

$$\begin{cases} A_{\mathrm{L}} \left(\dfrac{V_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{T}}}\right) \cos 2\theta^{\mathrm{T}} - A_{\mathrm{T}} \sin 2\theta^{\mathrm{T}} = -\left(\dfrac{V_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{T}}}\right) \cos 2\theta^{\mathrm{T}} \\ A_{\mathrm{L}} \sin 2\theta^{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{T}} \left(\dfrac{V_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{T}}}\right) \cos 2\theta^{\mathrm{T}} = \sin 2\theta^{\mathrm{I}}. \end{cases}$$

La résolution fournit le coefficient de réflexion de l'onde longitudinale

$$A_{\mathrm{L}} = \frac{\circ u^{\mathrm{L}}}{\circ u^{\mathrm{I}}} = \frac{\sin 2\theta^{\mathrm{I}} \sin 2\theta^{\mathrm{T}} - \left(\dfrac{V_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{T}}}\right)^2 \cos^2 2\theta^{\mathrm{T}}}{\sin 2\theta^{\mathrm{I}} \sin 2\theta^{\mathrm{T}} + \left(\dfrac{V_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{T}}}\right)^2 \cos^2 2\theta^{\mathrm{T}}} \qquad (5.\ 79)$$

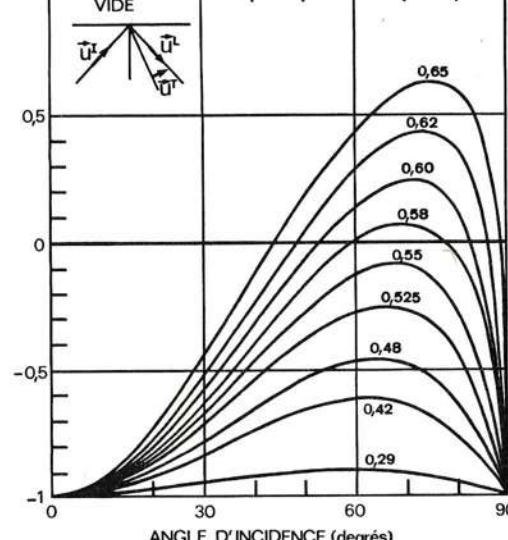


FIG. 5. 33. — *Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence d'une onde longitudinale sur la surface libre d'un solide isotrope pour différentes valeurs du paramètre V_T/V_L. Silice : $V_T/V_L = 0,63$.*

(Figure 3 de la référence 5).

et le facteur de conversion en onde transversale

$$A_{\mathrm{T}} = \frac{\circ u^{\mathrm{T}}}{\circ u^{\mathrm{I}}} = \frac{2\left(\dfrac{V_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{T}}}\right) \cos 2\theta^{\mathrm{T}} \sin 2\theta^{\mathrm{I}}}{\sin 2\theta^{\mathrm{I}} \sin 2\theta^{\mathrm{T}} + \left(\dfrac{V_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{T}}}\right)^2 \cos^2 2\theta^{\mathrm{T}}} = \frac{V_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{T}}} (A_{\mathrm{L}} + 1) \operatorname{cotg} 2\theta^{\mathrm{T}} \qquad (5.\ 80)$$

θ^{T} et θ^{I} étant reliés par 5. 76. Comme $\dfrac{V_{\mathrm{T}}}{V_{\mathrm{L}}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ l'angle θ^{T} est inférieur à $\pi/4$ et le facteur A_{T} est positif quel que soit l'angle d'incidence. Le réseau de

urbes de la figure 5. 33 montre qu'au contraire A_L s'annule pour deux leurs de l'angle d'incidence si V_T/V_L est supérieur à 0,565. L'onde cidente longitudinale est alors réfléchie en une onde unique de polarition transversale. Cette propriété est utilisée pour convertir une onde ngitudinale en une onde transversale.

5. 2. 4. — *Ondes de Love*

Les ondes de Love sont des *ondes de surface à polarisation transversale* i se propagent dans un milieu constitué d'une couche et d'un substrat mi-infini de propriétés élastiques différentes (fig. 5. 34). La couche mince, e rigidement au substrat, joue le rôle d'un guide unidimensionnel à rois non identiques. La présence du substrat supprime la fréquence coupure que présenterait normalement le guide formé de la couche ule (paragr. 1. 1. 2. 2.). Il est prévisible que la vitesse de propagation l'onde, comprise entre celle de la couche et celle du substrat, varie ec la fréquence : c'est précisément dans cet effet *dispersif* que réside ntérêt des ondes de Love.

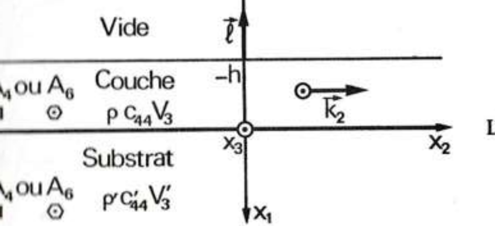


FIG. 5. 34. — *Ondes de Love.* L'onde T. H. se propage suivant x_2 en se réfléchissant successivement sur la surface libre de la couche et sur l'interface avec le substrat.

Reportons-nous à la figure 5. 34. Les cristaux possédant par hypothèse axe de symétrie A_4 ou A_6 porté par Ox_3, le plan Ox_1x_2 est isotrope pour nde transversale de déplacement u_3 et de vecteur d'onde $\vec{k}(k_1, k_2, 0)$. onde réfléchie par la surface libre $x_1 = -h$ a même polarisation que nde incidente et a pour vecteur d'onde $\vec{k}'(-k_1, k_2, 0)$. L'onde résulnte, qui se propage suivant Ox_2, n'engendre que des contraintes de aillement :

$$T_{31} = c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \qquad \text{et} \qquad T_{32} = c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}.$$

Sur la surface libre $x_1 = -h$, l'annulation de la tension mécanique $= T_{ij}l_j = -T_{i1}$ porte uniquement sur la contrainte T_{31} dont l'expreson résulte, comme au paragraphe 1. 1. 2. 2, de la superposition de l'onde cidente et de l'onde réfléchie :

$$T_{31} = A\,e^{i[\omega t - k_1(x_1+h) - k_2x_2]} - A\,e^{i[\omega t + k_1(x_1+h) - k_2x_2]}$$

it en posant $T_0 = -2iA$:

$$T_{31} = T_0 \sin k_1(x_1+h)\,e^{i(\omega t - k_2x_2)} \qquad \text{pour} \qquad -h < x_1 < 0. \qquad (5.\ 81)$$

En appelant $V_3 = \sqrt{c_{44}/\rho}$ la vitesse de l'onde transversale dans le matériau constituant la couche, les composantes k_1, k_2, $k_3 = 0$ du vecteur d'onde $\vec{k}$ satisfont à la relation :

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 = \left(\frac{\omega}{V_3}\right)^2 \qquad (5.\ 82)$$

et comme k_1 est réel :

$$k_2 < \frac{\omega}{V_3}. \qquad (5.\ 83)$$

L'onde de Love étant une onde de surface (*), la contrainte T_{31} créée dans le substrat :

$$T_{31} = T'_0\,e^{i(\omega t - k'_1x_1 - k'_2x_2)} \qquad \text{pour} \qquad x_1 > 0$$

doit nécessairement décroître avec x_1 ; il faut pour cela que :

$$k'_1 = -i\chi_1 \qquad \text{avec} \qquad \chi_1 > 0.$$

Par ailleurs la continuité de la tension mécanique en tout point de l'interface $x_1 = 0$ impose $k'_2 = k_2$. La contrainte T_{31} s'exprime donc par

$$T_{31} = T'_0\,e^{-\chi_1x_1}\,e^{i(\omega t - k_2x_2)} \qquad \text{pour} \qquad x_1 > 0,$$

χ_1 et k_2 satisfont à la relation

$$k_1'^2 + k_2'^2 = \left(\frac{\omega}{V'_3}\right)^2 = k_2^2 - \chi_1^2 \qquad (5.\ 84)$$

où $V'_3 = \sqrt{c'_{44}/\rho}$ est la vitesse des ondes transversales dans le substrat. Pour que χ_1 soit réel il faut

$$k_2 > \frac{\omega}{V'_3}. \qquad (5.\ 85)$$

Les inégalités 5. 83 et 5. 85 ne sont compatibles que si

$$\boxed{V'_3 > V_3}.$$

Une condition nécessaire d'existence des ondes de Love est que la vitesse des ondes transversales dans le substrat soit supérieure à celle des ondes de même polarisation dans la couche. La vitesse de phase de l'onde de Love, $V_\varphi = \omega/k_2$, est alors comprise entre ces deux valeurs :

$$V_3\,(\text{couche}) < V_\varphi < V'_3\,(\text{substrat}).$$

(*) Notons que la condition aux limites $T_{31} = 0$ est aussi satisfaite lorsque u_3 ne dépend pas de x_1. Cette solution correspond à une onde transversale horizontale d'amplitude constante se propageant dans la couche ou dans le substrat (vitesse V_3 ou V'_3).

La continuité de la tension mécanique sur la frontière $x_1 = 0$ entraîne

$$T_0 \sin k_1 h = T'_0.$$

contrainte de cisaillement est égale à

$$\begin{cases} T_{31} = T'_0 \dfrac{\sin k_1(x_1 + h)}{\sin k_1 h} e^{i(\omega t - k_2 x_2)} & \text{pour} \quad -h < x_1 < 0, \\ T_{31} = T'_0 \, e^{-\chi_1 x_1} e^{i(\omega t - k_2 x_2)} & \text{pour} \quad x_1 > 0. \end{cases}$$

Le déplacement u_3 s'obtient en intégrant la relation de Hooke dans la uche : $T_{31} = c_{44} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}$ et dans le substrat : $T_{31} = c'_{44} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}$, soit en posant $= -T'_0/c'_{44}\chi_1$:

$$\begin{cases} u_3 = {}^\circ u \dfrac{c'_{44}}{c_{44}} \dfrac{\chi_1}{k_1} \cdot \dfrac{\cos k_1(x_1 + h)}{\sin k_1 h} e^{i(\omega t - k_2 x_2)} & \text{pour} \quad -h < x_1 < 0, \\ u_3 = {}^\circ u \, e^{-\chi_1 x_1} e^{i(\omega t - k_2 x_2)} & \text{pour} \quad x_1 > 0. \end{cases}$$

continuité des déplacements à l'interface $x_1 = 0$ impose

$$\chi_1 = \frac{c_{44}}{c'_{44}} k_1 \operatorname{tg} k_1 h. \tag{5. 86}$$

déplacement u_3 se met alors sous la forme :

$$\begin{cases} u_3 = {}^\circ u \dfrac{\cos k_1(x_1 + h)}{\cos k_1 h} e^{i(\omega t - k_2 x_2)} & \text{pour} \quad -h < x_1 < 0, \\ u_3 = {}^\circ u \, e^{-\chi_1 x_1} e^{i(\omega t - k_2 x_2)} & \text{pour} \quad x_1 > 0. \end{cases} \tag{5. 87}$$

La condition 5. 86 associée à la relation

$$k_1^2 + \chi_1^2 = \left(\frac{\omega}{V_3}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{V'_3}\right)^2 \tag{5. 88}$$

éduite de 5. 82 et 5. 84 fournit à chaque fréquence les valeurs de χ_1 k_1 et le nombre d'onde k_2 :

$$k_2 = \left[\left(\frac{\omega}{V_3}\right)^2 - k_1^2\right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\omega}{V'_3}\right)^2 + \chi_1^2\right]^{1/2}. \tag{5. 89}$$

Les équations 5. 86, 5. 88 et 5. 89 définissent implicitement la relation dispersion $\omega(k_2)$ des ondes de Love. La détermination de k_1 et χ_1 est fectuée graphiquement sur la figure 5. 35 en utilisant les variables sans mensions $k_1 h$, $\chi_1 h$ et $\omega h/V_3$. Les solutions sont données par les interctions de la courbe d'équation :

$$\chi_1 h = \frac{c_{44}}{c'_{44}} (k_1 h) \operatorname{tg} (k_1 h)$$

et du cercle, centré sur l'origine, de rayon

$$R = \frac{\omega h}{V_3} \left[1 - \left(\frac{V_3}{V'_3}\right)^2\right]^{1/2}$$

traduisant la relation $(k_1 h)^2 + (\chi_1 h)^2 = R^2$. Chaque intersection définit un mode, il y en a p lorsque $(p-1)\pi < R < p\pi$ c'est-à-dire $(p-1)\omega_0 < \omega < p\omega_0$ avec

$$\frac{\omega_0 h}{V_3} = \frac{\pi}{\left[1 - \left(\dfrac{V_3}{V'_3}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

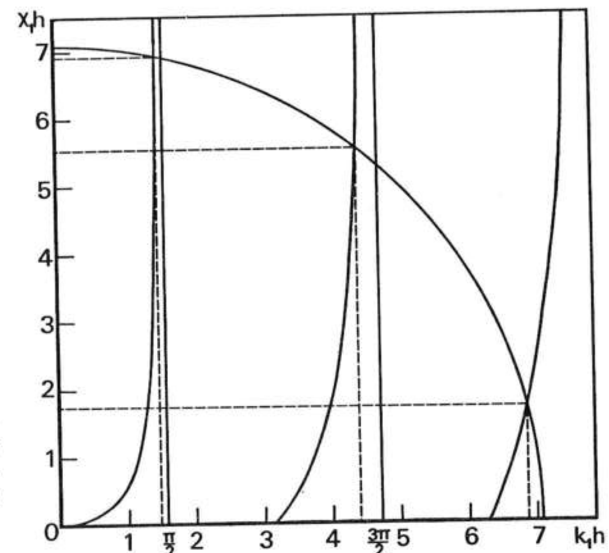


FIG. 5. 35. — *Résolution graphique des équations 5.86 et 5.88 montrant l'existence possible de plusieurs modes (couche de silice sur silicium).*

La figure 5. 36 illustre la variation en fonction de x_1, de l'amplitude du déplacement u_3 pour les trois premiers modes d'ondes de Love dans une couche de silice sur un substrat de silicium. Le mode d'ordre p possède $p - 1$ plans nodaux dans la couche. A une fréquence donnée, la pénétration de l'onde dans le substrat augmente avec l'ordre du mode car le facteur d'atténuation χ_1 diminue. La modification du déplacement des particules avec la fréquence, représentée sur la figure 5. 37, s'interprète facilement à l'aide de la construction graphique de la figure 5. 35. Pour un mode donné, χ_1 croît avec la fréquence ainsi que la valeur maximale ${}^\circ u/\cos k_1 h$ de l'amplitude du déplacement dans la couche. Par conséquent la fraction d'énergie transportée dans la couche à la vitesse $V_3 < V'_3$ augmente avec la fréquence. Par contre, aux basses fréquences ($\omega h < V_3$), la quasi-totalité de l'énergie se propage dans le substrat à la

vitesse V'_3. La couche d'épaisseur h négligeable devant [...] aucun rôle. Ces résultats apparaissent sur les courbes de dispersion tracées sur la figure 5. 38 en coordonnées réduites $\omega h/V_3$ et $k_2 h$. Les branches des différents modes commencent en des points équidistants sur la droite de pente V'_3/V_3 qui traduit la relation $\omega = V'_3 k_2$. En effet, pour les fréquences limites $\omega_p = p\omega_0$, la valeur $\chi_1 = 0$ implique pour le mode correspondant $\omega = V'_3 k_2$. Lorsque la fréquence augmente les courbes tendent asymptotiquement vers la droite $\omega = V_3 k_2$. Il s'ensuit (exercice 5. 7) que la vitesse de phase $V_\varphi = \omega/k_2$ et la vitesse de groupe $V_g = d\omega/dk_2$ varient en fonction de la fréquence normalisée fh/V_3 comme l'indique la figure 5. 39.

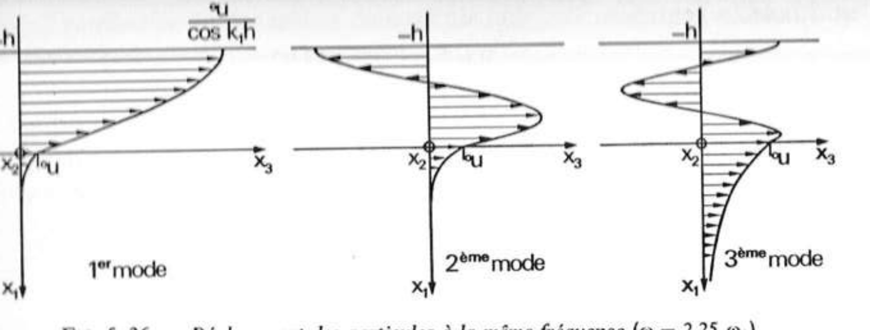


FIG. 5. 36. — *Déplacement des particules à la même fréquence ($\omega = 2{,}25\ \omega_0$) pour les trois premiers modes dans une couche de silice sur silicium.*

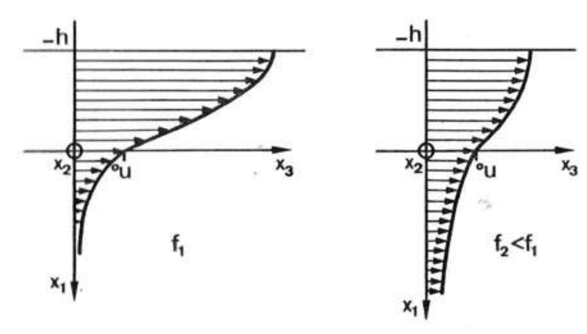


FIG. 5. 37. — *Déplacement des particules pour le premier mode à deux fréquences différentes, f_1 et $f_2 < f_1$.*

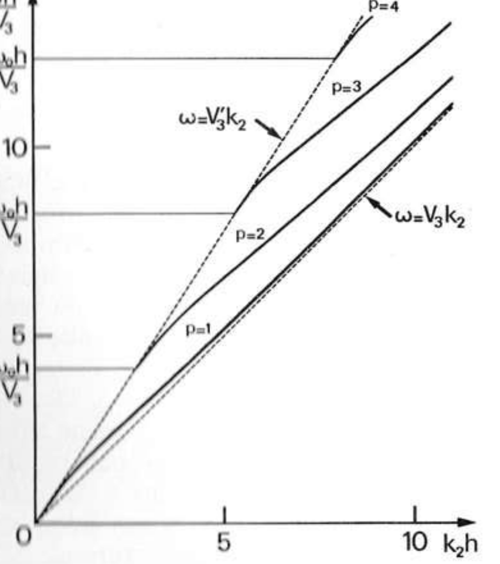


FIG. 5. 38. — *Ondes de Love. Courbes de dispersion $\omega(k_2)$, en coordonnées réduites, des premiers modes dans une couche de silice sur silicium.*

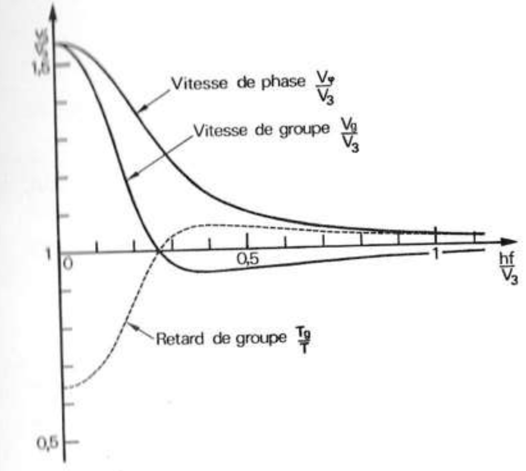


FIG. 5. 39. — *Ondes de Love (couche de silice sur silicium). Variation des vitesses de phase et de groupe en fonction de la fréquence.* En pointillé, courbe du retard de groupe $\tau_g = l/V_g$ avec comme unité le retard $\tau = l/V_3$ subi par l'onde T. H. dans la couche.

5. 3. — ONDES ÉLASTIQUES DE SURFACE. ONDES DE RAYLEIGH

Nous venons de montrer qu'une onde transversale horizontale peut se propager en restant confinée dans une couche ou dans son voisinage immédiat. Cette onde (onde de Love) est une onde de surface pour l'ensemble couche + substrat, mais l'inhomogénéité du milieu rend dispersive la propagation. Il est intéressant de se demander s'il est possible, sans aucune couche et donc sans effet dispersif, de faire progresser une onde près de la surface d'un milieu parfaitement homogène. La réponse est affirmative mais l'onde, comme l'a montré Rayleigh [6] dès 1885, n'est pas alors polarisée rectilignement. Cette onde complexe est composée d'un déplacement longitudinal et d'un déplacement transversal de façon à satisfaire la condition de tension mécanique nulle sur la surface libre.

Une onde élastique qui se déplace dans un milieu limité doit satisfaire, d'une part à l'équation de propagation 5. 2 :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$p_i = T_{ij} l_j.$$

Dans le cas d'un solide illimité dans les directions x_1 et x_2, occupant le demi-espace $x_3 > 0$ (fig. 5. 40), il faut écrire que la surface $x_3 = 0$ n'est soumise à aucune force extérieure : $p_i = 0$, soit comme $l_j = \delta_{j3}$:

$$T_{i3} = c_{i3kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = 0 \qquad \text{pour} \qquad x_3 = 0. \tag{5. 90}$$

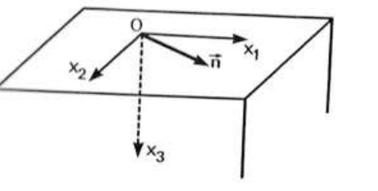


FIG. 5. 40. — *Système de référence pour les ondes de Rayleigh.*

Cherchons s'il existe, parmi les solutions satisfaisant à cette restriction, des ondes qui se propagent en surface c'est-à-dire dont l'amplitude décroît avec la profondeur x_3 dans le matériau. Considérons un déplacement de la forme :

$$u_k = {}^\circ u_k \, e^{-\chi x_3} \, e^{i\omega\left[t - \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2}{V}\right]} \qquad \text{avec} \qquad Re[\chi] > 0$$

dont la direction de propagation, contenue dans le plan de la surface libre, est repérée par les cosinus directeurs n_1 et n_2, et dont l'amplitude décroît exponentiellement à partir de la surface. Pour se ramener à une expression déjà utilisée posons :

$$\chi = i \frac{\omega}{V} n_3$$

où n_3 n'est pas la troisième composante de la direction de propagation $\vec{n}$ mais *une inconnue à déterminer* [7]. La substitution de

$$u_k = {}^\circ u_k \, e^{i\omega\left(t - \frac{n_l x_l}{V}\right)}$$

dans l'équation de propagation conduit comme au paragraphe 5. 1. 1 à l'équation de Christoffel :

$$\rho V^2 \, {}^\circ u_i = c_{ijkl} n_j n_k \, {}^\circ u_l.$$

L'annulation du déterminant

$$| c_{ijkl} n_j n_k - \rho V^2 \delta_{il} | = 0 \tag{5. 91}$$

fournit une équation du sixième degré en n_3 où la vitesse V figure comme paramètre. Les coefficients des puissances de n_3 étant réels, il existe trois couples de racines conjuguées. Seules sont acceptables les trois racines $n_3^{(1)}$, $n_3^{(2)}$, $n_3^{(3)}$ ayant une partie imaginaire négative car les autres conduisent, avec $Re[\chi] < 0$, à une onde dont l'amplitude augmente exponentiellement avec la pénétration x_3 dans le matériau. A chaque valeur $n_3^{(r)}$ est associé un vecteur propre ${}^\circ u_k^{(r)}$ et par conséquent un déplacement

$$u_k^{(r)} = {}^\circ u_k^{(r)} \, e^{i\omega\left(t - \frac{n_l^{(r)} x_l}{V}\right)} \tag{5. 92}$$

La solution générale est une combinaison linéaire de ces trois déplacements correspondant à la même vitesse V :

$$u_k = \sum_{r=1}^{3} A_r u_k^{(r)}. \tag{5. 93}$$

Les coefficients A_r et la vitesse V sont déterminés en portant cette expression dans la condition aux limites 5. 90 sur la surface libre $x_3 = 0$:

$$\sum_{r=1}^{3} c_{i3kl} A_r \left(\frac{\partial u_k^{(r)}}{\partial x_l}\right)_{x_3 = 0} = 0$$

comme

$$\left(\frac{\partial u_k^{(r)}}{\partial x_l}\right)_{x_3 = 0} = {}^\circ u_k^{(r)} \left(-\frac{i\omega}{V}\right) n_l^{(r)} \, e^{i\omega\left(t - \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2}{V}\right)}$$

il vient

$$\sum_{r=1}^{3} c_{i3kl} n_l^{(r)} \, {}^\circ u_k^{(r)} A_r = 0 \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5. 94}$$

La vitesse des ondes de Rayleigh est solution de l'équation séculaire exprimant la compatibilité de ces trois équations homogènes.

Si la marche à suivre est simple, l'application aux milieux anisotropes donne vite lieu à des développements qui ne peuvent être résolus que numériquement. Aussi examinons-nous d'abord le cas d'un matériau isotrope.

5. 3. 1. — *Milieu isotrope*

En introduisant les vitesses $V_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$ et $V_T = \sqrt{(c_{11} - c_{12})/2\rho}$ des ondes planes dans le matériau isotrope illimité, l'expression 5. 9 des composantes du tenseur de propagation

$$\Gamma_{il} = \frac{c_{11} + c_{12}}{2} n_i n_l + \frac{c_{11} - c_{12}}{2} n_k^2 \delta_{il}$$

se met sous la forme

$$\Gamma_{il} = \rho[(V_L^2 - V_T^2) n_i n_l + V_T^2 n_k^2 \delta_{il}].$$

L'équation de Christoffel 5. 6 :

$$\Gamma_{il}\,{}^{\circ}u_l = \rho V^2\,{}^{\circ}u_i$$

devient

$$(V_L^2 - V_T^2)(n_l\,{}^{\circ}u_l)n_i = (V^2 - V_T^2 n_k^2)\,{}^{\circ}u_i. \tag{5. 95}$$

Deux cas sont à considérer :

— $n_l{}^{\circ}u_l \neq 0$, alors l'équation 5. 95 montre que ${}^{\circ}u_i$ est proportionnel à n_i : ${}^{\circ}u_i = Bn_i$, et

$$(n_l{}^{\circ}u_l)n_i = n_l^2 Bn_i = n_l^2\,{}^{\circ}u_i.$$

En égalant les coefficients de ${}^{\circ}u_i$ dans les deux membres de l'équation 5. 95 il vient

$$(V_L^2 - V_T^2)n_l^2 = V^2 - V_T^2 n_k^2$$

soit

$$V^2 = V_L^2 n_k^2; \tag{5. 96}$$

— $n_l{}^{\circ}u_l = 0 \;\Rightarrow$

$$V^2 = V_T^2 n_k^2. \tag{5. 97}$$

Comme le milieu est isotrope il est toujours possible de choisir la direction de propagation suivant un des axes de référence, Ox_1 par exemple :

$$n_1 = 1, \qquad n_2 = 0.$$

Les solutions 5. 96 et 5. 97 de l'équation aux valeurs propres déterminent n_3 en fonction de la vitesse de propagation V :

— la première :

$$V^2 = V_L^2(1 + n_3^2)$$

impose $V < V_L$ car n_3 doit être imaginaire :

$$n_3^L = \pm\, i\left(1 - \frac{V^2}{V_L^2}\right)^{1/2}$$

— la seconde :

$$V^2 = V_T^2(1 + n_3^2)$$

fournit

$$n_3^T = \pm\, i\left(1 - \frac{V^2}{V_T^2}\right)^{1/2} \qquad \text{avec} \qquad V < V_T.$$

Dans les deux cas, le signe + est à rejeter car il conduit, avec $\chi = i\,\dfrac{\omega n_3}{V} < 0$ à une onde d'amplitude exponentiellement croissante avec x_3, ce qui est physiquement inacceptable. Choisissons comme vecteurs propres :

— pour $n_3^{(1)} = -\,i\left(1 - \dfrac{V^2}{V_L^2}\right)^{1/2}$, le vecteur

$$\vec{{}^{\circ}u}^{(1)} \quad \begin{cases} {}^{\circ}u_1^{(1)} = 1 \\ {}^{\circ}u_2^{(1)} = 0 \\ {}^{\circ}u_3^{(1)} = n_3^{(1)} \end{cases}$$

dont les composantes satisfont à la relation ${}^{\circ}u_i^{(1)} = Bn_i$ avec $B = 1$;

— pour $n_3^{(2)} = n_3^{(3)} = -\,i\left(1 - \dfrac{V^2}{V_T^2}\right)^{1/2}$, les deux vecteurs indépendants :

$$\vec{{}^{\circ}u}^{(2)} \quad \begin{cases} {}^{\circ}u_1^{(2)} = 0 \\ {}^{\circ}u_2^{(2)} = 1 \\ {}^{\circ}u_3^{(2)} = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \vec{{}^{\circ}u}^{(3)} \quad \begin{cases} {}^{\circ}u_1^{(3)} = -\,n_3^{(3)} \\ {}^{\circ}u_2^{(3)} = 0 \\ {}^{\circ}u_3^{(3)} = 1 \end{cases}$$

dont les composantes vérifient la relation :

$$n_l{}^{\circ}u_l = 0 \qquad \text{ou} \qquad {}^{\circ}u_1 + n_3{}^{\circ}u_3 = 0.$$

Développons pour chaque valeur de l'indice i la condition aux limites 5. 94 :

$$c_{i3kl} \sum_{r=1}^{3} n_l^{(r)}\,{}^{\circ}u_k^{(r)} A_r = 0$$

compte tenu du tableau des rigidités 4. 38 d'un solide isotrope :

$$i = 1 \qquad c_{1313} \sum_r \left(n_1^{(r)}\,{}^{\circ}u_3^{(r)} + n_3^{(r)}\,{}^{\circ}u_1^{(r)}\right) A_r = 0$$

$$i = 2 \qquad c_{2323} \sum_r \left(n_2^{(r)}\,{}^{\circ}u_3^{(r)} + n_3^{(r)}\,{}^{\circ}u_2^{(r)}\right) A_r = 0$$

$$i = 3 \qquad \sum_r \left(c_{3311} n_1^{(r)}\,{}^{\circ}u_1^{(r)} + c_{3322} n_2^{(r)}\,{}^{\circ}u_2^{(r)} + c_{3333} n_3^{(r)}\,{}^{\circ}u_3^{(r)}\right) A_r = 0.$$

Ces équations se simplifient car $n_1^{(r)} = 1$ et $n_2^{(r)} = 0$ quel que soit r ; en posant $n_3^{(r)} = q_r$:

$$\begin{cases} \sum_r \left({}^{\circ}u_3^{(r)} + q_r{}^{\circ}u_1^{(r)}\right) A_r = 0 \\ \sum_r q_r{}^{\circ}u_2^{(r)} A_r = 0 \\ \sum_r \left(c_{12}{}^{\circ}u_1^{(r)} + c_{11} q_r{}^{\circ}u_3^{(r)}\right) A_r = 0. \end{cases} \tag{5. 98}$$

Étant donné les valeurs des composantes ${}^{\circ}u_k^{(r)}$ des vecteurs propres, il vient en explicitant la somme sur l'indice r :

$$\begin{cases} 2q_1 A_1 + 0 \cdot A_2 + (1 - q_3^2) A_3 = 0 \\ 0 \cdot A_1 + q_2 A_2 + 0 \cdot A_3 = 0 \\ (c_{12} + c_{11} q_1^2) A_1 + 0 \cdot A_2 + (-\,c_{12} + c_{11}) q_3 A_3 = 0. \end{cases} \tag{5. 99}$$

La deuxième équation de ce système homogène impose $A_2 = 0$. Les deux autres équations sont compatibles si le déterminant des coefficients de A_1 et A_3 est nul :

$$2q_1q_3(c_{11} - c_{12}) - (1 - q_3^2)(c_{12} + c_{11}q_1^2) = 0.$$

En remplaçant c_{11} et c_{12} par leurs expressions en fonction des vitesses V_L et V_T, $q_1 = n_3^{(1)}$ et $q_3 = n_3^{(3)}$ par leurs valeurs :

$$c_{11} - c_{12} = 2\rho V_T^2$$

$$1 - q_3^2 = 2 - \frac{V^2}{V_T^2}$$

$$c_{12} + c_{11}q_1^2 = \rho(V_L^2 - 2V_T^2) - \rho V_L^2\left(1 - \frac{V^2}{V_L^2}\right) = -\rho V_T^2\left(2 - \frac{V^2}{V_T^2}\right)$$

il vient

$$4\left(1 - \frac{V^2}{V_L^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{V^2}{V_T^2}\right)^{1/2} = \left(2 - \frac{V^2}{V_T^2}\right)^2. \qquad (5.\,100)$$

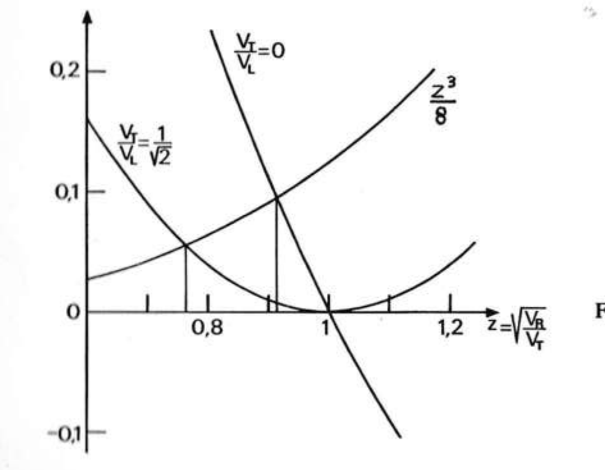


FIG. 5. 41. — *Résolution graphique de l'équation 5.101 donnant la vitesse V_R des ondes de Rayleigh dans les cas limites $\frac{V_T}{V_L} = 0$ et $\frac{V_T}{V_L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Le développement de cette équation montre qu'elle est du troisième degré en V^2; en posant $z = \left(\frac{V}{V_T}\right)^2$:

$$z^3 - 8z^2 + 8z\left[3 - 2\left(\frac{V_T}{V_L}\right)^2\right] - 16\left[1 - \left(\frac{V_T}{V_L}\right)^2\right] = 0$$

ou encore

$$z^3 - 8(z - 1)\left[z - 2\left(1 - \frac{V_T^2}{V_L^2}\right)\right] = 0. \qquad (5.\,101)$$

L'inconnue z peut être déterminée graphiquement par l'intersection de la cubique $y_1 = z^3/8$ avec la parabole $y_2 = (z-1)\left[z - 2\left(1 - \frac{V_T^2}{V_L^2}\right)\right]$. Les courbes de la figure 5. 41, tracées pour les valeurs extrêmes $\frac{V_T}{V_L} = 0$ et $\frac{V_T}{V_L} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, montrent l'existence d'une seule racine z_R positive inférieure à 1 qui est comprise entre 0,912 et 0,764. Cette solution définit la vitesse des ondes de Rayleigh par le rapport $\frac{V_R}{V_T} = \sqrt{z_R}$ qui varie de 0,955 à 0,874 lorsque V_T/V_L varie de 0 à $1/\sqrt{2}$. La formule de Viktorov [8] fournit une approximation utile de V_R :

$$\frac{V_R}{V_T} = \frac{0{,}718 - \left(\frac{V_T}{V_L}\right)^2}{0{,}75 - \left(\frac{V_T}{V_L}\right)^2}.$$

Le fait que V_R soit toujours inférieur à V_T peut s'interpréter par l'absence de matière au-dessus de la surface libre qui équivaut à diminuer les constantes de rigidité.

Pour la valeur V_R du paramètre V la première et la troisième équation du système 5. 99 sont identiques et A_3 est proportionnel à A_1 :

$$A_3 = -\frac{2q_1}{1 - q_3^2} A_1.$$

Les composantes du déplacement $u_k = \sum_r A_r u_k^{(r)}$

$$\begin{cases} u_1 = A_1\left(u_1^{(1)} - \frac{2q_1}{1 - q_3^2} u_1^{(3)}\right) \\ u_2 = 0 \\ u_3 = A_1\left(u_3^{(1)} - \frac{2q_1}{1 - q_3^2} u_3^{(3)}\right) \end{cases}$$

s'écrivent, compte tenu de la relation 5. 92 et des valeurs des composantes $\circ u_k^{(r)}$:

$$\begin{cases} u_1 = A_1\left(e^{-iq_1\frac{\omega}{V_R}x_3} + \frac{2q_1q_3}{1 - q_3^2} e^{-iq_3\frac{\omega}{V_R}x_3}\right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right)} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = A_1q_1\left(e^{-iq_1\frac{\omega}{V_R}x_3} - \frac{2}{1 - q_3^2} e^{-iq_3\frac{\omega}{V_R}x_3}\right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right)}. \end{cases} \qquad (5.\,102)$$

Il apparaît les constantes

$$\chi_1 = iq_1 \frac{\omega}{V_R} = \frac{2\pi}{\lambda_R}\left(1 - \frac{V_R^2}{V_L^2}\right)^{1/2}$$
$$\chi_3 = iq_3 \frac{\omega}{V_R} = \frac{2\pi}{\lambda_R}\left(1 - \frac{V_R^2}{V_T^2}\right)^{1/2} \quad (5.\ 103)$$

où λ_R est la longueur d'onde de Rayleigh, et le facteur

$$a = -\frac{2q_1q_3}{1-q_3^2} = \frac{2\left(1 - \frac{V_R^2}{V_L^2}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{V_R^2}{V_T^2}\right)^{1/2}}{2 - \frac{V_R^2}{V_T^2}}$$

qui est égal, étant donné l'équation 5. 100, à :

$$a = 1 - \frac{V_R^2}{2V_T^2} = \frac{1-q_3^2}{2}. \quad (5.\ 104)$$

Finalement les composantes du déplacement sont

$$\begin{cases} u_1 = A_1(e^{-\chi_1 x_3} - a\, e^{-\chi_3 x_3})\, e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right)} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = -iA_1\left(1 - \frac{V_R^2}{V_L^2}\right)^{1/2}\left(e^{-\chi_1 x_3} - \frac{1}{a} e^{-\chi_3 x_3}\right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right)}. \end{cases} \quad (5.\ 105)$$

Comme $u_2 = 0$, le déplacement des particules est contenu dans le plan formé par la direction de propagation (Ox_1) et la normale à la surface libre (Ox_3), appelé plan sagittal. L'imaginaire (i) traduit un déphasage de $\pi/2$ entre u_1 et u_3 qui se retrouve dans les parties réelles de ces composantes :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[u_1] = U_1(x_3) \cos \omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right) \\ \mathrm{Re}[u_3] = U_3(x_3) \sin \omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right). \end{cases} \quad (5.\ 106)$$

Ainsi au passage de l'onde de Rayleigh, le mouvement des particules est elliptique quelle que soit la profondeur x_3. Les lois de variation des amplitudes $U_1(x_3)$ et $U_3(x_3)$ en fonction de x_3 :

$$\begin{cases} U_1(x_3) = A_1(e^{-\chi_1 x_3} - a\, e^{-\chi_3 x_3}) \\ U_3(x_3) = A_1\left(1 - \frac{V_R^2}{V_L^2}\right)^{1/2}\left(e^{-\chi_1 x_3} - \frac{1}{a} e^{-\chi_3 x_3}\right) \end{cases} \quad (5.\ 107)$$

étant différentes, l'ellipse se déforme et la polarisation de rétrograde à la surface peut devenir directe. Les courbes de la figure 5. 42 tracées pour la silice ($V_R = 3\,410$ m/s) sont un exemple des variations de U_1 (composante longitudinale) et de U_3 (composante transversale) valable pour de nombreux matériaux isotropes : la composante transversale vaut à la surface environ une fois et demie la composante longitudinale, celle-ci change de signe à une profondeur de l'ordre de 0,2 λ_R.

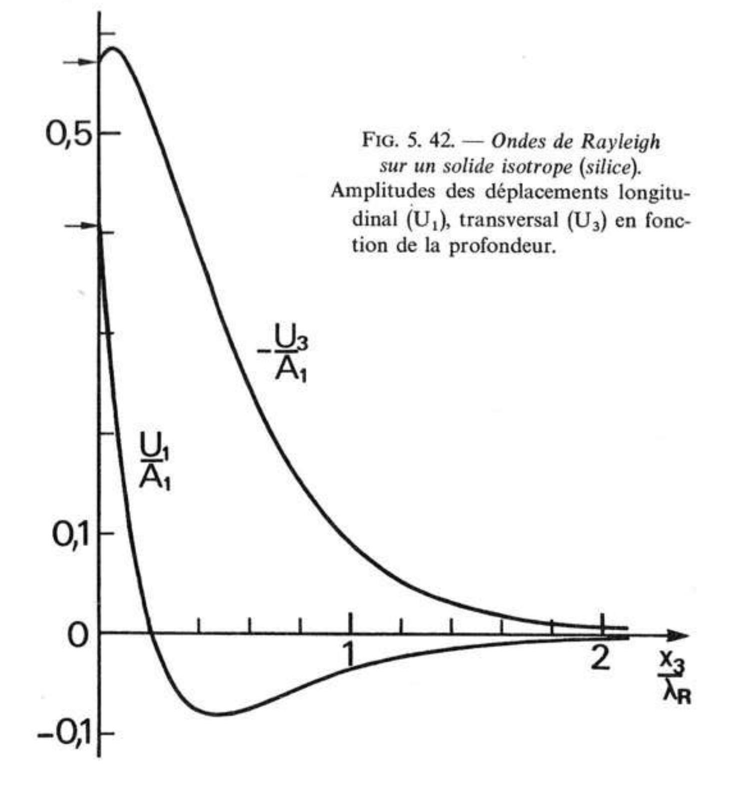


FIG. 5. 42. — *Ondes de Rayleigh sur un solide isotrope (silice).* Amplitudes des déplacements longitudinal (U_1), transversal (U_3) en fonction de la profondeur.

5. 3. 2. — *Milieu anisotrope*

Dans un cristal les équations ne peuvent être résolues que numériquement. Les résultats font apparaître des différences avec le cas isotrope :

— La vitesse des ondes de surface dépend de la direction de propagation dans le plan de la surface libre, excepté si celui-ci est perpendiculaire à un axe d'ordre six (CdS, ZnO).

— Si le plan sagittal n'est pas un plan de symétrie pour les propriétés élastiques, le vecteur déplacement a trois composantes orthogonales au lieu de deux; son extrémité décrit une ellipse dans un plan incliné par rapport au plan sagittal.

— Les racines $n_3^{(r)}$ de l'équation séculaire 5. 91 ne sont plus imaginaires mais complexes. Il s'ensuit que les amplitudes des composantes du déplacement tendent vers zéro en oscillant comme le montre la figure 5. 43.

— Le flux d'énergie n'est en général pas parallèle à la direction de propagation comme dans le cas des ondes de volume. Le mode de Rayleigh n'est pur qu'à la surface de plans particuliers et dans des directions précises qui sont d'une grande importance pratique.

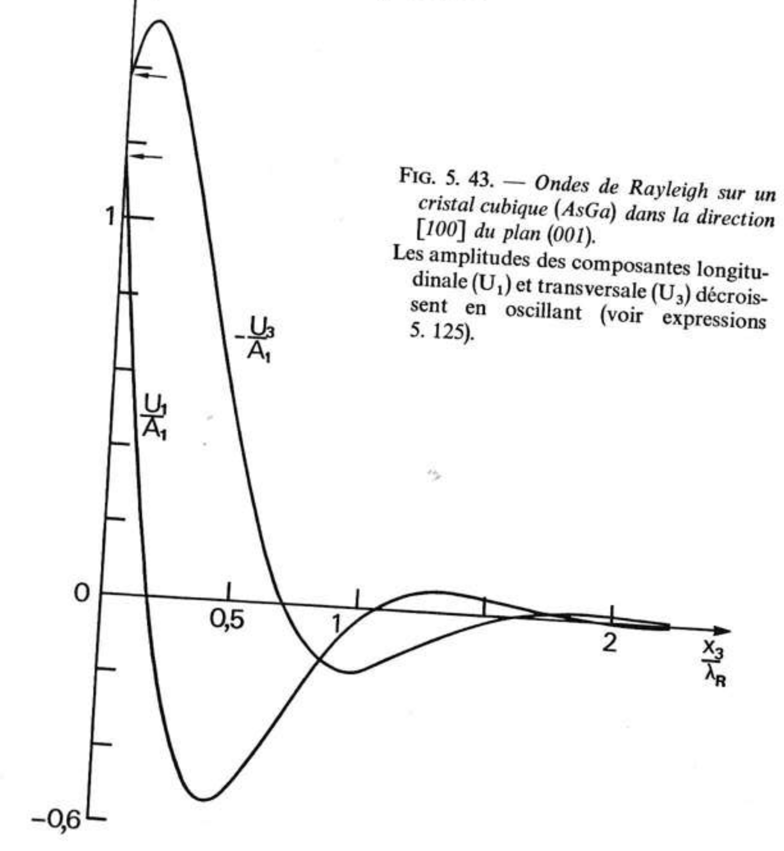


FIG. 5. 43. — *Ondes de Rayleigh sur un cristal cubique (AsGa) dans la direction [100] du plan (001).*
Les amplitudes des composantes longitudinale (U_1) et transversale (U_3) décroissent en oscillant (voir expressions 5. 125).

— Dans des directions isolées, sur certaines surfaces de milieux anisotropes, il existe une solution du type onde de Rayleigh dont la vitesse de phase est supérieure à celle de l'onde transversale lente. Toutefois dès qu'on s'écarte de cette direction isolée, l'onde n'est plus rigoureusement une onde de surface, il apparaît une composante qui donne naissance à un rayonnement d'énergie vers le cœur du matériau. Cette solution, qui ne satisfait pas à la condition d'annulation du déplacement à une profondeur infinie, est appelée pseudo-onde de surface [9] (en anglais *pseudo* ou *leaky surface wave*).

L'exemple choisi pour illustrer la méthode générale, exposée au début du paragraphe 5. 3, montre la complexité des calculs même dans le cas anisotrope le plus simple.

PROPAGATION D'UNE ONDE DE RAYLEIGH SUIVANT LA DIRECTION [100] DU PLAN (001) D'UN CRISTAL CUBIQUE. — Comme $n_1 = 1$ et $n_2 = 0$ les expressions 5. 32 des composantes du tenseur de propagation dans un cristal cubique deviennent en posant $n_3 = q$:

$$\Gamma_{11} = c_{11} + c_{44}q^2 \qquad \Gamma_{12} = 0 \qquad \Gamma_{13} = (c_{12} + c_{44})q$$
$$\Gamma_{22} = c_{44}(1 + q^2) \qquad \Gamma_{23} = 0 \qquad \Gamma_{33} = c_{44} + c_{11}q^2.$$

Comme $\Gamma_{12} = \Gamma_{23} = 0$ l'équation séculaire se factorise :

$$(\Gamma_{22} - \rho V^2)[(\Gamma_{11} - \rho V^2)(\Gamma_{33} - \rho V^2) - \Gamma_{13}^2] = 0.$$

La racine $q_2 = n_3^{(2)}$ est donnée par

$$c_{44}(1 + q_2^2) = \rho V^2$$

soit en introduisant la vitesse $V_T = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}$ de l'onde transversale dégénérée :

$$q_2^2 = \frac{V^2}{V_T^2} - 1.$$

Pour que q_2 soit imaginaire, il faut que la vitesse des ondes de Rayleigh V soit inférieure à V_T :

$$q_2 = -i\left(1 - \frac{V^2}{V_T^2}\right)^{1/2}.$$

Les deux autres racines $q_1 = n_3^{(1)}$ et $q_3 = n_3^{(3)}$ sont solutions de l'équation bicarrée :

$$(c_{11} - \rho V^2 + c_{44}q^2)(c_{44} - \rho V^2 + c_{11}q^2) - (c_{12} + c_{44})^2 q^2 = 0$$

qui s'écrit encore

$$c_{11}c_{44}(q^2)^2 + q^2[(c_{11} - \rho V^2)c_{11} + (c_{44} - \rho V^2)c_{44} - (c_{12} + c_{44})^2] + (c_{11} - \rho V^2)(c_{44} - \rho V^2) = 0. \qquad (5.\ 108)$$

Les composantes sur Ox_2 des vecteurs propres $\overrightarrow{°u}^{(1)}$ et $\overrightarrow{°u}^{(3)}$ sont nulles; les deux autres composantes $°u_1$ et $°u_3$ vérifient la relation :

$$(\Gamma_{11} - \rho V^2)°u_1 + \Gamma_{13}°u_3 = 0.$$

En prenant $°u_1 = 1$, il vient :

$$°u_3 = -\frac{\Gamma_{11} - \rho V^2}{\Gamma_{13}}$$

soit pour chacun des vecteurs propres $\overrightarrow{°u}^{(1)}$ et $\overrightarrow{°u}^{(3)}$:

$$p_1 = °u_3^{(1)} = -\frac{c_{11} - \rho V^2 + c_{44}q_1^2}{(c_{12} + c_{44})q_1} \quad \text{et} \quad p_3 = °u_3^{(3)} = -\frac{c_{11} - \rho V^2 + c_{44}q_3^2}{(c_{12} + c_{44})q_3}. \qquad (5.\ 109)$$

Compte tenu de ces résultats

$$\overrightarrow{{}^\circ u}^{(1)}(1, 0, p_1) \qquad \overrightarrow{{}^\circ u}^{(2)}(0, 1, 0) \qquad \overrightarrow{{}^\circ u}^{(3)}(1, 0, p_3)$$

le développement de la condition aux limites 5. 94 est identique à celui du milieu isotrope (5. 98) car les composantes ${}^\circ u_k^{(r)}$ et c_{ijkl} non nulles sont les mêmes dans les deux cas :

$$\begin{cases} \sum_r ({}^\circ u_3^{(r)} + q_r {}^\circ u_1^{(r)}) A_r = 0 \\ \sum_r q_r {}^\circ u_2^{(r)} A_r = 0 \\ \sum_r (c_{12} {}^\circ u_1^{(r)} + c_{11} q_r {}^\circ u_3^{(r)}) A_r = 0. \end{cases}$$

Étant donné les valeurs des composantes ${}^\circ u_k^{(r)}$:

$$\begin{cases} (p_1 + q_1) A_1 + 0 \cdot A_2 + (p_3 + q_3) A_3 = 0 \\ 0 \cdot A_1 + q_2 A_2 + 0 \cdot A_3 = 0 \\ (c_{12} + c_{11} q_1 p_1) A_1 + 0 \cdot A_2 + (c_{12} + c_{11} q_3 p_3) A_3 = 0. \end{cases} \qquad (5.\ 110)$$

La deuxième équation impose $A_2 = 0$. Les deux autres équations sont compatibles si le déterminant des coefficients de A_1 et A_3 est nul :

$$(p_1 + q_1)(c_{12} + c_{11} p_3 q_3) - (p_3 + q_3)(c_{12} + c_{11} p_1 q_1) = 0. \qquad (5.\ 111)$$

A partir des expressions 5. 109 et en posant $c = c_{11} - \rho V^2$ il vient :

$$p_r q_r = -\frac{c + c_{44} q_r^2}{(c_{12} + c_{44})} \qquad r = 1 \quad \text{ou} \quad 3 \qquad (5.\ 112)$$

et

$$p_r + q_r = \frac{(c_{12} + c_{44}) q_r^2 - c - c_{44} q_r^2}{(c_{12} + c_{44}) q_r} = -\frac{c - c_{12} q_r^2}{(c_{12} + c_{44}) q_r}. \qquad (5.\ 113)$$

Après substitution dans 5. 111 et réduction au même dénominateur :

$$(c - c_{12} q_3^2)[c_{12}(c_{12} + c_{44}) - cc_{11} - c_{11} c_{44} q_1^2] q_1 - (c - c_{12} q_1^2)[c_{12}(c_{12} + c_{44}) - cc_{11} - c_{11} c_{44} q_3^2] q_3 = 0.$$

Le regroupement des termes conduit à l'équation

$$c_{12} c_{11} c_{44} q_1^2 q_3^2 (q_1 - q_3) - cc_{11} c_{44} (q_1^3 - q_3^3) + c_{12}[c_{12}(c_{12} + c_{44}) - cc_{11}] q_1 q_3 (q_1 - q_3) + c[c_{12}(c_{12} + c_{44}) - cc_{11}](q_1 - q_3) = 0$$

qui s'écrit en divisant par $(q_1 - q_3)$ et en rassemblant au second membre tous les produits $q_1 q_3$:

$$c_{12} c_{11} c_{44} q_1^2 q_3^2 - cc_{11} c_{44} (q_1^2 + q_3^2) + c[c_{12}(c_{12} + c_{44}) - cc_{11}] = (c_{12} + c_{44})(cc_{11} - c_{12}^2) q_1 q_3. \qquad (5.\ 114)$$

Le produit $q_1^2 q_3^2$ et la somme $q_1^2 + q_3^2$ des racines de l'équation 5. 108 du second degré en $q^2 = n_3^2$ sont donnés par :

$$c_{11} c_{44} q_1^2 q_3^2 = c(c_{44} - \rho V^2)$$

et

$$- c_{11} c_{44} (q_1^2 + q_3^2) = cc_{11} + c_{44}(c_{44} - \rho V^2) - (c_{12} + c_{44})^2.$$

En reportant ces valeurs dans le premier membre M de l'équation 5. 114 celui-ci devient :

$$M = c_{12} c (c_{44} - \rho V^2) + c[cc_{11} + c_{44}(c_{44} - \rho V^2) - (c_{12} + c_{44})^2 + c_{12}(c_{12} + c_{44}) - cc_{11}]$$

ou encore

$$M = c[(c_{44} - \rho V^2)(c_{12} + c_{44}) - c_{44}(c_{12} + c_{44})]$$

soit après simplification

$$M = - \rho V^2 c (c_{12} + c_{44}).$$

Élevons au carré le second membre N de 5. 114 pour faire apparaître $q_1^2 q_3^2$

$$N^2 = (c_{12} + c_{44})^2 (cc_{11} - c_{12}^2)^2 \frac{c(c_{44} - \rho V^2)}{c_{11} c_{44}}.$$

L'égalité $M^2 = N^2$ conduit à

$$(\rho V^2)^2 cc_{11} = (cc_{11} - c_{12}^2)^2 \left(1 - \frac{\rho V^2}{c_{44}}\right).$$

En posant

$$R = \frac{\rho V^2}{c_{11}} = \left(\frac{V}{V_L}\right)^2 \qquad (5.\ 115)$$

où V_L est la vitesse de l'onde longitudinale dans la direction [100], l'équation du troisième degré en R qui donne la vitesse des ondes de Rayleigh $V_R = V_L R^{1/2}$ s'écrit compte tenu de $c = c_{11} - \rho V^2 = c_{11}(1 - R)$:

$$\boxed{R^2(1 - R) = \left[1 - \left(\frac{c_{12}}{c_{11}}\right)^2 - R\right]^2 \left(1 - \frac{c_{11}}{c_{44}} R\right)}. \qquad (5.\ 116)$$

Cette équation a été établie pour la première fois par Stoneley [10].

Le déplacement des particules se déduit des expressions 5. 92 et 5. 93 :

$$u_k = \sum_{r=1}^{3} A_r {}^\circ u_k^{(r)} e^{-i\omega \frac{n_3^{(r)}}{V_R} x_3} e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right)}$$

soit pour chaque composante, étant donné que $A_2 = 0$ et ${}^{\circ}u_1^{(1)} = {}^{\circ}u_1^{(3)} = 1$

$$\begin{cases} u_1 = A_1\left(e^{-i2\pi q_1 \frac{x_3}{\lambda_R}} + \dfrac{A_3}{A_1}\, e^{-i2\pi q_3 \frac{x_3}{\lambda_R}}\right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right)} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = A_1\left(p_1\, e^{-i2\pi q_1 \frac{x_3}{\lambda_R}} + \dfrac{A_3}{A_1}\, p_3\, e^{-i2\pi q_3 \frac{x_3}{\lambda_R}}\right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right)}. \end{cases} \tag{5. 117}$$

Le déplacement des particules s'effectue dans le plan sagittal [plan de symétrie (010)] comme dans le cas du milieu isotrope. Faisons l'hypothèse que les solutions q^2 de l'équation du second degré 5. 108 sont complexes et par conséquent conjuguées :

$$q^2 = Q\, e^{\pm i2\theta} \quad \text{avec} \quad Q > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Seules les racines q_1 et q_3 à partie imaginaire négative sont acceptables :

$$q_1 = -\sqrt{Q}\, e^{i\theta} = -g - ih \quad \text{et} \quad q_3 = \sqrt{Q}\, e^{-i\theta} = g - ih = -q_1^* \tag{5. 118}$$

avec

$$g = \sqrt{Q}\cos\theta \qquad \text{et} \qquad h = \sqrt{Q}\sin\theta.$$

Les formules 5. 109 montrent que $p_3 = -p_1^*$ et en posant

$$p_1 = r\, e^{-i\eta} \;\Rightarrow\; p_3 = -r\, e^{i\eta}$$

il vient

$$i\, r\, e^{-i\eta} = \frac{c\, e^{-i\theta} + c_{44} Q\, e^{i\theta}}{(c_{12} + c_{44})\sqrt{Q}}$$

soit

$$r^2 = \frac{(c + c_{44}Q)^2 \cos^2\theta + (c - c_{44}Q)^2 \sin^2\theta}{(c_{12} + c_{44})^2 Q} \tag{5. 119}$$

et

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{c - c_{44}Q}{c + c_{44}Q}\operatorname{tg}\theta. \tag{5. 120}$$

Le rapport A_3/A_1 est donné par le système 5. 110 qui se réduit pour $V = V_R$ à la première équation :

$$\frac{A_3}{A_1} = -\frac{p_1 + q_1}{p_3 + q_3}$$

soit compte tenu de la relation 5. 113 :

$$\frac{A_3}{A_1} = -\frac{c - c_{12}q_1^2}{c - c_{12}q_3^2}\cdot\frac{q_3}{q_1}.$$

En remplaçant q_1 et q_3 par leurs valeurs il vient, comme le module du rapport A_3/A_1 est égal à 1

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{c\, e^{-i\theta} - c_{12}Q\, e^{i\theta}}{c\, e^{i\theta} - c_{12}Q\, e^{-i\theta}} = e^{-i2\alpha} \tag{5. 121}$$

où α est l'argument du dénominateur :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c + c_{12}Q}{c - c_{12}Q}\operatorname{tg}\theta. \tag{5. 122}$$

Les formules 5. 120 et 5. 122 montrent que les angles η et α sont liés, il est possible d'établir que $\eta = 2\alpha - \dfrac{\pi}{2}$ et par conséquent

$$p_1 = ir\, e^{-i2\alpha} \qquad p_3 = ir\, e^{i2\alpha}. \tag{5. 123}$$

Les composantes longitudinale (u_1) et transversale (u_3) du déplacement s'obtiennent en reportant q_1, q_3 (formules 5. 118), p_1, p_3 (formules 5. 123) et A_3/A_1 (formule 5. 121) dans les expressions 5. 117

$$\begin{cases} u_1 = A_1\, e^{-2\pi h \frac{x_3}{\lambda_R}}\left(e^{i2\pi g \frac{x_3}{\lambda_R}} + e^{-i2\alpha}\, e^{-i2\pi g \frac{x_3}{\lambda_R}}\right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right)} \\ u_3 = iA_1 r\, e^{-2\pi h \frac{x_3}{\lambda_R}}\left(e^{-i2\alpha}\, e^{i2\pi g \frac{x_3}{\lambda_R}} + e^{-i2\pi g \frac{x_3}{\lambda_R}}\right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V_R}\right)} \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} u_1 = 2A_1\, e^{-2\pi h \frac{x_3}{\lambda_R}} \cos\left(2\pi g \dfrac{x_3}{\lambda_R} + \alpha\right) \exp i\left[\omega\left(t - \dfrac{x_1}{V_R}\right) - \alpha\right] \\ u_3 = i2A_1 r\, e^{-2\pi h \frac{x_3}{\lambda_R}} \cos\left(2\pi g \dfrac{x_3}{\lambda_R} - \alpha\right) \exp i\left[\omega\left(t - \dfrac{x_1}{V_R}\right) - \alpha\right]. \end{cases}$$

Les composantes réelles du déplacement :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[u_1] = U_1(x_3)\cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x_1}{V_R}\right) - \alpha\right] \\ \operatorname{Re}[u_3] = U_3(x_3)\sin\left[\omega\left(t - \dfrac{x_1}{V_R}\right) - \alpha\right] \end{cases} \tag{5. 124}$$

sont en quadrature de phase, si bien que les particules décrivent une ellipse dont les axes sont parallèle et perpendiculaire à la surface. Les amplitudes longitudinale

$$U_1(x_3) = 2A_1\, e^{-2\pi h \frac{x_3}{\lambda_R}} \cos\left(2\pi g \frac{x_3}{\lambda_R} + \alpha\right)$$

et transversale (5. 125)

$$U_3(x_3) = -2A_1 r\, e^{-2\pi h \frac{x_3}{\lambda_R}} \cos\left(2\pi g \frac{x_3}{\lambda_R} - \alpha\right)$$

oscillent avec une période spatiale λ_R/g égale au quotient de la longueur d'onde par la partie réelle des racines q_1 et q_3 et s'atténuent exponentiellement en profondeur à une vitesse qui dépend de la partie imaginaire de ces racines. Les courbes de la figure 5. 43 représentent les variations des amplitudes U_1/A_1 et U_3/A_1 en fonction de la profondeur normalisée x_3/λ_R, dans le cas de l'arséniure de gallium (*). Avec les constantes élastiques du tableau 4. 7 l'équation de Stoneley 5. 116 est vérifiée pour R = 0,3305, c'est-à-dire

$$V_R = 2\,720 \text{ m/s}.$$

Les racines q_1 et q_3 sont complexes :

$$g = 0{,}5613 \qquad h = 0{,}4017$$

et les formules 5. 119 et 5. 122 donnent

$$r = 1{,}185 \qquad \alpha = 54^\circ\,23'.$$

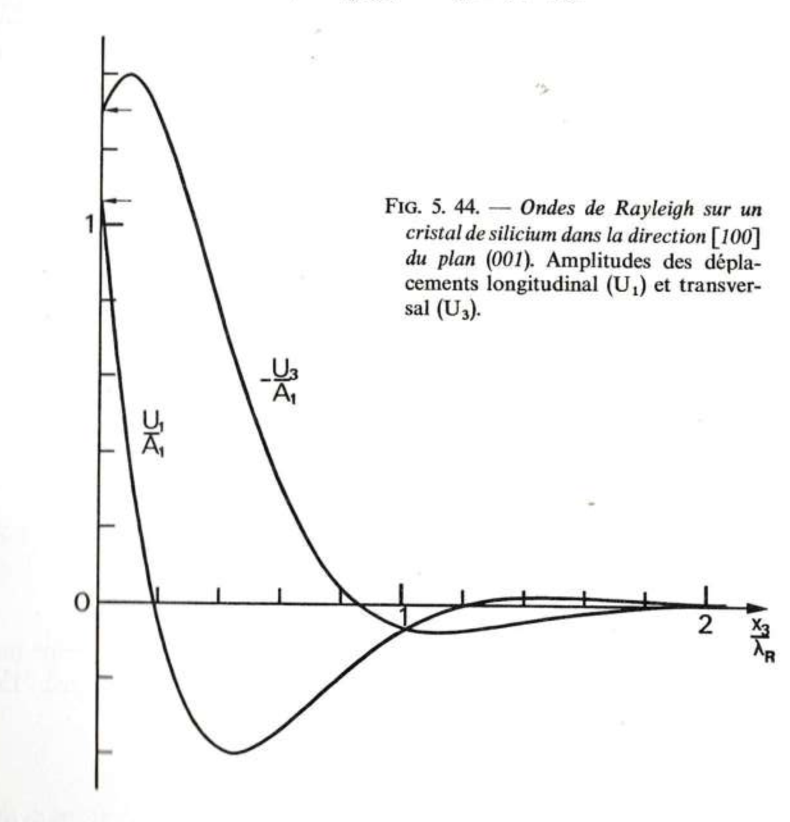


FIG. 5. 44. — *Ondes de Rayleigh sur un cristal de silicium dans la direction [100] du plan (001).* Amplitudes des déplacements longitudinal (U_1) et transversal (U_3).

(*) La piézoélectricité de ce matériau n'a pas d'effet sur la propagation des ondes de Rayleigh dans la direction [100] du plan (001).

Les courbes de variation des déplacements avec la profondeur oscillent car, contrairement au cas isotrope, les racines $n_3^{(r)}$ sont complexes et non imaginaires pures. Pour les cristaux du système cubique, ceci se produit lorsque le facteur d'anisotropie $A = \dfrac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}$ est plus grand que 1. Pour AsGa, A = 1,83. Il en est de même pour le silicium (A = 1,565) :

$$V_R = 4\,917 \text{ ms}^{-1} \qquad g = 0{,}4808 \qquad h = 0{,}4556$$
$$r = 1{,}226 \qquad \alpha = 58^\circ\,01'$$

dont les composantes du déplacement sont représentées sur la figure 5. 43.

Pratiquement les ondes de Rayleigh sont engendrées directement à la surface du cristal par un champ électrique (paragr. 7. 2). Les matériaux utiles sont donc piézoélectriques. En conséquence les conditions de propagation pour les principaux cristaux employés (quartz, niobate de lithium) sont décrites au paragraphe 6. 2. 2 du chapitre suivant « Piézoélectricité ».

RÉFÉRENCES

[1] G. W. FARNELL and E. L. ADLER. — Elastic wave propagation in thin layers, fig. 25. In *Physical Acoustics* (W. P. MASON and R. N. THURSTON, eds) vol. *9*, p. 35-127. New York : Academic Press (1972).

[2] F. E. BORGNIS. — Specific directions of longitudinal wave propagation in anisotropic media, *Phys. Rev.*, *98*, p. 1000-1005 (1955).

[3] K. BRUGGER. — Pure modes for elastic waves in crystals, *J. Appl. Phys.*, *36*, p. 759-768 (1965).

[4] A. LEVELUT. — Propagation de l'énergie acoustique dans les cristaux (systèmes cubique, hexagonal et quadratique), *Acta. Cryst.*, *A 25* p. 553-563 (1969).

[5] D. L. ARENBERG. — Ultrasonic solid delay lines, *J. Acoust. Soc. Am.*, *20*, p. 1-25 (1948).

[6] LORD RAYLEIGH. — On waves propagated along the plane surface of an elastic solid, *Proc. London Math. Soc.*, *17*, p. 4-11 (1885).

[7] G. W. FARNELL. — Properties of elastic surface waves, p. 114. In *Physical Acoustics* (W. P. MASON and R. N. THURSTON, eds), vol. *6*, p. 109-166. New York : Academic Press (1970).

[8] I. A. VIKTOROV. — *Rayleigh and Lamb waves*, p. 3. New York : Plenum Press (1967).

[9] T. C. LIM and G. W. FARNELL. — Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals, *J. Acoust. Soc. Am.*, *45*, p. 845-851 (1969).

[10] R. STONELEY. — The propagation of surface elastic waves in a cubic crystal, *Proc. Roy. Soc.*, *A 232*, p. 447-458 (1955).

BIBLIOGRAPHIE

Ondes planes dans un cristal illimité. Réflexion et réfraction.

F. I. FEDOROV. — *Theory of elastic waves in crystals*, chap. 3, 4, 8. New York : Plenum Press (1968).

B. A. AULD. — *Acoustic fields and waves in solids*, chap. 7 vol. I, chap. 9 vol. II. New York : Wiley-Interscience (1973).

L. Landau et E. Lifchitz. — *Théorie de l'élasticité*, chap. 3. Moscou : Mir (1967).
M. R. Redwood. — *Mechanical wave guides*, chap. 2. Londres : Pergamon Press (1960).
M. J. P. Musgrave. — The propagation of elastic waves in crystals and other anisotropic media, *Reports Prog. in Phys., 22*, p. 74-96 (1959).
G. W Farnell. — Elastic waves in trigonal crystals, *Can. J. Phys., 39*, p. 65-80 (1961).

Propagation dans une couche mince. Ondes de Love.

G. W. Farnell and E. L. Adler. — Référence 1.
P. Tournois and C. Lardat. — Love wave dispersive delay lines for wide band pulse compression, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, vol. *SU-16*, p. 107-117 (1969).

Ondes de Rayleigh.

G. W. Farnell. — Référence 7.
I. A. Viktorov. — Référence 8.
K. Kajimura, R. Inaba and N. Mikoshiba. — Experimental evidence for elliptic particule motion accompanied by elastic surface waves, *Appl. Phys. Lett., 19*, 182 (1971).
M. W. Lawrence and L. W. Davies. — Surface motion measurements on surface elastic waves, *Appl. Phys. Lett., 20*, 328 (1972).

EXERCICES

• **5. 1.** Exprimer, dans le cas d'une onde plane sinusoïdale pure d'amplitude a, la puissance moyenne $\mathscr{P}$ transportée par un faisceau de section A.

Solution. Pour un mode pur :

$$\mathscr{P} = \langle P \rangle A = V \langle \mathscr{E} \rangle A.$$

En régime sinusoïdal $F(t) = \cos \omega t$, la formule 5. 22 donne

$$\langle \mathscr{E} \rangle = \rho a^2 \omega^2 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2$$

et en fonction de l'impédance élastique par unité de surface $Z = \rho V$, définie lors de l'exercice 1. 3 :

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2} Z \omega^2 a^2 A.$$

• **5. 2.** Montrer qu'une onde longitudinale est toujours pure.

Solution. Comme ${}^{\circ}u_j = n_j$ la formule 5. 24 donne pour la vitesse d'énergie :

$$V_i^e = c_{ijkl} \frac{n_j n_k {}^{\circ}u_l}{\rho V} = \frac{\Gamma_{il} {}^{\circ}u_l}{\rho V}.$$

Compte tenu de l'équation de Christoffel $\Gamma_{il} {}^{\circ}u_l = \rho V^2 \, {}^{\circ}u_i$

$$V_i^e = V {}^{\circ}u_i = V n_i$$

la vitesse d'énergie est parallèle à la direction de propagation.

• **5. 3.** Démontrer que s'il existe dans une direction $\vec{n}$ un mode pur de polarisation ${}^{\circ}\vec{u}$ et de vitesse V, il se propage, à la même vitesse, dans la direction ${}^{\circ}\vec{u}$ une onde pure polarisée suivant $\vec{n}$. Application : montrer que dans le plan YZ d'un cristal trigonal il n'y a que deux directions pures pour l'onde transversale polarisée suivant X (désignées par AC et BC sur la figure 5. 25).

Solution. Étant donné la relation 5. 24 la condition de mode pur $V_i^e = V n_i$ est :

$$c_{ijkl} {}^{\circ}u_j {}^{\circ}u_l n_k = \gamma n_i \qquad \gamma = \rho V^2$$

ou en permutant les indices k et l comme $c_{ijlk} = c_{ijkl}$:

$$c_{ijkl} {}^{\circ}u_j {}^{\circ}u_k n_l = \gamma n_i.$$

La comparaison avec l'équation de Christoffel 5. 4 montre que $\vec{n}$ est la polarisation d'une onde se propageant dans la direction ${}^{\circ}\vec{u}$ à la vitesse V. Ce mode est pur puisque d'après 5. 4 :

$$c_{ijkl} n_j n_l {}^{\circ}u_k = \gamma {}^{\circ}u_i.$$

Lorsque le mode est pur, direction de propagation et polarisation sont interchangeables. Ainsi, dans un cristal de symétrie $\bar{3}m$, $3m$, 32, l'onde transversale de polarisation X est pure dans les *deux* directions perpendiculaires du plan YZ coïncidant avec les directions de polarisation des deux ondes transversales *pures non dégénérées* se propageant suivant l'axe binaire A_2 ou $\bar{A}_2$ porté par X.

• **5. 4.** Déterminer, par l'angle polaire θ^e, la direction de la vitesse d'énergie de l'onde transversale polarisée perpendiculairement au plan méridien d'un cristal du système hexagonal. Pour quelle valeur de l'angle θ la déviation $\theta - \theta^e$ est-elle maximale?

Solution. Avec la disposition des axes du paragraphe 5. 1. 6. 2c :

$${}^{\circ}u_i = \delta_{i1} \qquad n_1 = 0 \qquad n_2 = \sin\theta \qquad n_3 = \cos\theta$$

la formule 5. 24 donne

$$V_i^e = c_{i1k1} \frac{n_k}{\rho V}$$

soit

$$V_1^e = 0, \qquad V_2^e = c_{66} \frac{\sin\theta}{\rho V}, \qquad V_3^e = c_{44} \frac{\cos\theta}{\rho V}$$

et

$$\operatorname{tg} \theta^e = \frac{V_2^e}{V_3^e} = \frac{c_{66}}{c_{44}} \operatorname{tg} \theta = k \operatorname{tg} \theta \qquad \text{en posant} \qquad k = \frac{c_{66}}{c_{44}}.$$

La déviation $\theta - \theta^e$ est maximale lorsque $\dfrac{d\theta^e}{d\theta} = 1$, c'est-à-dire d'après la relation ci-dessus lorsque

$$\frac{\cos \theta_M}{\cos \theta_M^e} = \sqrt{k}.$$

En reportant

$$\operatorname{tg} \theta_M^e = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_M^e} - 1} = \sqrt{\frac{k}{\cos^2 \theta_M} - 1} = \sqrt{(k-1) + k \operatorname{tg}^2 \theta_M}$$

dans l'égalité $\operatorname{tg} \theta_M^e = k \operatorname{tg} \theta_M$ il vient

$$\operatorname{tg} \theta_M = \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{c_{44}}{c_{66}}}.$$

• **5. 5.** Chercher l'angle φ_0 dont il faut tourner le repère $Ox_1x_2x_3$ autour de l'axe Ox_3 pour annuler le module c_{16} d'un cristal de symétrie 4, $\bar{4}$ ou $4/m$.

Solution. Étant donné la forme (3. 12) de la matrice de rotation α_i^j d'angle φ autour de Ox_3, le développement du nouveau module c'_{16} :

$$c'_{16} = c'_{1112} = \alpha_1^i \alpha_1^j \alpha_1^k \alpha_2^l c_{ijkl}$$

ne contient que les anciens modules c_{ijkl} sans indice 3 du tableau 4. 55 :

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{11}, \qquad c_{1122} = c_{12}, \qquad c_{1212} = c_{66}, \qquad c_{1112} = c_{16}, \qquad c_{2212} = -c_{16}.$$

Le coefficient de c_{11} est :

$$a_{11} = \alpha_1^1\alpha_1^1\alpha_1^1\alpha_2^1 + \alpha_1^2\alpha_1^2\alpha_1^2\alpha_2^2 = -\cos^3\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}(-\cos 2\varphi) = -\frac{\sin 4\varphi}{4}$$

celui de c_{12} :

$$a_{12} = \alpha_1^1\alpha_1^1\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_1^2\alpha_1^1\alpha_2^1 = \cos^3\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 4\varphi}{4}$$

celui de c_{66} :

$$a_{66} = (\alpha_1^1\alpha_1^2 + \alpha_1^2\alpha_1^1)(\alpha_1^1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2^1) = \sin 2\varphi\cos 2\varphi = \frac{\sin 4\varphi}{2}$$

et enfin le coefficient de c_{16} :

$$a_{16} = \alpha_1^1\alpha_1^1(\alpha_1^1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2^1) + \alpha_1^1\alpha_2^1(\alpha_1^1\alpha_1^2 + \alpha_1^2\alpha_1^1) - \alpha_1^2\alpha_1^2(\alpha_1^1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_2^1) - \alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1^1\alpha_1^2 + \alpha_1^2\alpha_1^1)$$

$$a_{16} = \cos^2\varphi\cos 2\varphi - \frac{\sin^2 2\varphi}{2} - \sin^2\varphi\cos 2\varphi - \frac{\sin^2 2\varphi}{2} = \cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi = \cos 4\varphi.$$

L'expression

$$c'_{16} = \frac{1}{2}\left(c_{66} - \frac{c_{11} - c_{12}}{2}\right)\sin 4\varphi + c_{16}\cos 4\varphi$$

montre que le module c'_{16} s'annule pour l'angle φ_0 tel que

$$\boxed{\operatorname{tg} 4\varphi_0 = \frac{4c_{16}}{c_{11} - c_{12} - 2c_{66}}}.$$

• **5. 6.** De quel angle faut-il tourner le repère $Ox_1x_2x_3$ autour de Ox_3 pour annuler le module c_{25} des cristaux de symétrie 3 et $\bar{3}$?

Solution. Comme $\alpha_3^l = \delta_{3l}$ le développement du nouveau module :

$$c'_{25} = c'_{2213} = \alpha_2^i\alpha_2^j\alpha_1^k c_{ijk3}$$

ne contient que les constantes c_{ijk3} avec $i, j, k \neq 3$, soit d'après le tableau 4. 54 :

$c_{1113} = -c_{25}$, $c_{2213} = c_{25}$, $c_{1213} = c_{2113} = c_{14}$, $c_{1123} = c_{14}$, $c_{2223} = -c_{14}$, $c_{1223} = c_{2123} = c_{25}$.

Le regroupement des termes en c_{25} et en c_{14} conduit à :

$$c'_{25} = c_{25}(\cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi) + c_{14}(\sin^3\varphi - 3\cos^2\varphi\sin\varphi).$$

Le nouveau module :

$$c'_{25} = c_{25}\cos 3\varphi - c_{14}\sin 3\varphi$$

s'annule pour l'angle φ_0 tel que

$$\boxed{\operatorname{tg} 3\varphi_0 = \frac{c_{25}}{c_{14}}}.$$

• **5. 7.** Trouver les expressions de la vitesse de phase $V_\varphi = \omega/k_2$ et de la vitesse de groupe $V_g = d\omega/dk_2$ des ondes de Love.

Solution. D'après 5. 82 :

$$\frac{V_\varphi}{V_3} = \frac{\omega/V_3}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{V_3}\right)^2 - k_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_1 V_3}{\omega}\right)^2}}.$$

En différentiant les relations 5. 86, 5. 82 et 5. 84 il vient :

$$\left(\frac{V_g}{V_3}\right)\left(\frac{V_\varphi}{V_3}\right) = \frac{1+\alpha}{\left(\frac{V_3}{V'_3}\right)^2 + \alpha} \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{\chi_1^2}{k_1^2} + \frac{c_{44}}{c'_{44}}\cdot\frac{\chi_1 h}{\cos^2 k_1 h}.$$

CHAPITRE 6

PIÉZOÉLECTRICITÉ

La piézoélectricité, interdépendance des propriétés élastiques et électriques existant dans certains matériaux, est intimement liée à l'étude des ondes élastiques. La plupart des dispositifs convertissant l'énergie mécanique en énergie électrique ou réciproquement, appelés transducteurs, fonctionnent par effet piézoélectrique (*) direct ou inverse (les deux principaux types de transducteurs utilisés pour lancer des ondes élastiques progressives de volume et de surface sont décrits au chapitre suivant). D'autre part, l'exploitation en électronique, dans le domaine du filtrage, des propriétés mécaniques remarquables de certains cristaux, comme leur grand coefficient de surtension, est possible grâce à leur piézoélectricité. Des résonateurs électromécaniques, en quartz par exemple, sont directement insérés dans des circuits, leur vibration étant entretenue par le champ électrique. Ce chapitre est divisé en deux parties; la première traite des phénomènes statiques, la seconde se rapporte à la propagation des ondes élastiques dans les solides piézoélectriques.

6. 1. — PHÉNOMÈNES STATIQUES

Sous ce titre nous incluons l'énoncé des principes de Curie qui ont été à la base de la découverte de la piézoélectricité, une explication élémentaire du couplage électromécanique, les diverses expressions tensorielles des relations entre grandeurs électriques et mécaniques et la réduction du nombre de composantes des tenseurs piézoélectriques.

6. 1. 1. — Principes de symétrie de Curie. Application à la piézoélectricité

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une tension mécanique (effet direct) et de se déformer lorsqu'un champ électrique leur est appliqué (effet inverse). La découverte de l'effet piézoélectrique direct, en 1880, par Pierre et Jacques Curie a directement découlé de l'exploitation de principes reliant la symétrie et la dissymétrie des causes et des effets. Clarifiant les conditions imposées par la symétrie, qui jusque-là étaient mises en œuvre de façon plus ou moins intuitive, Pierre Curie énonça les deux principes suivants :

1° Un phénomène possède tous les éléments de symétrie des causes qui le produisent (les effets peuvent être plus symétriques que les causes).

2° La dissymétrie d'un phénomène préexiste dans les causes qui lui donnent naissance. Chaque phénomène est caractérisé par une symétrie maximale. Ainsi les éléments de symétrie d'une grandeur scalaire comme la température sont une infinité d'axes d'isotropie A_∞ et de miroirs perpendiculaires M et un centre : $\frac{\infty A_\infty}{\infty M}C$. Un vecteur polaire comme le champ électrique présente un axe d'isotropie A_∞ et une infinité de miroirs M passant par l'axe : $A_\infty \infty M$. La symétrie caractéristique d'une compression ou d'une traction, résultat de l'action de deux forces opposées (fig. 6. 1) est $\frac{A_\infty}{M}\frac{\infty A_2}{\infty M'}C$.

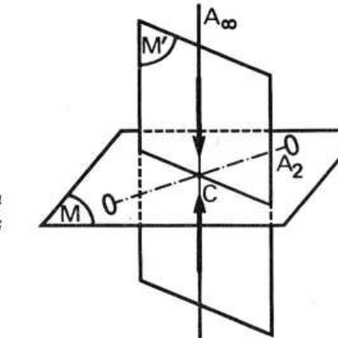


FIG. 6. 1. — *Symétrie caractéristique d'une compression ou d'une traction, résultat de l'action de deux forces opposées :* $\frac{A_\infty}{M}\frac{\infty A_2}{\infty M'}C$.

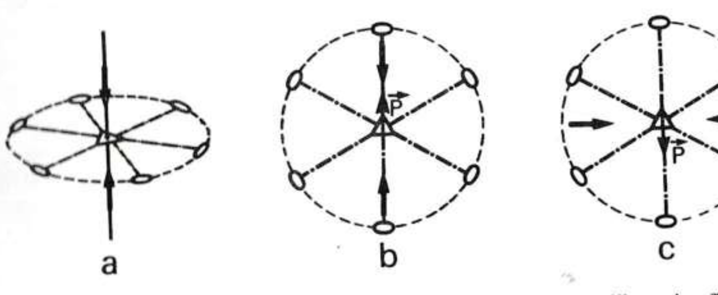
Les deux principes de Curie se résument dans l'énoncé suivant : *un phénomène ne peut exister que dans un système qui est un sous-groupe de la symétrie caractéristique du phénomène.*

Dans le cas de l'effet piézoélectrique direct, pour qu'une compression appliquée à un cristal crée une polarisation électrique il faut que le système cristal-compression soit un sous-groupe de la symétrie caractéristique de la polarisation : $A_\infty \infty M$. En particulier le système doit être dépourvu de centre de symétrie; la compression possédant un centre, le cristal doit être dénué de centre de symétrie : *les cristaux centrosymétriques ne peuvent pas être piézoélectriques.* Cette déduction due à Curie fut confirmée par l'expérience : dans les 21 classes dépourvues de centre — à l'exception de la classe 432 du système cubique (paragr. 6. 1. 4*e*) — Curie a trouvé des cristaux piézoélectriques.

Les principes de symétrie permettent aussi de prévoir la direction suivant laquelle il faut exercer la tension mécanique. Ainsi, dans le cas

(*) Il existe aussi des transducteurs à magnétostriction mais ils ne sont utilisables qu'à basse fréquence.

quartz α appartenant à la classe 32, une compression (ou une traction) rcée suivant l'axe ternaire (fig. 6. 2 *a*) ne crée aucune polarisation car la iétrie commune au cristal et à la compression ($A_3 3A_2$) n'est pas un s-groupe de celle du phénomène ($A_\infty \infty M$). Par contre la symétrie du tème cristal-compression suivant un axe binaire A_2 est compatible avec parition d'une polarisation $\vec{P}$ suivant cet axe (fig. 6. 2 *b*). Une compres-n perpendiculaire à l'axe binaire A_2 et à l'axe ternaire (fig. 6. 2 *c*) crée polarisation suivant l'axe A_2 qui est le seul élément de symétrie com-n au cristal et à la compression.



. 6. 2. — *Application des principes de Curie au quartz.* Pour qu'il y ait effet piézoélec-rique le système cristal-compression doit être un sous groupe de la symétrie de la pola-risation : $A_\infty \infty M$. *a*) Une compression suivant l'axe ternaire ne crée aucun effet puisque a symétrie du système ($A_3\,3A_2$) n'est pas un sous groupe de la polarisation. *b*) Une com-pression suivant un axe binaire induit une polarisation suivant cet axe. *c*) Une com-pression perpendiculaire à A_3 et à un A_2 induit une polarisation suivant A_2.

6. 1. 2. — Mécanisme physique. Modèle unidimensionnel

Nous avons expliqué dans le paragraphe 2. 5. 2 *a* qu'un cristal de sulfure cadmium est constitué de couches successives d'ions soufre et d'ions dmium. Dans une direction perpendiculaire à ces couches, c'est-à-dire rallèle à l'axe de symétrie d'ordre 6, les ions sont répartis sur des rangées entiques qui se correspondent par l'axe hélicoïdal 6_3 (fig. 2. 35). La consti-tion d'une de ces rangées est représentée sur la figure 6. 3 *a*.

Dans le cas d'actions extérieures (contraintes, champ électrique) dirigées ivant l'axe sénaire, il suffit de considérer une seule rangée car tous les ns d'une couche se déplacent de la même quantité. Soient $-q$ et $+q$ charges effectives des ions soufre et cadmium supposés reliés entre eux r des ressorts. Les deux plus proches voisins d'un ion n'étant pas métriques par rapport à cet ion, les ressorts disposés de part et d'autre t des constantes de rappel K_1 et K_2 différentes. La chaîne peut être visée en mailles de longueur *a*, comportant deux dipôles de moments $(a-b)$ et $-\frac{q}{2}b$ (fig. 6. 3 *a*). Le moment dipolaire d'une molécule est donc

$$p_0 = \frac{q}{2}(a-2b).$$

Au repos la polarisation par unité de volume P_0 … est différent de $a/2$, le corps est polaire :

$$P_0 = \frac{nq}{2}(a-2b)$$

n est le nombre de molécules CdS par unité de volume.

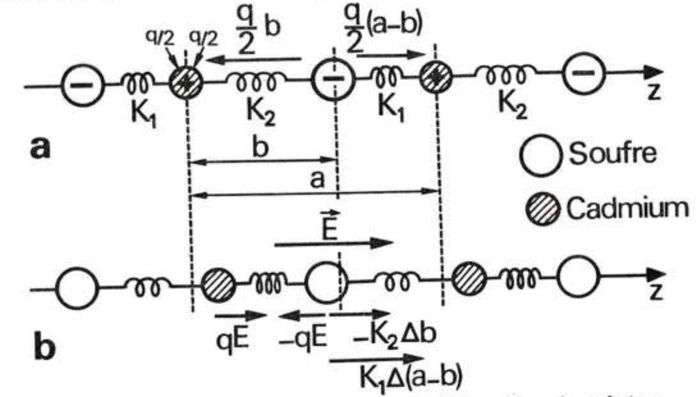


FIG. 6. 3. — *Piézoélectricité dans un cristal de sulfure de cadmium.*
a) Distribution des ions soufre et cadmium sur une rangée parallèle à l'axe sénaire *z*.
b) Déformation de la chaîne sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$; les ions Cd et S se déplacent en sens inverse. La longueur de la maille varie de Δa.

Ce modèle unidimensionnel met en évidence de façon simple l'inter-dépendance des propriétés mécaniques et électriques dans un matériau piézoélectrique :

— sous l'action d'une contrainte la chaîne se déforme; la modification des distances *a* et *b* entraîne une variation de la polarisation :

$$P = \Delta P_0 = \frac{nq}{2}(\Delta a - 2\,\Delta b) \qquad (6.\ 1)$$

c'est l'effet piézoélectrique direct;

— un champ électrique déplace en sens opposé les ions positifs et négatifs : la distance $(a-b)$ augmente, la distance *b* diminue. Les ressorts n'ayant pas la même raideur, il en résulte une déformation : c'est l'effet piézoélectrique inverse.

Cherchons les relations entre les grandeurs mécaniques : contrainte T et déformation S et les grandeurs électriques : champ E et polarisation induite P ou induction $D = \varepsilon_0 E + P$. L'équilibre statique de chaque ion exige (fig. 6. 3 *b*) :

$$-qE + K_1\,\Delta(a-b) - K_2\,\Delta b = 0. \qquad (6.\ 2)$$

Pour exprimer la tènsion mécanique T considérons une section per-pendiculaire à l'axe A_6. Deux rangées voisines, qui se correspondent par

l'axe hélicoïdal (6_3), sont décalées d'une demi-période $a/2$ (fig. 2. 35). Par conséquent un plan perpendiculaire à l'axe A_6 coupe alternativement des ressorts de raideur K_1 et K_2. Dans le premier cas la force exercée par la partie droite de la chaîne sur la partie gauche est :

$$F_1 = K_1 \Delta(a - b)$$

dans le second cas

$$F_2 = K_2 \Delta b.$$

En appelant N le nombre de rangées par unité de surface perpendiculaire à A_6, la tension mécanique *i. e.* la force par unité de surface est

$$T = \frac{N}{2} K_1 \Delta(a - b) + \frac{N}{2} K_2 \Delta b$$

car il y a autant de ressorts de chaque type. Comme $N = na$, il vient

$$T = \frac{na}{2} [K_1 \Delta a + (K_2 - K_1) \Delta b]. \qquad (6.\ 3)$$

La polarisation induite, qui s'obtient en reportant dans la relation 6. 1 l'expression

$$\Delta b = -\frac{qE}{K_1 + K_2} + \frac{K_1}{K_1 + K_2} \Delta a \qquad (6.\ 4)$$

tirée de l'équation 6. 2

$$P = \frac{nq}{2} \left[\frac{2qE}{K_1 + K_2} + \frac{K_2 - K_1}{K_1 + K_2} \Delta a\right], \qquad (6.\ 5)$$

est la somme de deux termes; le premier, proportionnel au champ électrique, définit la polarisabilité ionique du cristal $\chi_{ion} = \frac{nq^2}{K_1 + K_2}$, le second, proportionnel à la déformation $S = \frac{\Delta a}{a}$, traduit l'effet piézoélectrique direct :

$$P = \chi_{ion}E + eS$$

en désignant par e la constante piézoélectrique :

$$e = \frac{nq}{2} \left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1}\right) a. \qquad (6.\ 6)$$

La polarisation totale, compte tenu de la susceptibilité électronique χ_e, est :

$$P = (\chi_{ion} + \chi_e)E + eS$$

et l'induction électrique D s'écrit :

$$D = \varepsilon E + eS \qquad (6.\ 7)$$

en introduisant la constante diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi_{ion} + \chi_e$.

La contrainte s'obtient en remplaçant dans 6. 3 Δb par son expression 6. 4 :

$$T = \frac{na}{2} \left(\frac{2K_2K_1 \Delta a}{K_2 + K_1} - \frac{K_2 - K_1}{K_2 + K_1} qE\right).$$

Elle se met sous la forme

$$T = cS - eE \qquad (6.\ 8)$$

où $c = \frac{na^2K_1K_2}{K_2 + K_1}$ est la constante de rigidité et e le module piézoélectrique calculé précédemment. La formule 6. 6 montre que, dans ce modèle unidimensionnel, l'existence d'un effet piézoélectrique est liée à la dissymétrie des forces de rappel ($e = 0$ si $K_2 = K_1$). L'équation 6. 8 peut s'interpréter de différentes façons :

— à déformation nulle (cas d'une chaîne dont les extrémités sont fixées), un champ électrique crée une contrainte $T = -eE$;

— à contrainte nulle, un champ électrique provoque une déformation $S = \frac{e}{c} E$. Notons, dès maintenant, que la constante e est en réalité une des composantes d'un tenseur de rang trois puisque l'induction D_i est un tenseur de rang un (vecteur) et la déformation un tenseur de rang deux. En orientant l'axe Ox_3 du trièdre de référence suivant l'axe sénaire, l'équation 6. 7 s'écrit :

$$D_3 = \varepsilon_{33}E_3 + e_{333}S_{33}.$$

Ce modèle explique qualitativement l'origine de la piézoélectricité dans des cristaux ioniques dissymétriques. En réalité le mécanisme est plus complexe puisque l'effet piézoélectrique se manifeste dans des cristaux comme le tellure Te [1] ou le sélénium Se [2] constitués d'un seul type d'atomes. Dans ce cas la polarisation électrique produite par une déformation est à attribuer à la modification de la distribution électronique. En ce qui concerne les matériaux polycristallins comme les céramiques, ils ne deviennent piézoélectriques qu'après avoir subi un traitement particulier. Ces céramiques, constituées de plomb, de zirconium et de titane pour le type PZT, comprennent des domaines ferroélectriques (paragr. 2. 5. 2) qui s'orientent au hasard pendant la fabrication du matériau. L'application d'un champ électrique élevé (environ 20 000 V/cm) au matériau porté vers 100 °C, provoque un alignement de ces domaines et un allongement qui subsistent partiellement à la température ambiante et à champ nul. La polarisation permanente, et donc la piézoélectricité, disparaît au-dessus de la température de Curie, en moyenne comprise entre 200 et 400 °C. Du point de vue de la symétrie, la direction de polarisation est un axe d'isotropie. Tous les plans passant par l'axe sont équivalents, le matériau est dit transversalement isotrope.

6. 1. 3. — *Expressions tensorielles de la piézoélectricité*

La généralisation à trois dimensions de la formule 6. 7 définit le tenseur de rang trois e_{ijk} :

$$\mathrm{D}_i = \varepsilon_{ij}\mathrm{E}_j + e_{ijk}\mathrm{S}_{jk}. \tag{6. 9}$$

Les constantes piézoélectriques e_{ijk} relient la variation d'induction D_i, à champ électrique constant, aux déformations S_{jk} subies par le corps :

$$e_{ijk} = \left(\frac{\partial \mathrm{D}_i}{\partial \mathrm{S}_{jk}}\right)_{\mathrm{E}}. \tag{6. 10}$$

Comme $\mathrm{S}_{jk} = \mathrm{S}_{kj}$ le tenseur e_{ijk} est symétrique par rapport à ses deux derniers indices j et k :

$$e_{ijk} = e_{ikj}.$$

Le nombre de constantes piézoélectriques est ainsi réduit de 27 (tenseur de rang trois quelconque) à 18. En effet, le couple des deux derniers indices j et k ne prend que six valeurs distinctes repérées par le nombre α conformément à la convention 4. 22 adoptée au paragraphe 4. 3 :

$$e_{i\alpha} = e_{ijk} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \alpha = (j, k) = 1, 2, ..., 6.$$

Les modules piézoélectriques se rangent donc dans un tableau à trois lignes ($i = 1, 2, 3$) et six colonnes ($\alpha = 1, ..., 6$) :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{vmatrix}. \tag{6. 11}$$

En étendant la notation matricielle aux déformations, conformément aux relations 4. 25, l'équation 6. 9 devient :

$$\mathrm{D}_i = \varepsilon_{ij}\mathrm{E}_j + e_{i\alpha}\mathrm{S}_\alpha.$$

Le coefficient piézoélectrique inverse, reliant la contrainte T_{jk} et le champ électrique E_i dans l'équation 6. 8 généralisée, se déduit de la constante e_{ijk} par des considérations thermodynamiques. Les forces extérieures agissant sur un corps piézoélectrique sont à la fois d'origine mécanique et d'origine électrique. Le travail qu'il faut fournir pour modifier l'état du cristal comprend donc, en plus du terme mécanique calculé au paragraphe 4. 4

$$\delta\mathscr{W}_{\mathrm{M}} = \mathrm{T}_{jk}\,\mathrm{dS}_{jk}$$

un terme électrique égal à

$$\delta\mathscr{W}_{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_i\,\mathrm{dD}_i.$$

Pour une transformation réversible et par unité de volume, la variation d'énergie interne est :

$$\mathrm{d}\mathscr{U} = \theta\,\mathrm{d}\sigma + \mathrm{T}_{jk}\,\mathrm{dS}_{jk} + \mathrm{E}_i\,\mathrm{dD}_i$$

où θ est la température absolue et σ l'entropie. $\mathscr{U}$ est une fonction de l'entropie, des déformations et de l'induction électrique. Pour faire apparaître les variables σ, S_{jk} et E_i introduisons le potentiel thermodynamique :

$$\mathscr{G} = \mathscr{U} - \mathrm{E}_i\mathrm{D}_i.$$

La variation de cette fonction d'état :

$$\mathrm{d}\mathscr{G} = \theta\,\mathrm{d}\sigma + \mathrm{T}_{jk}\,\mathrm{dS}_{jk} - \mathrm{D}_i\,\mathrm{dE}_i$$

est une différentielle exacte :

$$\mathrm{T}_{jk} = \left(\frac{\partial \mathscr{G}}{\partial \mathrm{S}_{jk}}\right)_{\sigma,\mathrm{E}_i} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_i = -\left(\frac{\partial \mathscr{G}}{\partial \mathrm{E}_i}\right)_{\sigma,\mathrm{S}_{jk}}$$

Comme les dérivées secondes sont indépendantes de l'ordre des dérivations :

$$\left(\frac{\partial \mathrm{T}_{jk}}{\partial \mathrm{E}_i}\right)_{\sigma,\mathrm{S}} = -\left(\frac{\partial \mathrm{D}_i}{\partial \mathrm{S}_{jk}}\right)_{\sigma,\mathrm{E}} = \left(\frac{\partial^2 \mathscr{G}}{\partial \mathrm{E}_i \partial \mathrm{S}_{jk}}\right)_{\sigma}.$$

Cette relation montre que, si à champ électrique constant une déformation crée une induction électrique : $\left(\frac{\partial \mathrm{D}_i}{\partial \mathrm{S}_{jk}}\right)_{\sigma,\mathrm{E}} = e_{ijk}$, l'application d'un champ électrique fait apparaître une contrainte dans le matériau rigidement lié (déformation constante) :

$$\left(\frac{\partial \mathrm{T}_{jk}}{\partial \mathrm{E}_i}\right)_{\sigma,\mathrm{S}} = -\,e_{ijk} \tag{6. 12}$$

les coefficients de proportionnalité des deux effets sont opposés. L'effet piézoélectrique inverse est donc une conséquence thermodynamique de l'effet direct. Dans le domaine linéaire, les coefficients e_{ijk} sont supposés constants et l'intégration de la relation 6. 12 à σ et S constants conduit à :

$$\mathrm{T}_{jk} = -\,e_{ijk}\mathrm{E}_i.$$

Si de plus le corps subit une déformation S_{lm} :

$$\mathrm{T}_{jk} = -\,e_{ijk}\mathrm{E}_i + c^{\mathrm{E}}_{jklm}\mathrm{S}_{lm}. \tag{6. 13}$$

L'indice E indique que le module de rigidité de la loi de Hooke :

$$c^{\mathrm{E}}_{jklm} = \left(\frac{\partial \mathrm{T}_{jk}}{\partial \mathrm{S}_{lm}}\right)_{\sigma,\mathrm{E}} \tag{6. 14}$$

relie les contraintes et les déformations lorsque le champ électrique est maintenu constant. En effet le matériau étant piézoélectrique, les conditions

électriques modifient les valeurs des constantes mécaniques, il convient donc de les préciser. De même le coefficient ε_{ij} qui intervient dans l'expression 6. 9 est la permittivité à déformation constante ε_{ij}^{S}. Les relations 6. 9 et 6. 13 constituent un premier système d'équations d'état, en notation matricielle :

$$\mathrm{T}_\alpha = c_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}\mathrm{S}_\beta - e_{i\alpha}\mathrm{E}_i \qquad i,\ j = 1, 2, 3 \qquad (6.\ 15\ a)$$

$$\mathrm{D}_i = \varepsilon_{ij}^{\mathrm{S}}\mathrm{E}_j + e_{i\alpha}\mathrm{S}_\alpha \qquad \alpha,\ \beta = 1, ..., 6. \qquad (6.\ 15\ b)$$

Elles fournissent la contrainte mécanique et l'induction électrique en fonction des variables indépendantes, champ électrique et déformation.

Avec d'autres couples de variables indépendantes : D et S, D et T ou E et T, les équations d'état du matériau piézoélectrique se mettent sous des formes diverses. La variation du potentiel thermodynamique

$$\mathscr{I} = \mathscr{G} - \mathrm{T}_{jk}\mathrm{S}_{jk} = \mathscr{U} - \mathrm{E}_i\mathrm{D}_i - \mathrm{T}_{jk}\mathrm{S}_{jk}$$

est

$$\mathrm{d}\mathscr{I} = \theta\mathrm{d}\sigma - \mathrm{S}_{jk}\mathrm{dT}_{jk} - \mathrm{D}_i\mathrm{dE}_i.$$

Elle montre que $\mathscr{I}$ est une fonction des variables T_{jk} et E_i : $\mathscr{I}(\sigma, \mathrm{T}_{jk}, \mathrm{E}_i)$ et

$$\mathrm{S}_{jk} = -\left(\frac{\partial\mathscr{I}}{\partial\mathrm{T}_{jk}}\right)_{\sigma,\mathrm{E}} \qquad \mathrm{D}_i = -\left(\frac{\partial\mathscr{I}}{\partial\mathrm{E}_i}\right)_{\sigma,\mathrm{T}}.$$

L'égalité des dérivées secondes

$$\left(\frac{\partial\mathrm{S}_{jk}}{\partial\mathrm{E}_i}\right)_{\sigma,\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial\mathrm{D}_i}{\partial\mathrm{T}_{jk}}\right)_{\sigma,\mathrm{E}} = d_{ijk} \qquad (6.\ 16)$$

associée aux relations de définition des flexibilités à champ électrique constant s_{jklm}^{E} et des permittivités à contraintes constantes $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}}$:

$$s_{jklm}^{\mathrm{E}} = \left(\frac{\partial\mathrm{S}_{jk}}{\partial\mathrm{T}_{lm}}\right)_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial\mathrm{D}_i}{\partial\mathrm{E}_j}\right)_{\mathrm{T}} \qquad (6.\ 17)$$

conduit après intégration à un deuxième système d'équations d'état où les variables indépendantes, sont le champ électrique et les contraintes :

$$\mathrm{S}_{jk} = d_{ijk}\mathrm{E}_i + s_{jklm}^{\mathrm{E}}\mathrm{T}_{lm}$$
$$\mathrm{D}_i = \varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}_j + d_{ijk}\mathrm{T}_{jk}.$$

Pour transposer ces équations en notation matricielle

$$\mathrm{S}_\alpha = s_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}\mathrm{T}_\beta + d_{i\alpha}\mathrm{E}_i \qquad (6.\ 18a)$$

$$\mathrm{D}_i = \varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}_j + d_{i\alpha}\mathrm{T}_\alpha \qquad (6.\ 18b)$$

et satisfaire aux définitions de T_α (4. 24) et de S_α (4. 25) il faut poser :

$$d_{i\alpha} = d_{ijk} \quad \text{si} \quad \alpha \leqslant 3$$
$$d_{i\alpha} = 2d_{ijk} \quad \text{si} \quad \alpha > 3. \qquad (6.\ 19)$$

Les constantes piézoélectriques $e_{i\alpha}$, $d_{i\alpha}$ et mécaniques $c_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}$, $s_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}$ ne sont pas indépendantes. Reportons l'expression

$$\mathrm{S}_\beta = d_{i\beta}\mathrm{E}_i + s_{\beta\gamma}^{\mathrm{E}}\mathrm{T}_\gamma$$

dans l'équation 6. 15a, il vient

$$\mathrm{T}_\alpha = (-\, e_{i\alpha} + c_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}d_{i\beta})\mathrm{E}_i + c_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}s_{\beta\gamma}^{\mathrm{E}}\mathrm{T}_\gamma = \delta_{\alpha\gamma}\mathrm{T}_\gamma$$

quelles que soient les variables indépendantes E_i et T_γ, par conséquent

$$c_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}s_{\beta\gamma}^{\mathrm{E}} = \delta_{\alpha\gamma} \qquad (6.\ 20)$$

et

$$e_{i\alpha} = d_{i\beta}c_{\beta\alpha}^{\mathrm{E}}. \qquad (6.\ 21)$$

La première relation montre que la matrice $s_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}$ est l'inverse de la matrice $c_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}$ (comme dans un matériau non piézoélectrique), la seconde relation permet de calculer les constantes $e_{i\alpha}$ à partir des modules $d_{i\alpha}$ ou inversement, à l'aide de la formule :

$$d_{i\beta} = e_{i\alpha}s_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}. \qquad (6.\ 22)$$

Afin de relier $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}}$ à $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{S}}$ reportons l'expression de la contrainte

$$\mathrm{T}_\alpha = -\, e_{j\alpha}\mathrm{E}_j + c_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}\mathrm{S}_\beta$$

dans l'équation 6. 18b :

$$\mathrm{D}_i = (\varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}} - d_{i\alpha}e_{j\alpha})\mathrm{E}_j + d_{i\alpha}c_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}\mathrm{S}_\beta.$$

En identifiant avec 6. 15b il vient

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}} - \varepsilon_{ij}^{\mathrm{S}} = d_{i\alpha}e_{j\alpha} = d_{i\alpha}c_{\alpha\beta}^{\mathrm{E}}d_{j\beta}. \qquad (6.\ 23)$$

La constante diélectrique $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{S}}$ du solide rigidement lié est très difficile à mesurer; la relation précédente permet de la calculer à partir des modules piézoélectriques et de la constante diélectrique usuelle $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}}$ qui est celle du solide libre de toute contrainte. La différence entre $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{T}}$ et $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{S}}$ est importante

pour les matériaux fortement piézoélectriques. Par exemple dans le cas du niobate de lithium ($LiNbO_3$)

$$\varepsilon^{T}_{11} = 74{,}3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F/m} \qquad \varepsilon^{S}_{11} = 38{,}9 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F/m}.$$

Les systèmes 6. 15 et 6. 18 sont les plus utilisés en pratique. Les deux autres groupes d'équations d'état, où la variable électrique indépendante est l'induction D_i, s'obtiennent en considérant l'énergie interne $\mathscr{U}(\sigma, S_{jk}, D_i)$ et l'enthalpie $\mathscr{H}(\sigma, T_{jk}, D_i) = \mathscr{U} - T_{jk}S_{jk}$. Ainsi, en fonction des variables D et S :

$$\boxed{\begin{aligned} E_i &= \beta^{S}_{ij}D_j - h_{ijk}S_{jk} \\ T_{jk} &= c^{D}_{jklm}S_{lm} - h_{ijk}D_i \end{aligned}} \qquad (6.\ 24)$$

c^{D}_{jklm} est le tenseur des rigidités à induction électrique constante et β^{S}_{ij} l'inverse du tenseur ε^{S}_{ij}. Le coefficient piézoélectrique h_{ijk} défini par

$$h_{ijk} = -\left(\frac{\partial E_i}{\partial S_{jk}}\right)_D = -\left(\frac{\partial T_{jk}}{\partial D_i}\right)_S = -\left(\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial D_i \partial S_{jk}}\right)_\sigma \qquad (6.\ 25)$$

s'écrit en notation matricielle $h_{ijk} = h_{i\alpha}$. Le module piézoélectrique g_{ijk} du dernier système d'équations :

$$\boxed{\begin{aligned} E_i &= \beta^{T}_{ij}D_j - g_{ijk}T_{jk} \\ S_{jk} &= s^{D}_{jklm}S_{lm} + g_{ijk}D_i \end{aligned}} \qquad (6.\ 26)$$

est l'opposé de la dérivée seconde de l'enthalpie $\mathscr{H}$ par rapport aux variables indépendantes D_i et T_{jk} :

$$g_{ijk} = -\left(\frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial D_i \partial T_{jk}}\right)_\sigma . \qquad (6.\ 27)$$

En notation matricielle $g_{i\alpha} = g_{ijk}$ si $\alpha = 1, 2, 3$ et $g_{i\alpha} = 2g_{ijk}$ si $\alpha > 3$.

6. 1. 4. — Restrictions imposées par la symétrie des cristaux au nombre de constantes piézoélectriques indépendantes

La condition d'invariance des composantes du tenseur piézoélectrique dans l'opération de symétrie correspondant à la matrice de changement de base α est, d'après la relation 3. 11 :

$$e_{ijk} = \alpha^{l}_{i}\alpha^{m}_{j}\alpha^{n}_{k}e_{lmn} \qquad (6.\ 28)$$

Examinons successivement l'effet des opérations de symétrie ponctuelle des cristaux.

e_{15}

a) Centre de symétrie. — Comme $\alpha^{k}_{l} = -\delta^{k}_{l}$, la relation 6. 28 devient

$$e_{ijk} = (-1)^3 e_{ijk} \Rightarrow e_{ijk} = 0 \qquad \forall i, j, k.$$

Le tenseur piézoélectrique est nul dans les onze classes centrosymétriques :

$\bar{1}$, $2/m$, mmm, $\bar{3}$, $\bar{3}m$, $4/m$, $4/mmm$, $6/m$, $6/mmm$, $m3$, $m3m$.

Nous retrouvons le résultat obtenu à partir des principes de symétrie de Curie (paragr. 6. 1. 1).

b) Plan de symétrie. — La matrice de changement d'axes est encore diagonale; Ox_3 étant perpendiculaire au miroir :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La condition 6. 28 :

$$e_{ijk} = \alpha^{i}_{i}\alpha^{j}_{j}\alpha^{k}_{k}e_{ijk} \qquad (6.\ 29)$$

implique la nullité des constantes à un et trois indices 3, ce qui réduit à dix le nombre de modules $e_{i\alpha}$ pour la *classe m :*

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & e_{34} & e_{35} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix}\text{classe } m \\ (M \perp x_3).\end{matrix} \qquad (6.\ 30)$$

c) Axe binaire direct. — La matrice de rotation d'angle π autour de Ox_3 est

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'équation 6. 29 entraîne la nullité des composantes à nombre pair d'indices 3, si bien que le tableau $e_{i\alpha}$ de la *classe 2* est complémentaire de celui de la classe *m* :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & e_{25} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & e_{36} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix}\text{classe } 2 \\ (A_2 /\!/ x_3).\end{matrix} \qquad (6.\ 31)$$

d) Plusieurs axes binaires. — Les coefficients e_{ijk} non nuls des cristaux appartenant à la *classe 222* possèdent un nombre impair de chaque indice, c'est le cas seulement pour e_{123}, e_{213}, e_{312} :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{36} \end{vmatrix} \quad \text{classe } 222. \qquad (6.\ 32)$$

Pour la *classe 2mm* les miroirs perpendiculaires à Ox_1 et Ox_2 annulent les coefficients $e_{14} = e_{123}$, $e_{25} = e_{213}$ et $e_{36} = e_{312}$ du tableau 6. 31 ayant un nombre impair d'indices 1 et 2 :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{classe } 2mm. \qquad (6.\ 33)$$

Les *classes 23 et* $\bar{4}3m$ du système cubique possèdent trois axes binaires portés par le repère $Ox_1x_2x_3$. Comme la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe ternaire dirigé suivant [111] permute x_1, x_2 et x_3, les trois constantes e_{123}, e_{312} et e_{231} de la classe 222 sont égales :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} \end{vmatrix} \quad \text{classes 23 et } \bar{4}3m. \qquad (6.\ 34)$$

e) Axe direct d'ordre *n* supérieur a deux. — Pour déterminer la forme des matrices piézoélectriques des cristaux présentant un axe principal direct d'ordre 3, 4, 6, appliquons la méthode utilisée au paragraphe 4. 5. 2 dans le cas du tenseur des rigidités. Avec les mêmes notations, la condition d'invariance des nouveaux modules η_{ijk} s'écrit dans la base des vecteurs propres $\vec{\xi}^{(1)}\ \vec{\xi}^{(2)}\ \vec{\xi}^{(3)}$ de la matrice de rotation 4. 46 :

$$\eta_{ijk} = \lambda^{(i)}\lambda^{(j)}\lambda^{(k)}\eta_{ijk}$$

Étant donné les valeurs propres

$$\lambda^{(1)} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \qquad \lambda^{(2)} = e^{-i\frac{2\pi}{n}} \qquad \lambda^{(3)} = 1$$

la composante η_{ijk} n'est pas nulle lorsque la différence entre le nombre ν_1 d'indices 1 et le nombre ν_2 d'indices 2 est un multiple de l'ordre *n* car le produit $\lambda^{(i)}\lambda^{(j)}\lambda^{(k)} = e^{i(\nu_1 - \nu_2)\frac{2\pi}{n}}$ est alors égal à 1. C'est toujours le cas des modules η_{123}, η_{213}, η_{312}, η_{333} pour lesquels $\nu_1 = \nu_2$. Il n'y en a pas d'autres lorsque $n = 4$ ou 6, par contre pour $n = 3$ les composantes η_{111} et η_{222} telles que $\nu_1 - \nu_2 = \pm 3$ ne sont pas nulles.

Le retour aux constantes e_{ijk} s'effectue à l'aide de la relation

$$e_{ijk} = a_i^l a_j^m a_k^n \eta_{lmn} \qquad (6.\ 35)$$

où (*a*) est la matrice 4. 51 de passage du système $Ox_1x_2x_3$ (constantes e_{ijk}) à la base propre $\vec{\xi}^{(1)}\ \vec{\xi}^{(2)}\ \vec{\xi}^{(3)}$:

$$a = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commençons par les *classes 4 et 6* dont les tenseurs e_{ijk} sont identiques car les coefficients η_{ijk} non nuls sont les mêmes dans les deux cas. Un axe A_4 ou A_6 contenant un axe binaire, seules sont à considérer les composantes non nulles du tableau 6. 31 de la classe 2. Les constantes à un seul indice 3, du type e_{3jk} avec $j, k \neq 3$, s'expriment en fonction de $\eta_{312} = \eta_{321}$:

$$e_{3jk} = (a_j^1 a_k^2 + a_j^2 a_k^1)\eta_{312} \qquad (6.\ 36)$$

en particulier

$$e_{3jj} = 2a_j^1 a_j^2 \eta_{312} = i\eta_{312} \qquad \forall j \neq 3 \quad \Rightarrow \quad e_{31} = e_{32}.$$

et

$$e_{312} = (a_1^1 a_2^2 + a_1^2 a_2^1)\eta_{312} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{36} = 0.$$

Le développement des constantes à un seul indice 3 du type e_{ij3} avec $i, j \neq 3$

$$e_{ij3} = a_i^1 a_j^2 \eta_{123} + a_i^2 a_j^1 \eta_{213}$$

conduit à

$$e_{jj3} = a_j^1 a_j^2 (\eta_{123} + \eta_{213}) = \frac{i}{2}(\eta_{123} + \eta_{213}) \qquad \forall j \neq 3$$

soit

$$e_{15} = e_{24}.$$

Les expressions de e_{123} et e_{213} déduites de 6. 35

$$e_{123} = \frac{1}{2}(\eta_{123} - \eta_{213})$$

$$e_{213} = \frac{1}{2}(-\eta_{123} + \eta_{213})$$

montrent que ces deux modules sont opposés : $e_{14} = -e_{25}$; $e_{333} = \eta_{333}$ étant différent de zéro la matrice $e_{i\alpha}$ à l'allure suivante :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & -e_{14} & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{classes 4 et 6.} \qquad (6.\ 37)$$

Pour les *classes 422 et 622*, qui possèdent trois axes binaires perpendiculaires (fig. 2. 28) il suffit de combiner les tableaux 6. 32 et 6. 37

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{classes 422 et 622.} \qquad (6.\ 38)$$

De même, compte tenu du tableau 6. 33 de la classe 2*mm*, il vient pour les cristaux de *symétrie 4mm et 6mm :*

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{classes } 4mm \text{ et } 6mm. \qquad (6.\ 39)$$

Le but de l'exercice 6. 3 est de montrer que le tenseur piézoélectrique des classes *4mm* et *6mm* est invariant dans toute rotation autour de l'axe Ox_3. En se souvenant de la remarque analogue faite au sujet des rigidités d'un cristal du système hexagonal (cf. paragr. 4. 5. 2 et exercice 4. 4), il apparaît que les propriétés élasto-électriques des cristaux de symétrie *6mm* sont invariantes dans toute rotation autour de l'axe sénaire. Comme cette *isotropie transversale* se rencontre aussi perpendiculairement à la direction de polarisation des *céramiques piézoélectriques*, il convient de représenter les propriétés élastiques, électriques et piézoélectriques de ces matériaux par les tenseurs de la classe *6mm*.

La *classe 432* du système cubique qui comprend tous les éléments de symétrie de la classe 422 a donc au plus un coefficient piézoélectrique : $e_{14} = -e_{25}$. Mais l'axe ternaire dirigé suivant [111] réalise la permutation des indices 1, 2, 3 si bien que $e_{123} = e_{231}$ et

$$e_{14} = e_{25} = -e_{25} = 0.$$

Toutes les composantes $e_{i\alpha}$ sont nulles. *La piézoélectricité n'existe pas dans les cristaux de symétrie 432 malgré l'absence de centre de symétrie :*

$$e_{i\alpha} = 0 \qquad \text{classe } 432.$$

Les relations établies précédemment entre les modules à un et à trois indices 3 des classes 4 et 6, sont valables pour les cristaux possédant un *axe ternaire*. Par contre les modules sans indice 3 ne sont plus nuls; ils s'expriment en fonction de η_{111} et η_{222} :

$$e_{ijk} = a_i^1 a_j^1 a_k^1 \eta_{111} + a_i^2 a_j^2 a_k^2 \eta_{222}. \qquad (6.\ 40)$$

En particulier

$$e_{i11} = \frac{1}{2}(a_i^1 \eta_{111} - a_i^2 \eta_{222})$$

et

$$e_{i22} = \frac{1}{2}(-a_i^1 \eta_{111} + a_i^2 \eta_{222}) = -e_{i11}$$

il vient donc en donnant à i les valeurs 1 et 2 :

$$e_{12} = -e_{11} \qquad \text{et} \qquad e_{22} = -e_{21}.$$

De la même manière, le développement 6. 40 conduit à

$$e_{112} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(i\eta_{111} - \eta_{222}) = -e_{222}$$

et

$$e_{212} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\eta_{111} + i\eta_{222}) = -e_{111}$$

d'où le tableau ci-dessous :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} e_{11} & -e_{11} & 0 & e_{14} & \overset{e_{15}}{e_{24}} & -e_{22} \\ -e_{22} & e_{22} & 0 & e_{15} & -e_{14} & -e_{11} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{classe } 3. \qquad (6.\ 41)$$

Un axe binaire parallèle à Ox_1 annule tous les modules à nombre pair d'indices 1 (paragr. 6. 1. 4 *c*) du tableau ci-dessus :

$$e_{15} = e_{24} \qquad e_{16} = -e_{22} \qquad e_{21} = -e_{22} \qquad e_{31} = e_{32} \qquad e_{33}.$$

Les cristaux de *symétrie 32* ne possèdent que deux constantes piézoélectriques indépendantes : e_{11} et e_{14} :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} e_{11} & -e_{11} & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{14} & -e_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{classe } 32. \qquad (6.\ 42)$$

Un miroir perpendiculaire à l'axe Ox_1 annulant les constantes à un et trois indices 1 du tableau 6. 41 : e_{14} et e_{11} la matrice $e_{i\alpha}$ des cristaux appartenant à la *classe 3m* se réduit à :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & -e_{22} \\ -e_{22} & e_{22} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{classe } 3m. \qquad (6.\ 43)$$

f) Axe principal inverse. — Comme un axe d'ordre six inverse est équivalent à $3/m$ (paragr. 2. 3. 1. 3 *c*) la matrice $e_{i\alpha}$ des cristaux de la *classe* $\bar{6}$ résulte immédiatement de 6. 30 et 6. 41 :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} e_{11} & -e_{11} & 0 & 0 & 0 & -e_{22} \\ -e_{22} & e_{22} & 0 & 0 & 0 & -e_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{classe } \bar{6} \qquad (6.\ 44)$$

L'axe binaire, parallèle à Ox_1, des cristaux de *symétrie* $\bar{6}m2$ supprime du tableau ci-dessus le coefficient e_{22} sans indice 1 (paragr. 6. 1. 4. *c*)

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} e_{11} & -e_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{classe } \bar{6}m2. \qquad (6.\ 45)$$

Utilisons la méthode générale, pour traiter le cas de l'axe d'ordre quatre inverse. La matrice de rotation-inversion $\bar{\alpha}$ est égale à $-\alpha$ et les vecteurs $\vec{\xi}^{(i)}$ sont aussi vecteurs propres de $\bar{\alpha}$ avec pour valeur propre $\bar{\lambda}^{(i)} = -\lambda^{(i)}$.

La condition d'existence des modules η_{ijk} :

$$\overline{\lambda}^{(i)}\overline{\lambda}^{(j)}\overline{\lambda}^{(k)} = 1$$

équivalente à

$$\lambda^{(i)}\lambda^{(j)}\lambda^{(k)} = e^{i(\nu_1 - \nu_2)\frac{2\pi}{n}} = -1$$

est satisfaite lorsque $n = 4$ par les modules η_{113}, η_{223}, η_{311}, η_{322} tels que $\nu_1 - \nu_2 = \pm 2$. Un axe $\overline{A}_4$ contenant un axe binaire, il suffit d'examiner les constantes e_{ijk} du tableau 6. 31. La relation 6. 35 appliquée à e_{ii3} :

$$e_{ii3} = a_i^1 a_i^1 \eta_{113} + a_i^2 a_i^2 \eta_{223}$$

montre que $e_{24} = -e_{15}$. De même le développement

$$e_{3ii} = a_i^1 a_i^1 \eta_{311} + a_i^2 a_i^2 \eta_{322}$$

conduit à $e_{32} = -e_{31}$. L'égalité des constantes e_{25} et e_{14} résulte de l'expression

$$e_{ij3} = a_i^1 a_j^1 \eta_{113} + a_i^2 a_j^2 \eta_{223} = e_{ji3}.$$

Comme e_{33} est nul ($\eta_{333} = 0$) la matrice $e_{i\alpha}$ s'écrit :

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{15} & e_{14} & 0 \\ e_{31} & -e_{31} & 0 & 0 & 0 & e_{36} \end{vmatrix} \quad \text{classe } \overline{4}. \qquad (6.46)$$

Pour la *classe* $\overline{4}2m$, l'axe binaire parallèle à Ox_1 annule les constantes e_{15} et e_{31} à nombre pair d'indices 1

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{36} \end{vmatrix} \quad \text{classe } \overline{4}2m. \qquad (6.47)$$

Ces résultats s'appliquent à tout tenseur de rang trois A_{ijk} symétrique en j et k et donc aux composantes e_{ijk}, d_{ijk}, h_{ijk}, g_{ijk}. Ceci est encore vrai pour les constantes à deux indices $e_{i\alpha} = e_{ijk}$ et $h_{i\alpha} = h_{ijk}$. Par contre, pour trouver les relations entre les modules $d_{i\alpha}$ (ou $g_{i\alpha}$) il faut tenir compte de la formule 6. 19. Par exemple, dans les cristaux de la classe 32 : $e_{26} = -e_{11}$ mais $d_{26} = -2d_{11}$. Le tableau de la figure 6. 4 rassemble les résultats de la réduction du nombre de composantes des tenseurs traduisant les propriétés élastiques, électriques et piézoélectriques des cristaux appartenant aux différentes classes de symétrie ponctuelle.

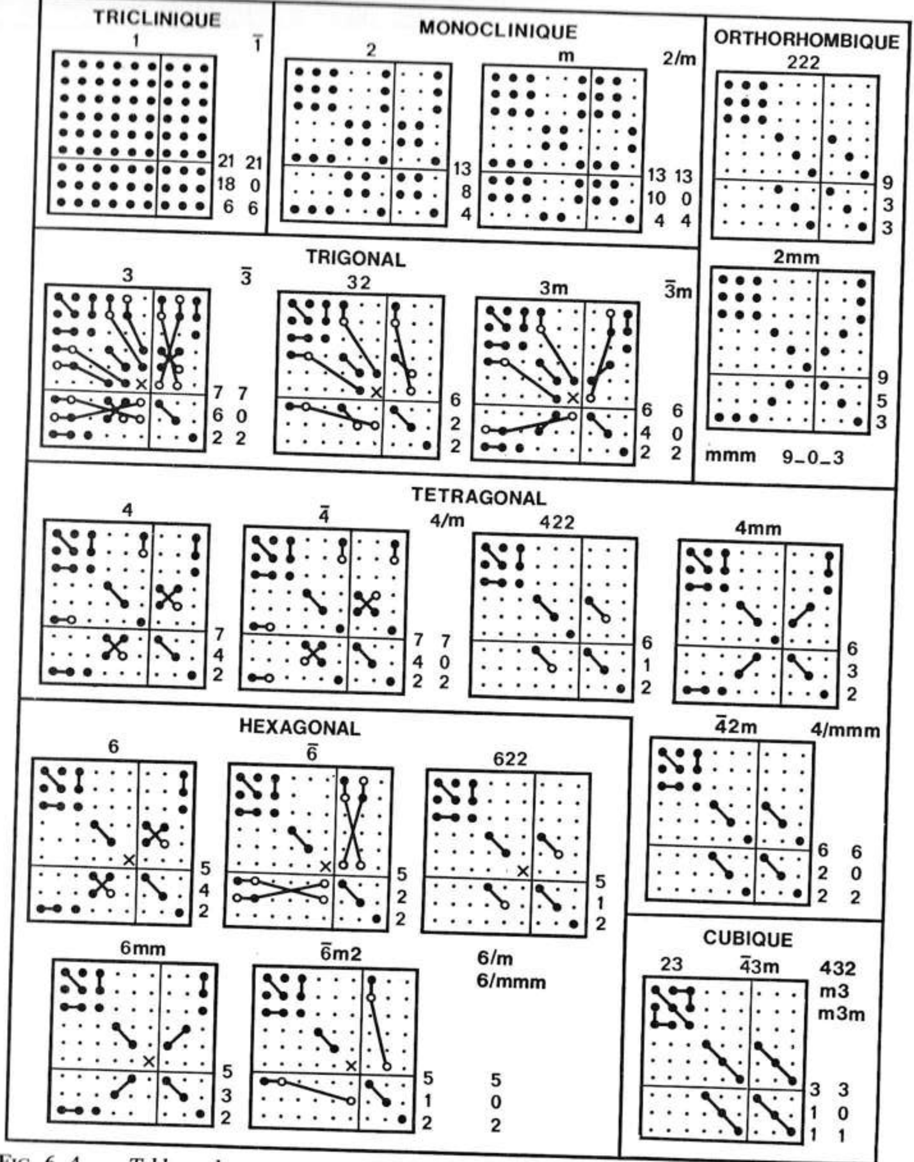


FIG. 6. 4. — *Tableau des matrices de constantes élastiques, piézoélectriques, diélectriques dans le système des axes cristallographiques* (fig. 2. 28).

● ○ composante non nulle
· composante nulle
●—● composantes égales
●—○ composantes opposées
× composante égale à $(c_{11} - c_{12})/2$

La disposition des matrices est indiquée page 221. La symétrie par rapport à la diagonale principale n'est pas mentionnée. Les nombres de constantes élastiques, piézoélectriques, diélectriques indépendantes sont indiqués successivement à droite de chaque matrice. Les matrices $c_{\alpha\beta}$ et ε_{ij} des classes dénuées de piézoélectricité ne sont pas représentées car elles sont identiques à celles les classes qui les précèdent.

Le tableau 6. 5 donne les constantes piézoélectriques $e_{i\alpha}$ et diélectriques ε_{ij}^{S} de quelques cristaux importants en pratique.

TABLEAU 6. 5. — *Constantes piézoélectriques et diélectriques*

MATÉRIAUX	CLASSE	CONSTANTES PIÉZOÉLECTRIQUES (C/m^2)						PERMITTIVITÉS ($10^{-11}F/m$)			RÉF.
Système cubique		e_{14}						ε^S			
Arséniure de gallium (AsGa)	$\bar{4}3m$	– 0,16						9,73			[3]
Oxyde de bismuth et de germanium ($Bi_{12}GeO_{20}$)	23	0,99						34,2			[4] chap. 4
Système hexagonal		e_{15}	e_{31}	e_{33}				ε_{11}^S	ε_{33}^S		
Céramique PZT-4 .	trans. isotrope	12,7	– 5,2	15,1				650	560		[25] chap. 4
Oxyde de zinc (ZnO)	*6mm*	– 0,59	– 0,61	1,14				7,38	7,83		—
Sulfure de cadmium (CdS)	*6mm*	– 0,21	– 0,24	0,44				7,99	8,44		—
Système tétragonal		e_{14}	e_{15}	e_{31}	e_{33}			ε_{11}^S	ε_{33}^S		
Parattellurite (TeO_2)	422	0,22	0	0	0			20	22		[16] chap. 4
Titanate de baryum ($BaTiO_3$)	*4mm*	0	21,3	– 2,65	3,64			1 744	97		[18] chap. 4
Système trigonal		e_{11}	e_{14}	e_{15}	e_{22}	e_{31}	e_{33}	ε_{11}^S	ε_{33}^S		
Niobate de lithium ($LiNbO_3$)	*3m*	0	0	3,7	2,5	0,2	1,3	38,9	25,7		[20] chap. 4
Tantalate de lithium ($LiTaO_3$)	*3m*	0	0	2,6	1,6	$\simeq 0$	1,9	36,3	38,1		—
Quartz (SiO_2)	32	0,171	-0,0406	0	0	0	0	3,92	4,10		[21] chap. 4
Système orthorhombique		e_{15}	e_{24}	e_{31}	e_{32}	e_{33}		ε_{11}^S	ε_{22}^S	ε_{33}^S	
Niobate de baryum et de sodium ($Ba_2NaNb_5O_{15}$) ...	*2mm*	2,8	3,4	– 0,4	– 0,3	4,3		196	201	28	[24] chap. 4

Modèle indiquant la disposition des éléments du tableau 6. 4 :

c_{11} c_{12}	e_{11} e_{21} e_{31}
c_{12} c_{22} .	e_{12}
. .	.
. . . $c_{\alpha\beta}^{E}$	. $e_{i\alpha}$
. $(c_{\alpha\beta}^{D})$	. $(h_{i\alpha})$
.	.
e_{11} e_{12}	ε_{11}^S . .
e_{21} $e_{i\alpha}$	. ε_{ij}^S
e_{31} $(h_{i\alpha})$	. (β_{ij}^S)

6. 2. — ONDES ÉLASTIQUES DANS UN SOLIDE PIÉZOÉLECTRIQUE

Dans un matériau piézoélectrique l'interdépendance entre grandeurs électriques et mécaniques, qui s'exprime en statique par les équations d'état telles que 6. 15, implique un couplage entre ondes élastiques et ondes électromagnétiques. En effet, la relation 6. 13 introduit, dans l'équation de la dynamique, des termes contenant le champ électrique et la relation 6. 9 introduit, dans les équations de Maxwell, des termes contenant la déformation mécanique. Le problème de la propagation ne peut en principe être traité complètement qu'en résolvant à la fois l'équation de Newton et les équations de Maxwell : les solutions sont des ondes mixtes élasto-électromagnétiques, c'est-à-dire des ondes élastiques de vitesse V accompagnées d'un champ électrique et des ondes électromagnétiques (vitesse $v \simeq 10^5$ V) accompagnées d'une déformation mécanique. Pour le premier type d'ondes, le champ magnétique créé par le champ électrique se déplaçant à la vitesse V, très petite devant la vitesse v des ondes électromagnétiques, est négligeable. D'après l'équation de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \simeq 0$$

le champ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire Φ comme en électrostatique :

$$\vec{E} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi.$$

L'énergie électromagnétique est négligeable devant l'énergie élastique. Pour le second type d'ondes, c'est l'énergie élastique qui est très petite devant l'énergie électromagnétique.

Ainsi, même dans un matériau fortement piézoélectrique, l'interaction entre les trois ondes élastiques et les deux ondes électromagnétiques est faible puisque leurs vitesses respectives sont très différentes ($v/V \simeq 10^4$ à 10^5). En conséquence leur propagation se traite de manière indépendante. Nous étudions ici la propagation des ondes élastiques en admettant que le champ électrique est statique vis-à-vis des phénomènes de propagation électromagnétiques : *approximation quasi statique*. L'analyse se rapporte d'abord aux ondes de volume (milieu illimité) puis aux ondes de surface (milieu semi-infini).

6. 2. 1. — Milieu illimité : ondes de volume

Après avoir établi pour des ondes planes une équation aux valeurs propres semblable à celle de Christoffel du paragraphe 5. 1. 1, nous illustrons, à l'aide de courbes des lenteurs, l'effet du couplage électromécanique dans quelques matériaux piézoélectriques.

6. 2. 1. 1. Équations de propagation. Tenseur de Christoffel. — L'expression 6. 13 de la contrainte

$$T_{ij} = c^{E}_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k$$

devient en remplaçant la déformation $S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$ et le champ électrique quasi statique $E_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$:

$$T_{ij} = c^{E}_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}.$$

L'équation fondamentale de la dynamique 5. 1

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

s'écrit

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c^{E}_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}} \qquad (6.\ 48)$$

Par ailleurs l'induction électrique

$$D_j = e_{jkl} S_{kl} + \varepsilon^{S}_{jk} E_k = e_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \varepsilon^{S}_{jk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \qquad (6.\ 49)$$

doit satisfaire à l'équation de Poisson : $\frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0$ pour un corps isolant :

$$\boxed{e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \varepsilon^{S}_{jk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = 0} \qquad (6.\ 50)$$

L'équation de propagation du déplacement u_l s'obtient en éliminant le potentiel électrique Φ entre les équations 6. 48 et 6. 50. Dans le cas d'une *onde plane* se propageant dans la direction n_j, u_i et Φ sont de la forme :

$$u_i = {}^{\circ}u_i F\left(t - \frac{n_j x_j}{V}\right) \qquad \Phi = \Phi_0 F\left(t - \frac{n_j x_j}{V}\right) \qquad (6.\ 51)$$

et *le champ électrique est longitudinal :*

$$E_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{n_j}{V} \Phi_0 F'$$

où F' est la dérivée de la fonction F. Le remplacement dans les équations 6. 48 et 6. 50 de

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = {}^{\circ}u_i F'', \qquad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{n_j n_k}{V^2} {}^{\circ}u_l F'', \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{n_j n_k}{V^2} \Phi_0 F''$$

conduit en posant

$$\boxed{\Gamma_{il} = c^{E}_{ijkl} n_j n_k, \qquad \gamma_i = e_{kij} n_j n_k, \qquad \varepsilon = \varepsilon^{S}_{jk} n_j n_k} \qquad (6.\ 52)$$

au système d'équations

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho V^2 \, {}^{\circ}u_i = \Gamma_{il} \, {}^{\circ}u_l + \gamma_i \Phi_0 \\ &\gamma_l \, {}^{\circ}u_l - \varepsilon \Phi_0 = 0 \end{aligned}} \qquad (6.\ 53)$$

En éliminant le potentiel électrique Φ_0, il vient :

$$\rho V^2 \, {}^{\circ}u_i = \left(\Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon}\right) {}^{\circ}u_l. \qquad (6.\ 54)$$

Les polarisations ${}^{\circ}u_i$ des ondes élastiques planes s'obtiennent, comme dans les solides non piézoélectriques, en cherchant les vecteurs propres d'un tenseur de rang deux :

$$\overline{\Gamma}_{il} = \Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon} \qquad (6.\ 55)$$

les valeurs propres $\overline{\gamma} = \rho V^2$ donnant les vitesses de phase dans la direction choisie. Les polarisations des trois ondes planes sont toujours orthogonales entre elles car le tenseur $\overline{\Gamma}_{il}$ est symétrique. Afin de mettre en évidence la dépendance, en fonction de la direction de propagation, du terme supplémentaire d'origine piézoélectrique, il est utile de compléter le développement 5. 8 par celui des composantes γ_l :

$$\gamma_l = e_{11l} n_1^2 + e_{22l} n_2^2 + e_{33l} n_3^2 + (e_{12l} + e_{21l}) n_1 n_2 + (e_{13l} + e_{31l}) n_1 n_3 + (e_{23l} + e_{32l}) n_2 n_3$$

soit pour chaque valeur de l'indice i :

$$\gamma_1 = e_{11}n_1^2 + e_{26}n_2^2 + e_{35}n_3^2 + (e_{16} + e_{21})n_1n_2 + (e_{15} + e_{31})n_1n_3 + (e_{25} + e_{36})n_2n_3$$

$$\gamma_2 = e_{16}n_1^2 + e_{22}n_2^2 + e_{34}n_3^2 + (e_{12} + e_{26})n_1n_2 + (e_{14} + e_{36})n_1n_3 + (e_{24} + e_{32})n_2n_3$$

$$\gamma_3 = e_{15}n_1^2 + e_{24}n_2^2 + e_{33}n_3^2 + (e_{14} + e_{25})n_1n_2 + (e_{13} + e_{35})n_1n_3 + (e_{23} + e_{34})n_2n_3. \quad (6.\ 56)$$

L'influence de la piézoélectricité sur la vitesse de propagation peut être attribuée à une modification des rigidités du matériau. En effet le tenseur de Christoffel s'écrit, comme pour un matériau non piézoélectrique :

$$\bar{\Gamma}_{il} = \bar{c}_{ijkl}n_jn_k$$

en posant

$$\bar{c}_{ijkl} = c^{E}_{ijkl} + \frac{(e_{pij}n_p)(e_{qkl}n_q)}{\varepsilon^{S}_{jk}n_jn_k}. \quad (6.\ 57)$$

Les quantités $\bar{c}_{ijkl}$, appelées constantes « durcies », ne sont pas de vraies constantes élastiques car elles ne sont définies que pour les ondes élastiques planes et elles dépendent de la direction de propagation. Aussi il est préférable d'utiliser l'expression 6. 55 et les développements 6. 56 pour traiter les exemples qui suivent.

6. 2. 1. 2. — Exemples de courbes des lenteurs de cristaux piézoélectriques.

a) PROPAGATION DANS LE PLAN (001) D'UN CRISTAL CUBIQUE PIÉZOÉLECTRIQUE ($Bi_{12}GeO_{20}$). — Le tableau 6. 34 des modules $e_{i\alpha}$ est le même dans les deux classes $\bar{4}3m$ et 23 du système cubique dont la symétrie est compatible avec la piézoélectricité. Comme les seules constantes $e_{i\alpha}$ non nulles sont

$$e_{14} = e_{25} = e_{36}$$

les développements 6. 56 se réduisent à

$$\gamma_1 = 2e_{14}n_2n_3 \qquad \gamma_2 = 2e_{14}n_1n_3 \qquad \gamma_3 = 2e_{14}n_1n_2.$$

Dans le plan (001) où $n_1 = \cos\varphi$, $n_2 = \sin\varphi$, $n_3 = 0$:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_3 = e_{14}\sin 2\varphi$$

les composantes $\bar{\Gamma}_{13}$ et $\bar{\Gamma}_{23}$ sont nulles comme dans l'exemple du paragraphe 5. 1. 6. 2 *a* concernant un cristal cubique non piézoélectrique. De plus

$$\bar{\Gamma}_{11} = \Gamma_{11}, \qquad \bar{\Gamma}_{22} = \Gamma_{22}, \qquad \bar{\Gamma}_{12} = \Gamma_{12}$$

et seul $\bar{\Gamma}_{33}$ est modifié :

$$\bar{\Gamma}_{33} = \Gamma_{33} + \frac{\gamma_3^2}{\varepsilon^{S}_{11}} = c^{E}_{44} + \frac{e_{14}^2}{\varepsilon^{S}_{11}}\sin^2 2\varphi.$$

L'expression 5. 33 des vitesses V_1 et V_2 des ondes quasi longitudinale et quasi transversale polarisées dans le plan (001), qui ne fait intervenir que les composantes $\bar{\Gamma}_{11}$, $\bar{\Gamma}_{22}$, $\bar{\Gamma}_{12}$, est inchangée si bien que V_1 et V_2 sont toujours données par les formules 5. 34 et 5. 35 en prenant les rigidités c^{E}_{ijkl} à champ électrique constant. Ces modes ne sont pas affectés par la piézoélectricité car les déformations qui les accompagnent S_{11}, S_{22}, S_{12} n'engendrent aucun champ électrique longitudinal (il faudrait pour cela des modules e_{ijk} sans indice 3). Ces ondes ne sont couplées à aucun champ électrique. Par contre la vitesse V_3 de l'onde transversale de polarisation [001] est modifiée, elle dépend maintenant de la direction de propagation :

$$V_3 = \sqrt{\frac{\bar{\Gamma}_{33}}{\rho}} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}\left(1 + \frac{e_{14}^2}{\varepsilon^{S}_{11}c^{E}_{44}}\sin^2 2\varphi\right)^{1/2}.$$

L'importance de ce changement est directement liée à la valeur du *coefficient de couplage électromécanique* défini par

$$K = \frac{e_{14}}{\sqrt{\varepsilon^{S}_{11}c^{E}_{44} + e_{14}^2}} \quad \Rightarrow \quad V_3 = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}\cdot\sqrt{1 + \frac{K^2\sin^2 2\varphi}{1 - K^2}}.$$

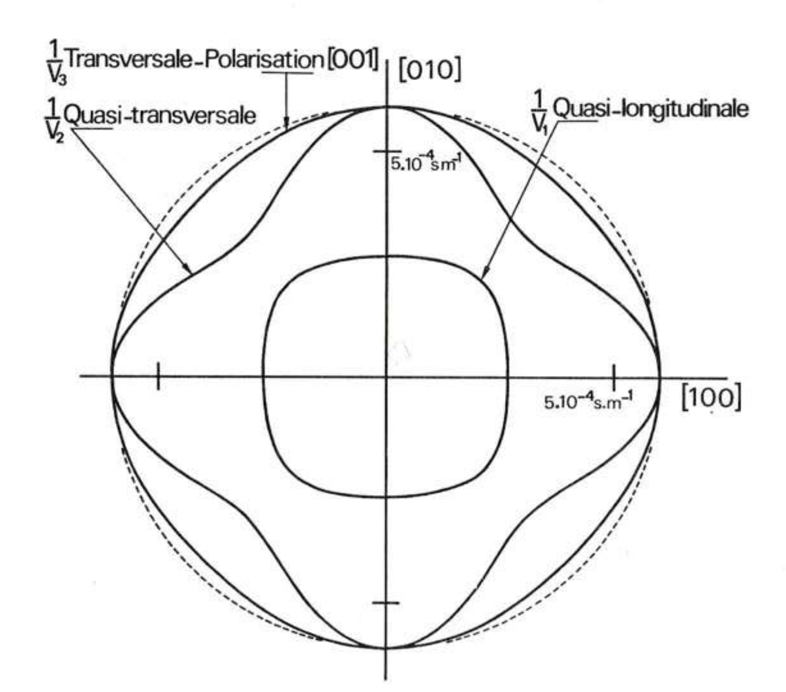


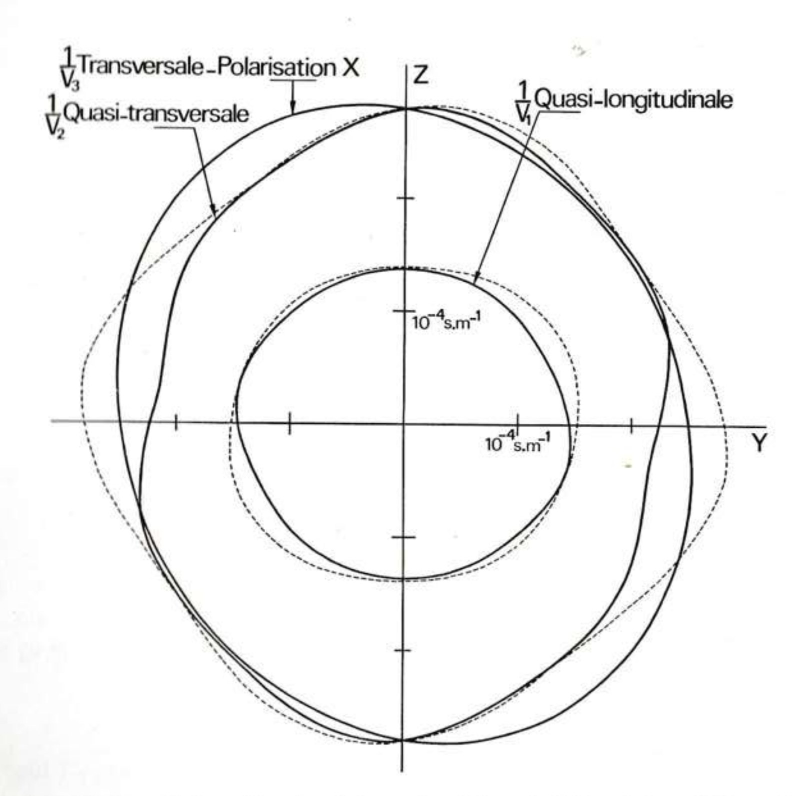
FIG. 6. 6. — *Section de la surface des lenteurs de l'oxyde de bismuth et de germanium (classe 23) par le plan (001).* Seule l'onde transversale est piézoélectriquement active comme l'indique l'écart avec le cercle en pointillé obtenu en négligeant la piézoélectricité.

Dans le cas de l'oxyde de bismuth et de germanium (formule $Bi_{12}GeO_{20}$, asse 23, constantes des tableaux 4. 7 et 6. 5) dont les courbes des lenteurs ont représentées sur la figure 6. 6, K = 0,32 et la variation relative maximale V_3 (direction [110]) est égale à

$$\frac{\Delta V_3}{V_3} \simeq \frac{K^2}{2} \simeq 5\ \%.$$

b) Propagation dans le plan YZ du niobate de lithium. — Le obate de lithium est un cristal ferroélectrique (paragr. 2. 5. 2 *d*) apparnant à la classe 3*m* du système trigonal. Le tenseur piézoélectrique 6. 43 les formules 6. 56 conduisent, pour une direction de propagation contenue ans le plan de symétrie YZ ($n_1 = 0$, $n_2 = \sin\theta$, $n_3 = \cos\theta$), à

$$\gamma_1 = 0$$
$$\gamma_2 = e_{22}\sin^2\theta + (e_{15} + e_{31})\sin\theta\cos\theta$$
$$\gamma_3 = e_{15}\sin^2\theta + e_{33}\cos^2\theta$$
$$\varepsilon = \varepsilon_{11}\sin^2\theta + \varepsilon_{33}\cos^2\theta$$



. 6. 7. — *Section de la surface des lenteurs du niobate de lithium* (*classe 3m*) *par le plan* Z. Les courbes en trait discontinu ne tiennent pas compte de la piézoélectricité. Le ode transversal est piézoélectriquement inactif.

Il a été établi au paragraphe 5. 1. 6. 2 *d* que pour cette coupe de la surface des lenteurs $\Gamma_{12} = \Gamma_{13} = 0$, les autres composantes du tenseur Γ_{il} étant données par les formules 5. 54. En conséquence les seules composantes non nulles du tenseur de Christoffel durci sont

$$\bar{\Gamma}_{11} = \Gamma_{11} \qquad \bar{\Gamma}_{22} = \Gamma_{22} + \frac{\gamma_2^2}{\varepsilon}$$
$$\bar{\Gamma}_{23} = \Gamma_{23} + \frac{\gamma_2\gamma_3}{\varepsilon} \qquad \bar{\Gamma}_{33} = \Gamma_{33} + \frac{\gamma_3^2}{\varepsilon}$$

et il existe une onde transversale de polarisation perpendiculaire au plan YZ, dont la vitesse $V_3 = \sqrt{\Gamma_{11}/\rho}$ n'est pas affectée par la piézoélectricité. Il en va autrement des ondes quasi longitudinale et quasi transversale polarisées dans le plan YZ de vitesses respectives V_1 et V_2 telles que

$$2\rho(V_{\substack{1\\2}})^2 = \bar{\Gamma}_{22} + \bar{\Gamma}_{33} \pm \sqrt{(\bar{\Gamma}_{22} - \bar{\Gamma}_{33})^2 + 4(\bar{\Gamma}_{23})^2}. \qquad (6.\ 58)$$

La comparaison, sur la figure 6. 7, entre les courbes en trait plein calculées à l'aide des constantes des tableaux 4. 7 et 6. 5 et les courbes en pointillé qui ne tiennent pas compte de la piézoélectricité, met en évidence l'importance de l'effet piézoélectrique dans ce cristal.

c) Propagation dans le plan méridien de l'oxyde de zinc. — L'oxyde de zinc appartient à la classe 6*mm*, d'après le tableau 6. 39 et les formules 6. 56 :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (e_{15} + e_{31})n_1n_3 \\ \gamma_2 &= (e_{15} + e_{31})n_2n_3 \\ \gamma_3 &= e_{15}(n_1^2 + n_2^2) + e_{33}n_3^2 \\ \varepsilon &= \varepsilon_{11}(n_1^2 + n_2^2) + \varepsilon_{33}n_3^2 \end{aligned} \qquad (6.\ 59)$$

Dans le plan méridien YZ ($n_1 = 0$, $n_2 = \sin\theta$, $n_3 = \cos\theta$)

$$\gamma_1 = 0 \qquad \gamma_2 = \frac{e_{15} + e_{31}}{2}\sin 2\theta \qquad \gamma_3 = e_{15}\sin^2\theta + e_{33}\cos^2\theta$$
$$\varepsilon = \varepsilon_{11}\sin^2\theta + \varepsilon_{33}\cos^2\theta.$$

Compte tenu des résultats du paragraphe 5. 1. 6. 2 *c* :

$$\bar{\Gamma}_{11} = \Gamma_{11} \qquad \bar{\Gamma}_{12} = \Gamma_{12} = 0 \qquad \Gamma_{13} = \bar{\Gamma}_{13} = 0$$
$$\bar{\Gamma}_{22} = \Gamma_{22} + \frac{\gamma_2^2}{\varepsilon} \qquad \bar{\Gamma}_{23} = \Gamma_{23} + \frac{\gamma_2\gamma_3}{\varepsilon} \qquad \bar{\Gamma}_{33} = \Gamma_{33} + \frac{\gamma_3^2}{\varepsilon}$$

il existe une onde transversale de polarisation perpendiculaire au plan méridien, dont la vitesse V_3 est donnée par la formule 5. 46, et deux ondes,

quasi longitudinale et quasi transversale, piézoélectriques, de vitesses respectives V_1 et V_2 (formule 6. 58). Ces résultats sont illustrés sur la figure 6. 8.

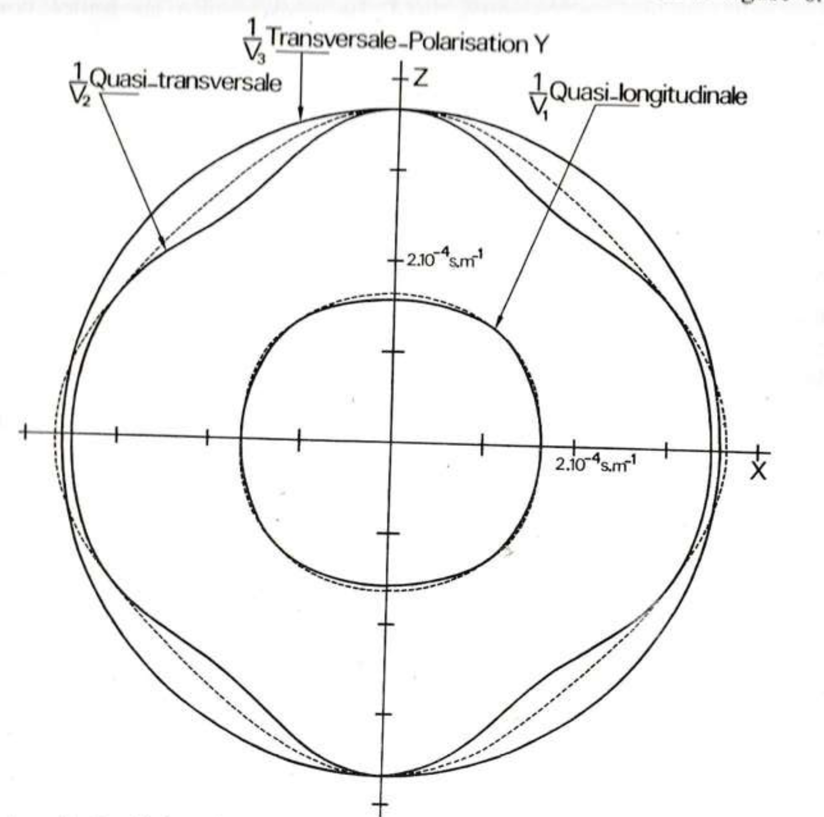


FIG. 6. 8. — *Section de la surface des lenteurs de l'oxyde de zinc (classe 6mm) par un plan méridien.* Les courbes en trait discontinu ne tiennent pas compte de la piézoélectricité. Le mode transversal est piézoélectriquement inactif.

6. 2. 1. 3. — Propagation suivant des directions liées aux éléments de symétrie. — Afin de déterminer les coefficients de couplage dans des directions importantes des cristaux, examinons la propagation le long d'un axe de rotation, dans un plan perpendiculaire à un axe quaternaire ou sénaire et dans un plan de symétrie.

a) *Le long d'un axe de symétrie* porté par Ox_3 ($n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$) les développements 6. 56 se simplifient :

$$\gamma_1 = e_{35} \qquad \gamma_2 = e_{34} \qquad \gamma_3 = e_{33}.$$

L'examen des matrices $e_{i\alpha}$ montre que pour les cristaux possédant un axe direct d'ordre n quelconque ou un axe inverse d'ordre $n \neq 2$ porté par Ox_3, les modules e_{34} et e_{35} sont nuls. Étant donné les résultats du paragraphe 5. 1. 3, $\overline{\Gamma}_{13}$ et $\overline{\Gamma}_{23}$ sont nuls et seule la composante $\overline{\Gamma}_{33}$ du tenseur de Christoffel est affectée par la piézoélectricité :

$$\overline{\Gamma}_{33} = c_{33}^{E} + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^{S}}.$$

Par conséquent les deux modes transverses se propageant suivant un axe de symétrie (différent de $\overline{A}_2$) ne sont pas couplés piézoélectriquement et le coefficient de couplage électromécanique de l'onde longitudinale est égal à

$$K = \frac{e_{33}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^{S} c_{33}^{E} + e_{33}^2}} \qquad A_n /\!/ Ox_3$$

Ce coefficient peut aussi être nul lorsque $e_{33} = 0$ pour d'autres raisons de symétrie; c'est le cas du quartz (classe 32).

b) *Dans un plan perpendiculaire à un axe quaternaire ou sénaire direct* porté par Ox_3, $n_3 = 0$ et les formules 6. 56 donnent :

$$\gamma_1 = e_{11}n_1^2 + e_{26}n_2^2 + (e_{16} + e_{21})n_1 n_2$$
$$\gamma_2 = e_{16}n_1^2 + e_{22}n_2^2 + (e_{12} + e_{26})n_1 n_2$$
$$\gamma_3 = e_{15}n_1^2 + e_{24}n_2^2 + (e_{14} + e_{25})n_1 n_2.$$

D'après le tableau 6. 37, γ_1 et γ_2 sont nuls car

$$e_{11} = e_{26} = e_{16} = e_{21} = e_{22} = 0$$

et, compte tenu des résultats du paragraphe 5. 1. 3 *b* ($\Gamma_{13} = \Gamma_{23} = 0$), il existe dans toutes les directions du plan, une onde transversale polarisée suivant Ox_3. De plus, comme $e_{25} = -e_{14}$ et $e_{24} = e_{15}$ la composante γ_3 est constante :

$$\gamma_3 = e_{15}(n_1^2 + n_2^2) = e_{15}.$$

Ainsi les ondes quasi longitudinale et quasi transversale polarisées dans le plan de propagation Ox_1x_2 perpendiculaire à un axe quaternaire ou sénaire direct ne sont pas couplées piézoélectriquement. La vitesse V_3 de l'onde transversale (T) polarisée suivant l'axe de symétrie est indépendante de la direction de propagation dans le plan Ox_1x_2 :

$$V_3 = \sqrt{\frac{c_{44}^{E}}{\rho} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^{S}\rho}}$$

le coefficient de couplage électromécanique de ce mode est

$$K = \frac{e_{15}}{\sqrt{\varepsilon_{11}^{S} c_{44}^{E} + e_{15}^2}}.$$

Le plan x_1x_2 est isotrope pour l'onde transversale, comme dans un solide non piézoélectrique. Ceci n'est plus vrai si l'axe est du type $\bar{A}_4$ (voir exercice 6. 4).

c) *Dans un plan de symétrie* perpendiculaire à Ox_3 ($n_3 = 0$) la composante γ_3 est nulle car $e_{15} = e_{24} = e_{14} = e_{25} = 0$ (cf. tableau 6. 30). Il existe donc une onde transversale de polarisation perpendiculaire au miroir ($\bar{\Gamma}_{13} = \bar{\Gamma}_{23} = 0$) non piézoélectrique car sa vitesse $V_3 = \sqrt{\bar{\Gamma}_{33}/\rho} = \sqrt{\Gamma_{33}/\rho}$ n'est pas modifiée.

Ces résultats sont rassemblés dans le tableau 6. 9 qui fournit les coefficients de couplage des matériaux piézoélectriques les plus fréquemment utilisés.

6. 2. 2. — *Ondes de surface*

Une onde élastique se propageant à la surface d'un matériau semi-infini doit satisfaire à la fois à l'équation de propagation dans le milieu illimité et aux conditions de continuité sur la surface. Il a été montré au paragraphe 5. 3 que pour un solide non piézoélectrique les ondes de Rayleigh (ondes complexes dont le déplacement est elliptique) sont la seule solution à ce problème. Pour un milieu piézoélectrique la recherche des solutions est plus difficile d'une part parce que la propagation dans le milieu illimité est décrite par deux équations (6. 48 et 6. 50), d'autre part parce qu'à la condition de tension mécanique nulle sur la surface libre s'ajoute la condition de continuité pour le potentiel électrique et la composante normale de l'induction sur la surface non chargée. En plus de l'influence de la piézoélectricité sur la propagation des ondes de Rayleigh, l'analyse montre l'existence, sous certaines conditions de symétrie, d'une onde de surface à polarisation rectiligne appelée onde de Bleustein-Gulyaev.

La méthode de recherche des modes d'ondes de surface [4] qui est exposée en premier lieu est la généralisation de celle du paragraphe 5. 3. Les considérations du paragraphe suivant ont pour but de prévoir les différents types d'ondes d'après la disposition du plan sagittal par rapport aux éléments de symétrie. Nous étudions ensuite la propagation de l'onde de Bleustein-Gulyaev dans un milieu transversalement isotrope. Puis nous examinons, de façon générale, l'influence des conditions aux limites électriques sur la propagation des ondes de surface et enfin nous donnons quelques résultats concernant les ondes de surface dans des cristaux piézoélectriques importants en pratique.

6. 2. 2. 1. — Méthode de recherche des ondes de surface. — Dans le système de référence de la figure 6. 10 (x_1 parallèle à la direction de propagation, x_2 perpendiculaire à la surface libre d'équation $x_2 = 0$), cherchons une solution dont le déplacement

$$u_k = {}^{\circ}u_k \, e^{-\chi x_2} \, e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \text{Re}\,[\chi] > 0$$

TABLEAU 6. 9. — *Expressions et valeurs du coefficient de couplage K dans des directions de symétrie de quelques matériaux.*
Les cases barrées ne sont pas concernées.

Direction de propagation	*Mode*	*Coefficient de couplage* K	$Bi_{12}GeO_{20}$ (23)	ZnO (6*mm*)	CdS (6*mm*)	*Céramique* PZT4 (6*mm*)	$LiNbO_3$ (3*m*)	$LiTaO_3$ (3*m*)	*Quartz* (32)
suivant un axe A_2, A_n ou $\bar{A}_n$ ($n > 2$) porté par Ox_3	L	$\frac{e_{33}}{\sqrt{\varepsilon_{33}^S c_{33}^E + e_{33}^2}}$	0	0,27	0,155	0,51	0,16	0,18	0
	T_1, T_2	0	0	0	0	0	0	0	0
dans un plan x_1x_2 ⊥ A_4 ou A_6	T_{Ox_3}	$\frac{e_{15}}{\sqrt{\varepsilon_{11}^S c_{44}^E + e_{15}^2}}$	×	0,32	0,19	0,70	×	×	×
	QL, QT	0	×	0	0	0	×	×	×
dans un miroir	T	0	×	plan méridien	plan méridien	plan. méridien	plan YZ	plan YZ	×
$A_2 // Ox_1$	L	$\frac{e_{11}}{\sqrt{\varepsilon_{11}^S c_{11}^E + e_{11}^2}}$	0	×	×	×	×	×	0,093
	T_1, T_2	0	0	×	×	×	×	×	0

et le potentiel électrique associé

$$\Phi = \Phi_0 \, e^{-\chi x_2} \, e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)}$$

décroissent exponentiellement dans le cœur du matériau. En posant comme au paragraphe 5. 3 mais n_2 jouant le rôle de n_3 :

$$n_1 = 1, \quad n_3 = 0, \quad \chi = \frac{i\omega}{V} n_2 \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{Im}\,[n_2] < 0$$

les composantes du déplacement et le potentiel se mettent sous une forme analogue à 6. 51

$$u_k = {}^{\circ}u_k \, e^{i\omega\left(t - \frac{n_l x_l}{V}\right)} \qquad \text{et} \qquad \Phi = \Phi_0 \, e^{i\omega\left(t - \frac{n_l x_l}{V}\right)}. \tag{6. 60}$$

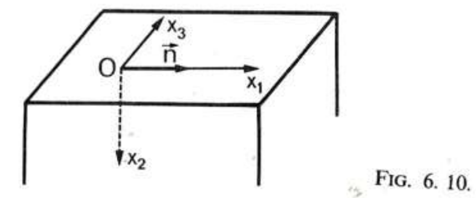


FIG. 6. 10.

Le report de ces expressions dans les équations de propagation 6. 48 et 6. 50 conduit, comme au paragraphe 6. 2. 1. 1, au système d'équations 6. 53 qui s'écrit en notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} - \rho V^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \gamma_1 \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho V^2 & \Gamma_{23} & \gamma_2 \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} - \rho V^2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{\circ}u_1 \\ {}^{\circ}u_2 \\ {}^{\circ}u_3 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} = 0. \tag{6. 61}$$

La vitesse V étant considérée comme un paramètre à déterminer, la condition de compatibilité de ces quatre équations homogènes est une équation à coefficients réels du huitième degré en $n_2 = q$ dont seules les quatre racines à partie imaginaire négative sont acceptables. Pour chacune de ces valeurs, $n_2^{(r)} = q_r$ avec $r = 1, 2, 3, 4$, le système 6. 61 fournit les déplacements ${}^{\circ}u_i^{(r)}$ et le potentiel $\Phi_0^{(r)}$. La solution générale est une combinaison linéaire de ces quatre ondes élémentaires se propageant à la même vitesse V :

$$u_i = \sum_{r=1}^{4} A_r \, {}^{\circ}u_i^{(r)} \, e^{i\omega\left(t - \frac{n_l^{(r)} x_l}{V}\right)} = \left(\sum_{r=1}^{4} A_r \, {}^{\circ}u_i^{(r)} \, e^{-\chi_r x_2} \right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)} \tag{6. 62}$$

$$\Phi = \sum_{r=1}^{4} A_r \Phi_0^{(r)} \, e^{i\omega\left(t - \frac{n_l^{(r)} x_l}{V}\right)} = \left(\sum_{r=1}^{4} A_r \Phi_0^{(r)} \, e^{-\chi_r x_2} \right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)} \tag{6. 63}$$

en posant $\chi_r = i \dfrac{\omega}{V} q_r$. La vitesse V et les coefficients A_r sont déterminés par les conditions aux limites mécaniques et électriques sur la surface libre $x_2 = 0$ (paragr. 6. 2. 2. 4). L'équation en V^2 qui en résulte a en général une seule racine acceptable, c'est-à-dire conduisant à des facteurs de décroissance χ_r à partie réelle positive.

L'onde, dont le déplacement est constitué de trois composantes, est accompagnée d'un champ électrique contenu dans le plan sagittal :

$$E_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = i \frac{\omega}{V} \Phi, \qquad E_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \qquad E_3 = 0.$$

C'est une onde de Rayleigh complexe piézoélectrique que nous désignons par $\bar{R}_3$. Par contre, pour certains plans sagittaux, deux vitesses sont acceptables. L'une (V_R) correspond à une onde de Rayleigh simple (polarisée dans le plan sagittal) non piézoélectrique que nous notons R_2, l'autre (V_B) correspond à une onde de polarisation perpendiculaire au plan sagittal, couplée à un champ électrique et appelée onde de Bleustein-Gulyaev (B). Ces deux ondes se propagent indépendamment l'une de l'autre à des vitesses différentes. Entre ces deux cas extrêmes existe la possibilité d'une onde de Rayleigh piézoélectrique à deux composantes ($\bar{R}_2$). Rappelons que pour un milieu non piézoélectrique deux types d'ondes de Rayleigh sont possibles : à trois composantes (R_3) et à deux composantes (R_2).

Dans un solide piézoélectrique, le mode R_3 ne peut pas exister car les trois composantes du déplacement engendrent toutes les déformations et par conséquent un champ électrique. De même l'onde de Bleustein-Gulyaev est toujours associée au mode R_2 car la troisième composante du déplacement, perpendiculaire au plan sagittal, doit être couplée à un champ électrique si les deux autres composantes ne le sont pas.

Les cinq cas ainsi dénombrés se présentent pour des formes particulières des équations 6: 61 résultant de l'annulation, par raison de symétrie, de certaines composantes Γ_{il} et γ_i.

6. 2. 2. 2. — Considérations de symétrie. — Pour qu'une solution du système 6. 61 corresponde à un déplacement perpendiculaire au plan sagittal ($u_1 = u_2 = 0$, $u_3 \neq 0$), il faut et il suffit que

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{23} = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \tag{6. 64}$$

ou

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{23} = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_3 = 0 \;\Rightarrow\; \Phi_0 = 0. \tag{6. 65}$$

D'après le développement ($n_1 = 1$, $n_2 = q$, $n_3 = 0$)

$$\Gamma_{il} = c_{ijkl}^{E} n_j n_k = c_{i11l}^{E} + c_{i22l}^{E} q^2 + (c_{i12l}^{E} + c_{i21l}^{E}) q \tag{6. 66}$$

la condition $\Gamma_{13} = \Gamma_{23} = 0$ impose que toutes les constantes à un seul indice 3 soient nulles. La réduction des constantes élastiques d'un cristal monoclinique (tabl. 4. 43) montre qu'il suffit pour cela que le plan sagit-

tal x_1x_2 soit un plan de symétrie élastique : miroir ou plan perpendiculaire à un axe A_{2p} direct ou inverse. D'après le développement

$$\gamma_i = e_{kij}n_jn_k = e_{1i1} + e_{2i2}q^2 + (e_{1i2} + e_{2i1})q \qquad (6.\,67)$$

les égalités $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ impliquent la nullité des constantes piézoélectriques sans indice 3. Cette condition est remplie si le plan sagittal x_1x_2 est perpendiculaire à un axe binaire direct (paragr. 6. 1. 4 *c*).

Les relations 6. 64 sont satisfaites simultanément lorsque le *plan sagittal est perpendiculaire à un axe direct d'ordre pair* (qui contient un axe binaire). Le système 6. 61 se divise alors en deux systèmes indépendants; le premier

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} - \rho V^2 & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^\circ u_1 \\ {}^\circ u_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.\,68)$$

correspond à une *onde de Rayleigh simple non piézoélectrique* (R_2), le second

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{33} - \rho V^2 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^\circ u_3 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.\,69)$$

à une onde transversale horizontale (polarisation ${}^\circ u_3$) piézoélectrique : *onde de Bleustein-Gulyaev* (*B*).

Avec les conditions 6. 65, le système 6. 61 se réduit à

$$(\Gamma_{33} - \rho V^2)\,{}^\circ u_3 = 0$$

et

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} - \rho V^2 & \Gamma_{12} & \gamma_1 \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho V^2 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^\circ u_1 \\ {}^\circ u_2 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (6.\,70)$$

Il admet une solution du type $\bar{R}_2$ en plus de l'onde T. H. non piézoélectrique. L'annulation du coefficient γ_3 entraîne d'après 6. 67 :

$$e_{15} = e_{24} = 0 \qquad \text{et} \qquad e_{14} + e_{25} = 0. \qquad (6.\,71)$$

Par ailleurs, les constantes élastiques à un seul indice 3 étant nulles ($\Gamma_{13} = \Gamma_{23} = 0$), les déformations S_{11}, S_{12}, S_{22} de l'onde de Rayleigh ne créent pas de contrainte T_{32}. En conséquence la condition aux limites $T_{32} = 0$, qui s'écrit

$$T_{32} = -\,e_{i23}E_i = 0$$

impose comme $E_3 = 0$ et $e_{223} = e_{24} = 0$ (relations 6. 71) : $e_{14} = e_{25} = 0$. Il résulte du paragraphe 6. 1. 4 que les modules e_{14}, e_{15}, e_{24}, e_{25} ne sont nuls que si le plan x_1x_2 est un miroir (tabl. 6. 30). Ainsi il existe une onde de Rayleigh à deux composantes, couplée piézoélectriquement, si et seulement si le plan sagittal est un plan de symétrie.

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus :

plan sagittal $\perp A_2$	$\Leftrightarrow$	modes $B + R_2$
plan sagittal $/\!/ M$	$\Leftrightarrow$	mode $\bar{R}_2$

L'application de ces deux théorèmes est effectuée sur la figure 6. 11 pour chaque classe de symétrie ponctuelle.

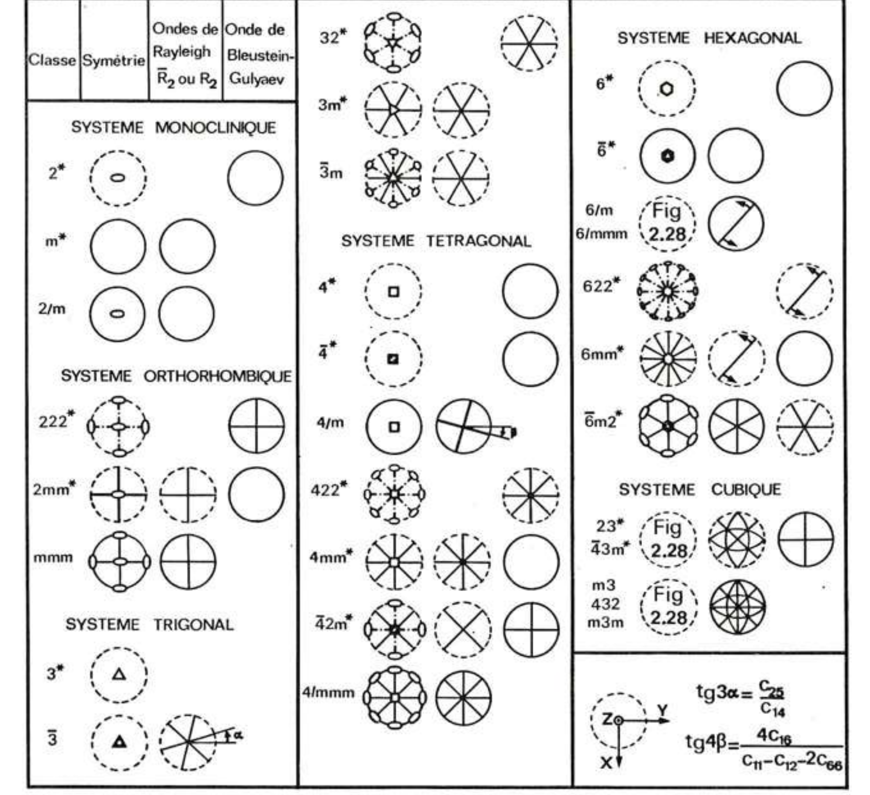


FIG. 6. 11. — *Plans sagittaux d'existence des ondes de Bleustein-Gulyaev, des ondes de Rayleigh à deux composantes $\bar{R}_2$ ou R_2 suivant que le cristal est ou n'est pas piézoélectrique.* Les classes piézoélectriques sont marquées d'un astérisque. α et β sont les angles dont il faut tourner les axes de référence pour annuler respectivement les rigidités c_{25} et c_{16} (exercices 5. 6 et 5. 5). Un tableau semblable a été établi pour les ondes de Love dans l'article de référence 5.

6. 2. 2. 3. — Onde de Bleustein-Gulyaev. — Il existe une onde de Bleustein-Gulyaev [6, 7] lorsque le plan sagittal est perpendiculaire à un axe A_6 car celui-ci inclut un axe A_2. Dans le cas d'un cristal ou d'une céramique piézoélectrique de symétrie *6mm*, l'orientation des axes x_1 et x_2 est arbi-

traire dans le plan perpendiculaire à l'axe sénaire. Avec $n_1 = 1$, $n_2 = q$, $n_3 = 0$ les expressions 5. 44 et 6. 59 donnent :

$$\Gamma_{33} = c_{44}^{E}(1+q^2) \qquad \gamma_3 = e_{15}(1+q^2) \qquad \varepsilon = \varepsilon_{11}(1+q^2).$$

La condition de compatibilité du système 6. 69 :

$$(1+q^2)\begin{vmatrix} c_{44}^{E}(1+q^2) - \rho V^2 & e_{15} \\ e_{15}(1+q^2) & -\varepsilon_{11} \end{vmatrix} = 0$$

est satisfaite pour deux valeurs q_1 et q_2 à partie imaginaire négative : $q_1 = -i$ et q_2 telle que :

$$c_{44}^{E}(1+q_2^2) - \rho V^2 + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}}(1+q_2^2) = 0$$

soit comme $c_{44}^{D} = c_{44}^{E} + \dfrac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}}$ (exercice 6. 2) :

$$q_2^2 = \frac{\rho V^2}{c_{44}^{D}} - 1.$$

q_2 est imaginaire si la vitesse V de l'onde de Bleustein est inférieure à celle de l'onde de volume transversale de même polarisation : $V_T = \sqrt{c_{44}^{D}/\rho}$:

$$q_2 = -i\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_T^2}} = -i\beta. \tag{6. 72}$$

Pour $q = q_1$ la première équation du système 6. 69 entraîne ${}^\circ u_3^{(1)} = 0$; pour $q = q_2$ la deuxième équation fournit $\Phi_0^{(2)} = \dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\,{}^\circ u_3^{(2)}$. La solution générale 6. 62 et 6. 63 se réduit (*) en posant ${}^\circ u_3^{(2)} = B$, à :

$$\begin{cases} u_3 = B\,e^{-\beta\frac{\omega}{V}x_2}\,e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V}\right)} & (6.\ 73\,a) \\ \Phi = \left(\Phi_0^{(1)}\,e^{-\frac{\omega}{V}x_2} + \dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}B\,e^{-\beta\frac{\omega}{V}x_2}\right)e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V}\right)}. & (6.\ 73\,b) \end{cases}$$

Le potentiel $\Phi_0^{(1)}$ et la vitesse V sont déterminés par les équations de continuité sur la surface libre $x_2 = 0$. Nous aurons besoin par la suite de la composante normale de l'induction :

$$D_2 = -\varepsilon_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + e_{15}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

soit

$$D_2 = \frac{\omega}{V}\varepsilon_{11}\Phi_0^{(1)}\,e^{-\frac{\omega}{V}x_2}\,e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V}\right)}. \tag{6. 74}$$

(*) Les coefficients A_1 et A_2 sont ici inutiles, ils sont inclus dans $\Phi_0^{(1)}$ et ${}^\circ u_3^{(2)} = B$.

La condition aux limites mécanique $T_{i2} = 0$ ne porte que sur T_{32} car, d'une part les déformations S_{32} et S_{31} accompagnant l'onde de Bleustein-Gulyaev et d'autre part le champ électrique, de composantes E_1 et E_2, ne créent que des contraintes T_{31} et T_{32} (voir tableau 6. 39) :

$$T_{32} = c_{44}^{E}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}.$$

En reportant les expressions 6. 73, l'égalité $T_{32} = 0$ pour $x_2 = 0$ impose :

$$\beta\left(c_{44}^{E} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}^{S}}\right)B + e_{15}\Phi_0^{(1)} = 0$$

soit

$$\Phi_0^{(1)} = -\beta\frac{c_{44}^{D}}{e_{15}}B = -\frac{\beta}{K^2}\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}B \tag{6. 75}$$

où

$$K = \frac{e_{15}}{\sqrt{\varepsilon_{11}^{S}c_{44}^{D}}} = \frac{e_{15}}{\sqrt{\varepsilon_{11}^{S}c_{44}^{E} + e_{15}^2}}$$

est le coefficient de couplage électromécanique de l'onde de volume transversale. L'onde de Bleustein-Gulyaev satisfaisant aux conditions aux limites mécaniques sur la surface libre a pour expression :

$$\begin{cases} u_3 = B\,e^{-\beta\frac{\omega}{V}x_2}\,e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V}\right)} & (6.\ 76\,a) \\ \Phi = \dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}B\left(e^{-\beta\frac{\omega}{V}x_2} - \dfrac{\beta}{K^2}e^{-\frac{\omega}{V}x_2}\right)e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V}\right)}. & (6.\ 76\,b) \end{cases}$$

Le facteur de décroissance $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{V_T^2}}$, et donc la vitesse V, sont fixés par les conditions aux limites électriques. Examinons deux cas typiques :

a) La surface est recouverte d'un film métallique d'épaisseur très petite devant la longueur d'onde, porté au potentiel zéro (la surface est encore libre du point de vue mécanique). Le potentiel électrique devant s'annuler pour $x_2 = 0$:

$$\beta = K^2 \tag{6. 77}$$

la vitesse de l'onde de Bleustein-Gulyaev

$$V_B = V_T\sqrt{1 - K^4} \tag{6. 78}$$

est très proche de celle de l'onde transversale V_T. La décroissance des amplitudes du déplacement (6. 76 *a*) et du potentiel (6. 76 *b*) :

$$\begin{cases} U_3 = B\,e^{-\beta 2\pi\frac{x_2}{\lambda_B}} \\ \Phi_m = \dfrac{e_{15}}{\ldots}B\left(e^{-\beta 2\pi\frac{x_2}{\lambda_B}} - e^{-2\pi\frac{x_2}{\lambda_B}}\right) \end{cases}$$

est d'autant plus rapide que le coefficient de couplage électromécanique est élevé. Les courbes de la figure 6. 12 sont tracées pour le sulfure de cadmium :

$$K = 0{,}19 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0{,}036 \qquad V_B = 0{,}9994\ V_T = 1\ 788\ \text{m/s}.$$

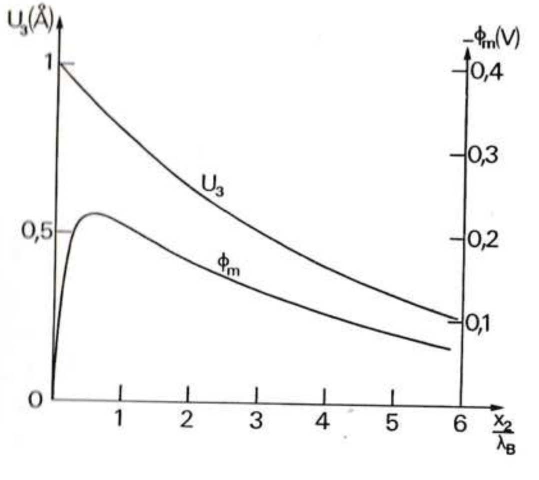


FIG. 6. 12. — *Onde de Bleustein-Gulyaev dans le sulfure de cadmium. Amplitude du déplacement (transversal) et du potentiel électrique lorsque la surface est métallisée.*

b) Lorsque la surface n'est pas métallisée, le potentiel Φ et la composante normale de l'induction doivent être continus. Dans le vide le potentiel électrique Φ', qui obéit à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x_2^2} = 0$$

doit dépendre de t et de x_1 de la même manière que Φ, afin d'assurer la continuité du potentiel à chaque instant et en tout point de la surface. La solution, nulle pour $x_2 = -\infty$

$$\Phi' = \Phi'_0\, e^{\frac{\omega}{V} x_2}\, e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)} \tag{6. 79}$$

est égale à Φ (relation 6. 76 *b*) pour $x_2 = 0$ si

$$\Phi'_0 = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} B \left(1 - \frac{\beta}{K^2}\right). \tag{6. 80}$$

La continuité de la composante normale de l'induction qui s'écrit, compte tenu de 6. 74

$$\varepsilon_{11} \Phi_0^{(1)} = -\varepsilon_0 \Phi'_0$$

conduit, en remplaçant $\Phi_0^{(1)}$ et Φ'_0 par les expressions 6. 75 et 6. 80, à

$$\frac{\beta}{K^2} e_{15} B = e_{15} B \left(1 - \frac{\beta}{K^2}\right) \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}}.$$

Le facteur de décroissance

$$\beta = \frac{K^2}{1 + \varepsilon_{11}/\varepsilon_0} \tag{6. 81}$$

est réduit dans un rapport voisin de la permittivité relative. L'onde de Bleustein-Gulyaev pénètre plus profondément dans le matériau lorsque la surface n'est pas métallisée. Dans le cas du CdS,

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_0} = 9 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0{,}0036.$$

La vitesse est aussi modifiée mais elle reste très voisine de celle de l'onde de volume transversale :

$$V_B = V_T \sqrt{1 - \frac{K^4}{(1 + \varepsilon_{11}/\varepsilon_0)^2}}. \tag{6. 82}$$

Dans les deux cas la profondeur de pénétration de l'onde de Bleustein-Gulyaev est grande devant la longueur d'onde (10 à 100 λ) ce qui explique que sa vitesse diffère peu de celle de l'onde de volume transversale.

6. 2. 2. 4. Influence des conditions aux limites électriques. — Revenons au cas général afin d'étudier l'effet des conditions aux limites électriques sur la propagation des ondes de surface, en particulier sur leur vitesse. La tension mécanique sur la surface libre du cristal d'équation $x_2 = 0$, doit être nulle :

$$T_{i2} = c_{i2kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + e_{ki2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0 \qquad \text{pour} \qquad x_2 = 0 \quad \text{et} \quad i = 1, 2, 3.$$

La substitution des expressions 6. 62 et 6. 63 du déplacement et du potentiel de l'onde de surface :

$$T_{i2}(x_2 = 0) = \sum_{r=1}^{4} A_r \left[c_{i2kl}\, {}^\circ u_k^{(r)} \left(-\frac{i\omega}{V} n_l^{(r)}\right) + e_{ki2} \Phi_0^{(r)} \left(-\frac{i\omega}{V} n_k^{(r)}\right)\right] e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)}$$

conduit à un système de trois équations ($i = 1, 2, 3$) à quatre inconnues A_r ($r = 1, \dots, 4$) qui s'écrit

$$\sum_{r=1}^{4} A_r T_{i2}^{(r)} = 0 \tag{6. 83}$$

en posant

$$T_{i2}^{(r)} = c_{i2kl}\, {}^\circ u_k^{(r)} n_l^{(r)} + e_{ki2} \Phi_0^{(r)} n_k^{(r)}. \tag{6. 84}$$

Les conditions aux limites électriques exigent la continuité du potentiel électrique Φ et de la composante normale de l'induction :

$$D_2 = e_{2kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \varepsilon_{2l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}.$$

A la surface $x_2 = 0$

$$D_2(x_2 = 0) = \sum_{r=1}^{4} A_r \left(-\frac{i\omega}{V}\right)\left(e_{2kl}\,{}^{\circ}u_k^{(r)} n_l^{(r)} - \varepsilon_{2l}\Phi_0^{(r)} n_l^{(r)}\right) e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)}$$

celle-ci se met sous la forme

$$D_2(0) = \sum_{r=1}^{4} A_r D_2^{(r)}\, e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)} \qquad (6.\ 85)$$

en posant

$$D_2^{(r)} = \frac{i\omega}{V}\left(\varepsilon_{2l}\Phi_0^{(r)} n_l^{(r)} - e_{2kl}\,{}^{\circ}u_k^{(r)} n_l^{(r)}\right).$$

Le potentiel électrique à la surface résulte immédiatement de 6. 63 :

$$\Phi(0) = \sum_{r=1}^{4} A_r \Phi_0^{(r)}\, e^{i\omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)}. \qquad (6.\ 86)$$

Le système des trois équations 6. 83 permet de calculer trois des inconnues A_r en fonction de la quatrième. Le potentiel Φ et la composante D_2 de l'induction qui s'expriment à la surface libre par une combinaison linéaire des coefficients A_r, sont en fait proportionnels à un seul de ces coefficients. Le rapport de ces deux grandeurs, indépendant des A_r, définit une impédance de surface Z_S [8] :

$$\frac{\Phi(0)}{D_2(0)} = i\,\frac{V^2}{\omega}\, Z_S. \qquad (6.\ 87)$$

Compte tenu de 6. 85 et 6. 86 cette relation se met sous la forme

$$\sum_{r=1}^{4} A_r \left[\Phi_0^{(r)} - i\,\frac{V^2}{\omega}\, Z_S D_2^{(r)}\right] = 0$$

et s'ajoute aux trois équations 6. 83 pour constituer un système linéaire homogène. La condition de compatibilité

$$\begin{vmatrix} T_{12}^{(1)} & T_{12}^{(2)} & T_{12}^{(3)} & T_{12}^{(4)} \\ T_{22}^{(1)} & T_{22}^{(2)} & T_{22}^{(3)} & T_{22}^{(4)} \\ T_{32}^{(1)} & T_{32}^{(2)} & T_{32}^{(3)} & T_{32}^{(4)} \\ \Phi_0^{(1)} - \frac{iV^2}{\omega} Z_S D_2^{(1)} & \Phi_0^{(2)} - \frac{iV^2}{\omega} Z_S D_2^{(2)} & \Phi_0^{(3)} - \frac{iV^2}{\omega} Z_S D_2^{(3)} & \Phi_0^{(4)} - \frac{iV^2}{\omega} Z_S D_2^{(4)} \end{vmatrix} = 0$$

se développe comme la somme de deux déterminants :

$$\Delta_1(V) + VZ_S\Delta_2(V) = 0$$

Δ_1 et Δ_2 dépendant de la vitesse V. Le milieu adjacent est aussi caractérisé par une impédance Z_0. La continuité de Φ et D_2 à la surface entraîne $Z_S = Z_0$ et la vitesse des ondes de surface est déterminée par l'équation

$$\Delta_1(V) + VZ_0\Delta_2(V) = 0. \qquad (6.\ 88)$$

Comme pour les ondes de Bleustein-Gulyaev deux cas principaux sont à examiner :

a) La surface est recouverte d'un film métallique très mince porté au potentiel zéro. L'impédance Z_0 est alors nulle et la vitesse V_0 est donnée par

$$\Delta_1(V_0) = 0. \qquad (6.\ 89)$$

b) Le milieu adjacent est le vide. Le potentiel Φ' qui doit vérifier l'équation de Laplace, s'annuler pour $x_2 = -\infty$, être continu sur le plan $x_2 = 0$, est donné par l'expression 6. 79. En conséquence

$$D'_2 = -\varepsilon_0 \frac{\partial\Phi'}{\partial x_2} = -\varepsilon_0 \frac{\omega}{V}\Phi'$$

et l'impédance $Z_0 = \dfrac{\omega}{iV^2}\dfrac{\Phi'(0)}{D'_2(0)}$ est égale à

$$Z_0 = \frac{i}{\varepsilon_0 V}.$$

Avec ces conditions aux limites la vitesse V_S des ondes de surface est solution de l'équation

$$\Delta_1(V_S) + \frac{i}{\varepsilon_0}\Delta_2(V_S) = 0. \qquad (6.\ 90)$$

A partir des vitesses V_0 et V_S, il est d'usage [9] de définir le coefficient de couplage électromécanique en ondes de surface par :

$$\frac{K_S^2}{2} = \frac{V_S - V_0}{V_S}. \qquad (6.\ 91)$$

Il est intuitif (mais non évident à démontrer) que ce coefficient, qui mesure l'effet relatif d'une couche métallique sur la vitesse V, caractérise bien l'aptitude du matériau à transformer un signal électrique en onde élastique de surface à l'aide d'un transducteur constitué de bandes métalliques déposées sur la surface (fig. 7. 19 du paragraphe 7. 2).

Une fois connue la vitesse V, les facteurs de décroissance $n_2^{(r)}$ et les amplitudes partielles ${}^{\circ}u_i^{(r)}$ et $\Phi_0^{(r)}$ résultent, en principe, des équations du système 6. 61. Le système 6. 83 détermine les coefficients A_r à un facteur de proportionnalité près qui est lié à la puissance élastique transportée par l'onde de surface. Les formules 6. 62 et 6. 63 fournissent ensuite les composantes du déplacement u_i et le potentiel électrique Φ. En pratique les équations algébriques sont si complexes qu'il est impossible d'obtenir

une solution analytique, excepté dans le cas de l'onde de Bleustein-Gulyaev traité précédemment. Les développements ne peuvent être résolus que numériquement sur ordinateur.

6. 2. 2. 5. — Résultats pour quelques matériaux. — Illustrons ce qui vient d'être dit par quelques courbes concernant le niobate de lithium, l'oxyde de bismuth et de germanium et le quartz. La figure 6. 13 montre la variation des vitesses V_0 (surface métallisée) et V_S (surface non métallisée) en fonction de la direction de propagation des ondes de Rayleigh dans le plan XZ (coupe Y) du niobate de lithium. La différence entre ces deux vitesses est maximale lorsque la propagation a lieu suivant l'axe Z : $V_0 = 3\,404$ m/s, $V_S = 3\,488$ m/s. Le coefficient de couplage électromécanique est alors élevé : $K_R^2 = 4{,}8 \cdot 10^{-2}$. Le plan sagittal étant un miroir, le déplacement n'a que deux composantes (type $\bar{R}_2$). Les variations, en fonction de la profondeur de pénétration, de l'amplitude des déplacements et du potentiel électrique sont représentées sur les figures 6. 14 et 6. 15 pour les deux conditions aux limites électriques classiques. Dans cette direction l'onde de Rayleigh est pure puisque le vecteur de Poynting qui est déjà parallèle à la surface doit être contenu dans le plan sagittal (plan de symétrie YZ).

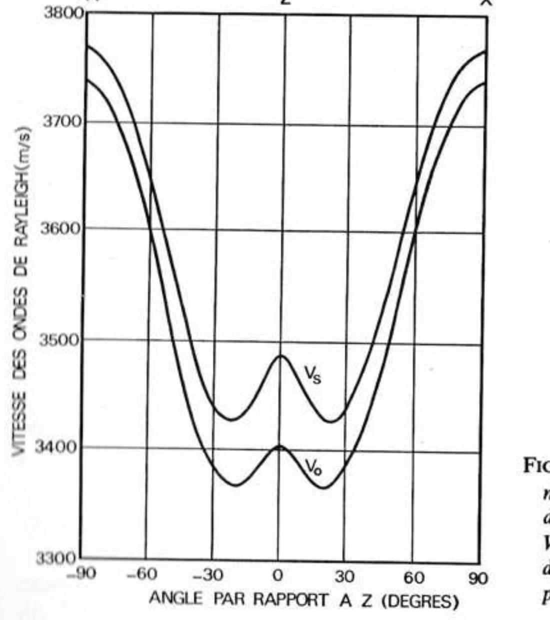


FIG. 6. 13. — *Onde de Rayleigh dans le niobate de lithium (coupe Y). Variation des vitesses V_0 (surface métallisée) et V_S (surface non métallisée) en fonction de la direction de propagation dans le plan XZ* (figure 3 de la référence 10).

Les courbes de la figure 6. 16 se rapportent à l'oxyde de bismuth et de germanium ($Bi_{12}GeO_{20}$, classe 23) pour la direction de propagation [001] dans le plan (110). Le plan sagittal ($1\bar{1}0$) n'est pas un miroir, toutefois le mode est du type $\bar{R}_2$ (tabl. 6. 11) car c'est un plan de symétrie pour les propriétés élastiques et piézoélectriques. En effet les tenseurs c_{ijkl} et e_{ijk} de la classe 23 ont les mêmes composantes non nulles que ceux de la classe $\bar{4}3m$ pour laquelle le plan ($1\bar{1}0$) est un miroir. La comparaison des valeurs du potentiel électrique Φ sur les figures 6. 14 et 6. 16 montre que ce matériau est nettement moins piézoélectrique que le niobate de lithium.

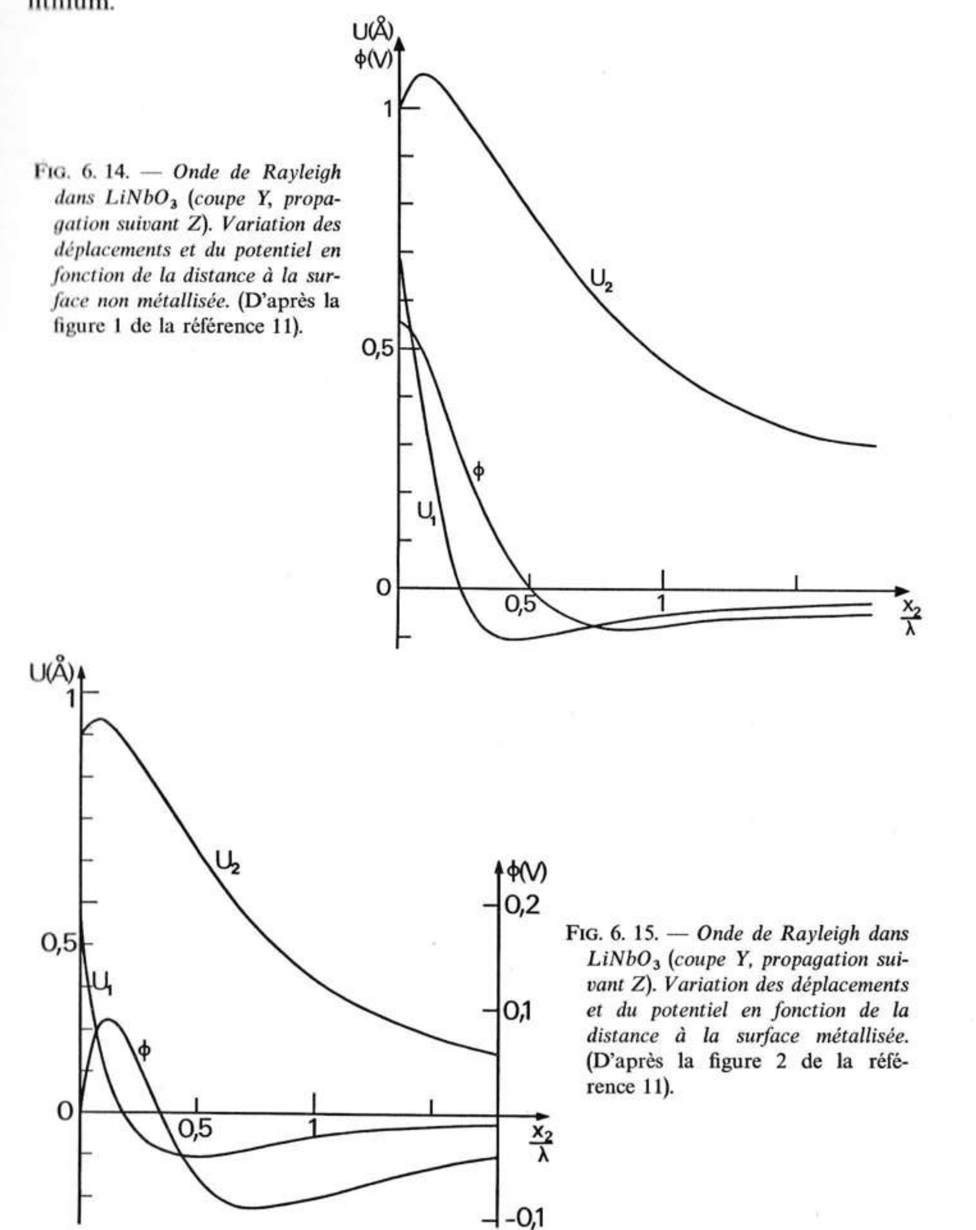


FIG. 6. 14. — *Onde de Rayleigh dans $LiNbO_3$ (coupe Y, propagation suivant Z). Variation des déplacements et du potentiel en fonction de la distance à la surface non métallisée.* (D'après la figure 1 de la référence 11).

FIG. 6. 15. — *Onde de Rayleigh dans $LiNbO_3$ (coupe Y, propagation suivant Z). Variation des déplacements et du potentiel en fonction de la distance à la surface métallisée.* (D'après la figure 2 de la référence 11).

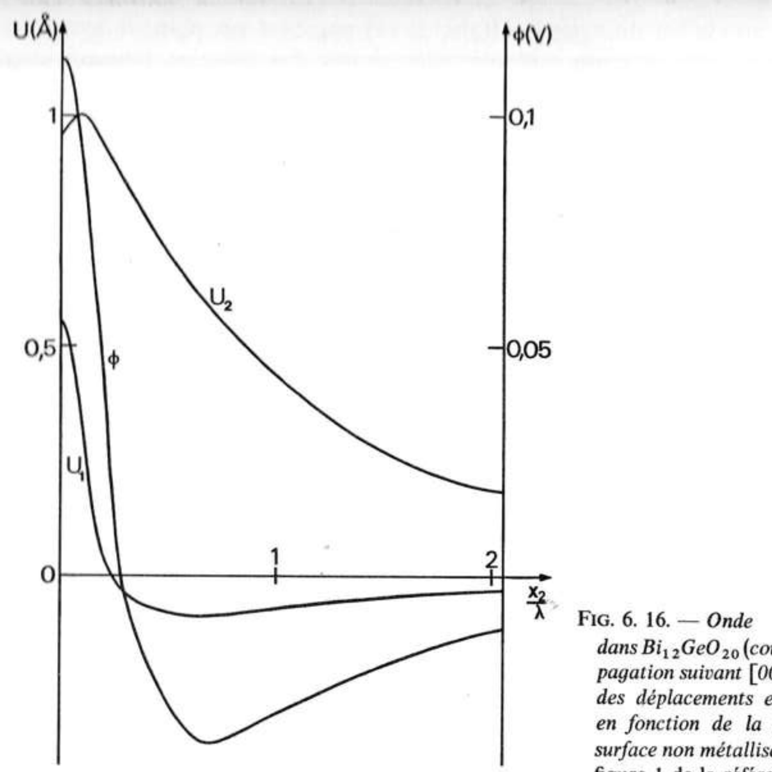


FIG. 6. 16. — *Onde de Rayleigh dans $Bi_{12}GeO_{20}$ (coupe [110], propagation suivant [001]). Variation des déplacements et du potentiel en fonction de la distance à la surface non métallisée.* (D'après la figure 1 de la référence 12.)

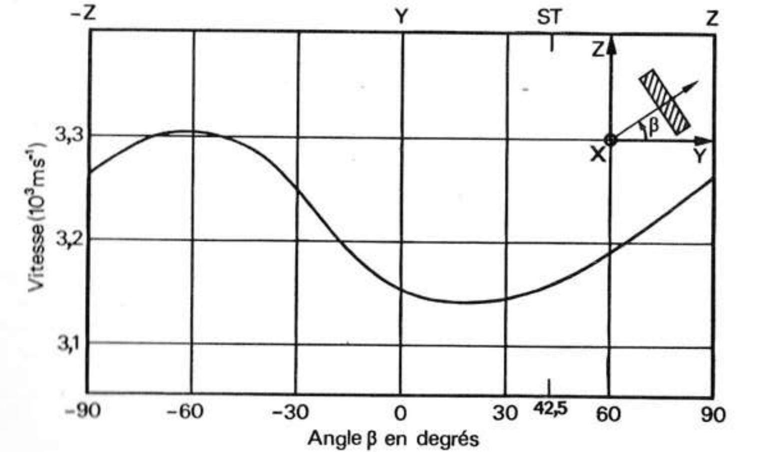


FIG. 6. 17. — *Vitesse des ondes de Rayleigh se propageant suivant X en fonction de l'angle de rotation β de la coupe d'un cristal de quartz.* (Figure 3 de la référence 13.)

Le quartz (classe 32) ne possède pas de miroir et ne se prête pas à la propagation d'ondes de Rayleigh du type $\overline{R}_2$ comme l'indique la figure 6. 11. Cependant, il existe des directions de mode pur pour le mode $\overline{R}_3$: par exemple l'axe binaire X dans le plan XZ (coupe Y).

TABLEAU 6. 18. — *Coupes et directions intéressantes pour la propagation en mode pur d'ondes à la surface de quelques matériaux piézoélectriques*

Coupe et direction de propagation	TYPE D'ONDE	VITESSE V_S (m/s)	COEFFICIENT DE COUPLAGE $K_S^2 \times 10^2$	RÉF.	VITESSE V_S (m/s)	COEFFICIENT DE COUPLAGE $K_S^2 \times 10^2$	RÉF.
Système cubique		$Bi_{12}GeO_{20}$			AsGa		
(100) [010]	R_2	1 624	0	[15]	2 720	0	[9]
(100) [011]	$\overline{R}_2$	1 683	1,4	—	2 865	0,07	—
(110) [001]	$\overline{R}_2$	1 625	0,8	—	2 820	0,02	—
(110) [1$\overline{1}$0]	B	1 755	1,0	—	3 354	0,02	—
(110) [1$\overline{1}$0]	R_2	2 160	0	—	2 400	0	—
(111) [1$\overline{1}$0]		1 708	1,7	—			
Classe 6mm		ZnO			CdS		
Z quelconque	$\overline{R}_2$	2 702	0,88	[9]	1 731	0,47	[9]
X Y	B	2 838	0,35	—	1 800	0,12	—
X Y	R_2	2 623	0	—	1 730	0	—
X Z	$\overline{R}_2$	2 680	1,1	—	1 718	0,52	—
Classe 3m		$LiNbO_3$			$LiTaO_3$		
Y Z	$\overline{R}_2$	3 488	4,8	[10]	3 230		[18]
Z Y	$\overline{R}_2$	3 903	2,2	[10]	3 329		[18]
[Y + 131,5°] X	$\overline{R}_3$	4 000	5,54	[16]			
(α = 16,5°)	$\overline{R}_3$	3 503	5,36	[17]			
Classe 32		Quartz α			Se		
Y X	$\overline{R}_3$	3 154	0,22	[13]	810	1,7	[19]
ST(Y + 42,5°) X	$\overline{R}_3$	3 160	0,16	[13]			

L'extrémité du vecteur déplacement décrit une ellipse contenue dans le plan qui se déduit du plan sagittal par une rotation de 43° autour de l'axe X. La vitesse est égale à 3 154 m/s. La figure 6. 17 donne la vitesse des ondes de Rayleigh se propageant dans la direction X, sur une surface dont la normale, contenue dans le plan YZ, fait un angle β avec l'axe Y. La coupe ST correspondant à $\beta = 42{,}5°$ est remarquable par son coefficient de température nul à 25 °C [14]. Bien que faiblement piézoélectrique le quartz est souvent utilisé en ondes de surface car il est disponible en monocristaux de grandes dimensions, à des prix raisonnables, faciles à polir et très stables en température. Pour la coupe $\underline{Y}\underrightarrow{X}$ (la barre et la flèche précisent respectivement la normale à la surface et la direction de propagation) le coefficient de couplage est $K_R^2 = 0{,}22 \cdot 10^{-2}$.

Le tableau 6. 18 indique pour quelques matériaux les coupes intéressantes et leurs caractéristiques.

RÉFÉRENCES

[1] G. QUENTIN and J. M. THUILLIER. — *Solid State Commun.*, 2, 115 (1964).
[2] J. BOUAT and J. M. THUILLIER. — *Phys. Letters, 37 A* (1971).
[3] G. ARLT and P. QUADFLIEG. — *Phys. Status Solidi, 25*, 323 (1968).
[4] G. W. FARNELL. — Properties of elastic surface waves. In *Physical Acoustics* (W. P. MASON and R. N. THURSTON, eds), vol. 6, chap. 3, paragr. VI. New York : Academic Press (1970).
[5] C. MAERFELD et C. LARDAT. — *C. R. Acad. Sc. Paris, 270*, 1187 (1970).
[6] J. L. BLEUSTEIN. — *Appl. Phys. Lett., 13*, 412 (1968).
[7] YU. V. GULYAEV. — *Soviet Phys. JETP Lett., 9*, 63 (1969).
[8] K. A. INGEBRIGTSEN. — *J. Appl. Phys., 40*, 2681 (1969).
[9] J. J. CAMPBELL and W. R. JONES. — *J. Appl. Phys., 41*, 2796 (1970).
[10] J. J. CAMPBELL and W. R. JONES. — *IEEE Trans. Son. Ultrason., SU-15*, 209 (1968).
[11] M. MORIAMEZ, E. BRIDOUX, J. M. DESRUMAUX, J. M. ROUVAEN et M. DELANNOY. — *Revue Phys. Appl., 6*, 333 (1971).
[12] E. BRIDOUX, J. M. ROUVAEN, G. COUSSOT and E. DIEULESAINT. — *Appl. Phys. Lett., 19*, 523 (1971).
[13] G. A. COQUIN and H. F. TIERSTEN. — *J. Acoust. Soc. Am., 41*, 921 (1967).
[14] M. B. SCHULZ, B. J. MATSINGER and M. G. HOLLAND. — *J. Appl. Phys., 41*, 2755 (1970).
[15] R. G. PRATT, G. SIMPSON, W. A. CROSSLEY. — *Electron. Lett., 8*, 127 (1972).
[16] A. J. SLOBODNIK Jr. and E. D. CONWAY. — *Electron. Lett., 6*, 171 (1970).
[17] A. J. SLOBODNIK Jr. and T. L. SZABO. — *Electron. Lett., 7*, 257 (1971).
[18] A. J. SLOBODNIK Jr. and E. D. CONWAY. — *Microwave acoustics handbook*, vol. *1*, AFCRL Report No. 70-0164, Air Force Cambridge Research Laboratories, Bedford, Mass., U. S. A. (1970).
[19] E. DIEULESAINT, D. ROYER, J. BARBOT and J. C. THUILLIER. — *IEEE Ultrasonics Symposium Proc.*, p. 383 (1973).
[20] C. MAERFELD and P. TOURNOIS. — *Appl. Phys. Lett., 19*, 117 (1971).

BIBLIOGRAPHIE

Mécanisme physique de la piézoélectricité.

T. OGAWA. — A linear chain model for piezoelectricity in zincblende and wurtzite type crystals. *Japan. J. Appl. Phys., 10*, 72 (1971).
G. ARLT and P. QUADFLIEG. — Référence 3.

Expression tensorielle de la piézoélectricité. Réduction due à la symétrie des cristaux.

J. F. NYE. — *Propriétés physiques des cristaux*, chap. 7. Paris : Dunod (1961).
S. BHAGAVANTAM. — *Crystal symmetry and Physical properties.* London and New York : Academic Press (1966).
D. A. BERLINCOURT, D. R. CURRAN, and H. JAFFE. — Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers. In : *Physical Acoustics* (W. P. MASON and R. N. THURSTON, eds) vol. *1 A*, chap. 3. New York : Academic Press (1964).

Ondes élastiques dans un solide piézoélectrique illimité.

J. J. KYAME. — Wave propagation in piezoelectric crystals, *J. Acoust. Soc. Am. 21*, 159 (1949).
B. A. AULD. — *Acoustic fields and waves in solids*, vol. *1*, chap. 8. New York : Wiley-Interscience (1973).

Ondes de surface.

G. W. FARNELL. — Référence 4.
C. C. TSENG and R. M. WHITE. — Propagation of piezoelectric and elastic surface waves on the basal plane of hexagonal piezoelectric crystals, *J. Appl. Phys., 38*, 4274 (1967).
C. C. TSENG. — Piezoelectric surface waves in cubic crystals, *J. Appl. Phys., 41*, 2270 (1970).
C. A. A. J. GREEBE, P. A. VAN DALEN, T. J. B. SWANENBURG, J. WOLTER. — Electric coupling properties of acoustic and electric surface waves. *Physics Reports, 1 C*, 235 (1971).

EXERCICES

• **6. 1.** En appliquant les principes de Curie trouver les classes cristallines où il apparaît une polarisation électrique sous l'action d'une compression hydrostatique.

Solution. Une compression hydrostatique, qui s'exerce dans toutes les directions avec une égale intensité, ayant la symétrie d'une sphère, le cristal doit être sous-groupe de la symétrie caractéristique $A_\infty \infty M$ de la polarisation. C'est le cas des onze classes polaires : 1, 2, *m*, *2mm*, 3, *3m*, 4, $\bar{4}$, *4mm*, 6, *6mm* où se manifeste aussi la pyroélectricité.

• **6. 2.** Exprimer les constantes $c^D_{\alpha\beta}$ en fonction des rigidités $c^E_{\alpha\beta}$ et des modules $e_{i\alpha}$.

Solution. La relation 6. 15 *b* devient par contradiction avec β^S_{ki} :

$$\beta^S_{ki} D_i = E_k + \beta^S_{ki} e_{i\beta} S_\beta$$

soit

$$E_i = \beta^S_{ik} D_k - \beta^S_{ik} e_{k\beta} S_\beta.$$

En remplaçant dans 6. 15 *a* il vient :

$$T_\alpha = (c^E_{\alpha\beta} + e_{i\alpha}\beta^S_{ik}e_{k\beta})S_\beta - e_{i\alpha}\beta^S_{ik}D_k$$

et par conséquent

$$c^D_{\alpha\beta} = c^E_{\alpha\beta} + e_{i\alpha}\beta^S_{ik}e_{k\beta}.$$

• **6. 3.** Montrer que le tenseur piézoélectrique des classes *4mm* et *6mm* est invariant dans toute rotation autour de l'axe Ox_3.

Solution. Les nouvelles composantes e'_{ijk} se calculent à l'aide de la matrice de rotation α donnée par 3. 12 :

$$e'_{ijk} = \alpha^p_i\alpha^q_j\alpha^r_k e_{pqr}.$$

Comme seuls les coefficients

$$e_{113} = e_{223} = e_{15}, \quad e_{333} = e_{33} \quad \text{et} \quad e_{311} = e_{322} = e_{31}$$

ne sont pas nuls (cf. tabl. 6. 39) et que $\alpha^3_k = \delta_{k3}$:

$$e'_{ijk} = (\alpha^1_i\alpha^1_j + \alpha^2_i\alpha^2_j)\delta_{k3}e_{15} + \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}e_{33} + (\alpha^1_j\alpha^1_k + \alpha^2_j\alpha^2_k)\delta_{i3}e_{31}.$$

Il suffit d'appliquer cette relation aux constantes du tableau 6. 37 des classes 4 et 6 :

$$e'_{123} = (\alpha^1_1\alpha^1_2 + \alpha^2_1\alpha^2_2)e_{15} = 0 \Rightarrow \underline{e'_{14} = 0}$$

$$e'_{113} = (\alpha^1_1\alpha^1_1 + \alpha^2_1\alpha^2_1)e_{15} = e_{15} \Rightarrow \underline{e'_{15} = e_{15}}$$

$$e'_{333} = e_{333} \Rightarrow \underline{e'_{33} = e_{33}} \quad \text{et} \quad e'_{311} = (\alpha^1_1\alpha^1_1 + \alpha^2_1\alpha^2_1)e_{31} = e_{31} \Rightarrow \underline{e'_{31} = e_{31}}.$$

Les égalités soulignées montrent que le nouveau tenseur est identique à l'ancien.

• **6. 4.** Calculer la vitesse V_3 de l'onde transversale polarisée suivant un axe $\bar{A}_4$.

Solution. Compte tenu du tableau 6. 46, les développements 6. 56 donnent avec $n_1 = \cos\varphi$, $n_2 = \sin\varphi$, $n_3 = 0$:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \qquad \gamma_3 = e_{15}\cos 2\varphi + e_{14}\sin 2\varphi.$$

D'après les résultats du paragraphe 5. 1. 3 *b* :

$$\rho V_3^2 = \bar{\Gamma}_{33} = \Gamma_{33} + \frac{\gamma_3^2}{\varepsilon} = c^E_{44} + \frac{(e_{15}\cos 2\varphi + e_{14}\sin 2\varphi)^2}{\varepsilon^S_{11}}.$$

• **6. 5.** Pour la classe 622, le tableau 6. 11 affirme l'existence de l'onde de Bleustein-Gulyaev pour tout plan sagittal passant par l'axe A_6, même s'il n'est pas perpendiculaire à un des six axes binaires. Établir cette proposition.

Solution. Il suffit de montrer que le tenseur e_{ijk} est invariant dans toute rotation autour de l'axe $Ox_3 /\!/ A_6$. Pour cette classe (tabl. 6. 38) seuls $e_{123} = e_{14}$ et $e_{213} = -e_{14}$ ne sont pas nuls $\Rightarrow$ $e'_{ijk} = (\alpha^1_i\alpha^2_j\alpha^3_k - \alpha^2_i\alpha^1_j\alpha^3_k)e_{14}$. Parmi les constantes du tableau 6. 37

$$e'_{31} = 0 \text{ car } k \neq 3, \quad e'_{113} = e'_{15} = 0 \quad \text{et} \quad e'_{333} = e'_{33} = 0 \text{ car } i = j,\ k = 3$$

$$e'_{14} = e'_{123} = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)e_{14} \Rightarrow e'_{14} = e_{14}.$$

• **6. 6.** Deux cristaux identiques, piézoélectriques, de symétrie *6mm* sont rigidement liés, les axes A_6 étant opposés (fig. 6. 19). Montrer qu'une onde de surface de polarisation parallèle aux axes A_6 se propage à l'interface $x_2 = 0$. (D'après la référence 20).

c_{44} $e'_{15} = -e_{15}$ $\odot A_6$

c_{44} e_{15} x_3 x_1 $\otimes A_6$ x_2

FIG. 6. 19.

Solution. Les équations de propagation sont les mêmes dans les deux cristaux et identiques à celles du paragraphe 6. 2. 2. 3 dont nous pouvons utiliser les résultats avec les constantes $c'_{44} = c_{44}$ et $e'_{15} = -e_{15}$ pour $x_2 < 0$ en raison de l'inversion du sens des axes A_6. Le déplacement u_3 et le potentiel Φ sont donnés par 6. 73 *a* et *b* pour $x_2 > 0$. Pour $x_2 < 0$, il faut changer le signe du module e_{15} et celui des exposants pour que l'onde s'annule lorsque $x_2 \to -\infty$:

$$\begin{cases} u'_3 = B\, e^{\beta\frac{\omega}{V}x_2}\, e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V}\right)} \\[2mm] \Phi' = \left(\Phi'^{(1)}_0\, e^{\frac{\omega}{V}x_2} - \dfrac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} B\, e^{\beta\frac{\omega}{V}x_2}\right) e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V}\right)}. \end{cases}$$

Le coefficient B est le même en raison de la continuité du déplacement pour $x_2 = 0$ et, d'après 6. 72 : $\beta = \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{V_T^2}}$. Écrivons les conditions de continuité pour $x_2 = 0$. Il a été établi que la continuité de la tension mécanique porte seulement sur T_{32} :

$$-\beta c^D_{44}B - e_{15}\Phi^{(1)}_0 = \beta c^D_{44}B - e_{15}\Phi'^{(1)}_0$$

d'où

$$\Phi'^{(1)}_0 - \Phi^{(1)}_0 = \frac{2\beta c^D_{44}}{e_{15}} B$$

La continuité du potentiel entraîne :

$$\Phi'^{(1)}_0 - \Phi^{(1)}_0 = \frac{2e_{15}}{\varepsilon_{11}} B.$$

Ces deux équations sont compatibles si : $\beta = \dfrac{e^2_{15}}{\varepsilon^S_{11}c^D_{44}} = K^2$ ce qui conduit à la même vitesse de propagation $V = V_T\sqrt{1 - K^4}$ que l'onde B-G sur la surface métallisée de l'un ou l'autre monocristal. Ceci s'explique par la continuité de la composante normale de l'induction : $D_2 = \dfrac{\omega}{V}\varepsilon_{11}\Phi^{(1)}_0$ d'après la formule 6. 74 et $D'_2 = -\dfrac{\omega}{V}\varepsilon_{11}\Phi'^{(1)}_0$ en raison de l'inversion du signe des exposants pour $x_2 < 0$. Avec les valeurs

$$\Phi'^{(1)}_0 = -\Phi^{(1)}_0 = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} B$$

les potentiels Φ et Φ' s'annulent sur l'interface :

$$\Phi = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} B \left(e^{-\frac{\omega}{V}x_2} - e^{-\beta\frac{\omega}{V}x_2}\right) e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V}\right)}$$

$$\Phi' = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} B \left(e^{\frac{\omega}{V}x_2} - e^{\beta\frac{\omega}{V}x_2}\right) e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V}\right)}.$$

CHAPITRE 7

GÉNÉRATION ET DÉTECTION DES ONDES ÉLASTIQUES

Dans le chapitre 5 : élasticité dynamique (et aussi dans la deuxième partie du chapitre 6), nous avons étudié la propagation des principaux types d'ondes élastiques dans les monocristaux sans nous soucier de leur génération. Au cours du chapitre 6, consacré à la piézoélectricité, nous avons décrit l'interdépendance des propriétés élastiques et électriques dans les cristaux dépourvus de centre de symétrie. Nous abordons à présent la génération et la détection, par effet piézoélectrique, d'une part des ondes de volume longitudinales ou transversales, d'autre part des ondes de surface et plus spécialement des ondes de Rayleigh. Le transducteur à ondes de volume est analysé suivant un modèle classique valable aussi bien pour un monocristal piézoélectrique rigidement lié au milieu de propagation, que pour une couche piézoélectrique déposée sur ce milieu, comme c'est le cas aux fréquences élevées ($f > 1\,000$ MHz). En ce qui concerne les ondes de surface, nous avons retenu le transducteur à électrodes en forme de peigne car il est le plus employé. La technologie propre à chaque type de transducteur fait l'objet d'un petit paragraphe.

7. 1. — TRANSDUCTEUR PIÉZOÉLECTRIQUE POUR ONDES DE VOLUME

Un transducteur comprend essentiellement, comme l'indique la figure 7. 1, un matériau piézoélectrique portant deux électrodes métalliques. Le champ électrique du signal appliqué entre les électrodes met en vibration le solide piézoélectrique dont l'épaisseur est égale à une fraction de la longueur d'onde élastique. L'électrode interne fixée sur le milieu de propagation est traversée par le faisceau d'ondes élastiques dont les dimensions sont imposées par l'électrode extérieure. L'orientation cristallographique du solide piézoélectrique est choisie pour que le mode élastique désiré soit préférentiellement excité. Par exemple, dans le cas de l'oxyde de zinc, l'axe de symétrie d'ordre six doit être parallèle au champ électrique si on veut engendrer des ondes longitudinales. Le milieu de propagation est disposé par rapport au transducteur de façon que le mode élastique soit un mode pur, l'énergie se propageant suivant l'axe de la structure.

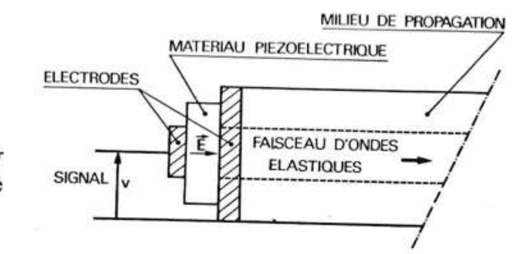


FIG. 7. 1. — *Structure d'un transducteur à ondes de volume.* Le matériau piézoélectrique est excité par le champ électrique $\vec{E}$ du signal appliqué entre les deux électrodes.

L'analyse de ce transducteur peut être effectuée suivant deux procédés. Le premier consiste à calculer directement la puissance élastique utile en écrivant que les solutions des équations de propagation dans les différents milieux satisfont aux conditions aux limites. Le deuxième procédé consiste à représenter par un circuit équivalent les différentes parties, à associer ces circuits et puis à appliquer les relations de Kirchhoff.

7. 1. 1. — Calcul direct de la puissance élastique

Le calcul de la puissance élastique fournie au milieu de propagation est effectué dans le cas pratique où une seule onde (longitudinale ou transversale) est créée et peut se propager. Cette restriction impose des conditions sur les constantes élastiques et piézoélectriques.

7. 1. 1. 1. Conditions de validité d'un modèle unidimensionnel. — La figure 7. 2 précise l'orientation des axes de référence que nous appelons $x'_1x'_2x'_3$ afin de réserver la dénomination $x_1x_2x_3$ pour les axes cristallographiques. L'épaisseur d_2 de la tranche piézoélectrique où sont engendrées les ondes élastiques étant très petite devant les autres dimensions, le champ électrique est parallèle à Ox'_3 et les plans $x'_3 = C^{te}$ sont des plans d'équiphase. La direction de propagation, parallèle à x'_3, se conserve à chaque interface : $n'_1 = n'_2 = 0$, $n'_3 = 1$.

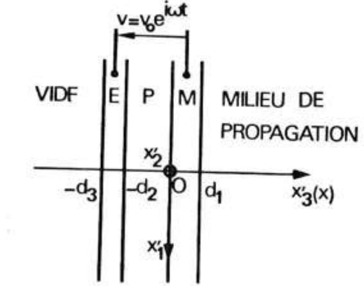


FIG. 7. 2. — *Modèle analytique.*

Une onde longitudinale peut se propager si le tenseur de Christoffel admet Ox'_3 comme axe principal : $\Gamma'_{13} = \Gamma'_{23} = 0$. Avec $n'_1 = n'_2 = 0$, $n'_3 = 1$, les développements 5. 8 imposent

$$c'_{34} = c'_{35} = 0. \qquad (7.\ 1)$$

Dans la couche piézoélectrique : $\overline{\Gamma'_{ii}} = \Gamma'_{ii} + \frac{\gamma'_i\gamma'_i}{\varepsilon}$ (paragr. 6. 2. 1. 1), il faut de plus $\gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$ soit d'après les expressions 6. 56 :

$$e'_{34} = e'_{35} = 0. \qquad (7.\ 2)$$

Le module e'_{33}, différent de zéro, permet l'excitation de cette onde par le champ électrique parallèle à x'_3. De la même manière, les conditions de propagation et d'excitation d'une onde transversale, polarisée suivant x'_1 par exemple, sont :

$$c'_{45} = c'_{35} = 0, \qquad e'_{33} = e'_{34} = 0 \qquad \text{et} \qquad e'_{35} \neq 0. \qquad (7.\ 3)$$

Si ces conditions sont satisfaites l'équation 6. 15a s'écrit sans indice

$$T = c^{E} \frac{\partial u}{\partial x} - eE \qquad (7.\ 4)$$

en posant $x = x'_3$, $E = E'_3$ et en désignant selon que le mode est longitudinal ou transversal par :

— T la contrainte T'_{33} ou T'_{31}, u le déplacement u'_3 ou u'_1 ;
— c^E la rigidité c'_{33} ou c'_{55}, e le module piézoélectrique e'_{33} ou e'_{35}.

7. 1. 1. 2. Mise en équation. — Les expressions (*) du déplacement et de la contrainte dans chaque partie du transducteur sont :

$$u_S = a_S\, e^{-ik_S x} + b_S\, e^{ik_S x} \qquad (7.\ 5)$$

$$T_S = -\, ik_S c_S^E (a_S\, e^{-ik_S x} - b_S\, e^{ik_S x}) - eE\delta_{SP} \qquad (7.\ 6)$$

où l'indice S désigne M pour l'électrode de masse, P pour le solide piézoélectrique, E pour l'électrode extérieure (fig. 7. 2). Le symbole de Kronecker δ_{SP} indique que le terme eE n'existe que dans le matériau piézoélectrique. Dans le milieu de propagation l'onde est progressive :

$$u = a\, e^{-ikx} \qquad (7.\ 7)$$

$$T = -\, ikca\, e^{-ikx}. \qquad (7.\ 8)$$

Les sept inconnues a, a_M, b_M, a_P, b_P, a_E et b_E sont déterminées par les sept équations aux limites qui traduisent la continuité des déplacements et des contraintes entre l'électrode interne et le milieu de propagation

$$u_M(d_1) = u(d_1) \qquad (7.\ 9a)$$

$$T_M(d_1) = T(d_1) \qquad (7.\ 9b)$$

entre le solide piézoélectrique et l'électrode de masse

$$u_P(0) = u_M(0) \qquad (7.\ 10a)$$

$$T_P(0) = T_M(0) \qquad (7.\ 10b)$$

(*) Toutes les relations étant linéaires nous avons supprimé le facteur $e^{i\omega t}$.

entre l'électrode extérieure et le cristal piézoélectrique

$$u_E(-\, d_2) = u_P(-\, d_2) \qquad (7.\ 11a)$$

$$T_E(-\, d_2) = T_P(-\, d_2) \qquad (7.\ 11b)$$

à la surface libre de l'électrode extérieure

$$T_E(-\, d_3) = 0. \qquad (7.\ 12)$$

La résolution directe de ce système fournit les amplitudes a, a_S et b_S en fonction des valeurs du champ électrique aux extrémités 0 et $-\, d_2$ du matériau piézoélectrique. En fait la grandeur mesurable est la différence de potentiel $v = v_0\, e^{i\omega t}$ appliquée aux électrodes :

$$v_0 = \int_0^{-d_2} -\, E\, dx.$$

Par ailleurs l'équation de Poisson : $\frac{\partial D'_i}{\partial x'_i} = 0$ pour un milieu isolant, conduit comme x'_3 est la seule coordonnée de position à $\frac{\partial D'_3}{\partial x'_3} = 0$. La composante $D'_3 = D$ de l'induction électrique est constante; elle est donnée par la formule 6. 15b simplifiée :

$$D = \varepsilon^S E + e \frac{\partial u_P}{\partial x} \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon^S = \varepsilon'_{33}. \qquad (7.\ 13)$$

En intégrant de 0 à $-\, d_2$, il vient

$$-\, Dd_2 = -\, \varepsilon^S v_0 + e[u_P(-\, d_2) - u_P(0)]. \qquad (7.\ 14)$$

L'élimination de E entre les relations 7. 4 et 7. 13 fait apparaître la rigidité du matériau piézoélectrique à D constant : $c^D = c^E + \frac{e^2}{\varepsilon^S}$

$$T_P = c_P^D \frac{\partial u_P}{\partial x} - \frac{e}{\varepsilon^S} D. \qquad (7.\ 14\ bis)$$

En reportant l'expression de l'induction déduite de 7. 14 et 7. 5 :

$$D = \frac{\varepsilon^S v_0}{d_2} - \frac{e}{d_2} [a_P(e^{ik_P d_2} - 1) + b_P(e^{-ik_P d_2} - 1)]$$

dans celle de la contrainte T_P, il vient (c. c. : complexe conjugué) :

$$T_P = -\, ik_P c_P^D \{a_P[e^{-ik_P x} + \frac{ie^2}{\varepsilon^S c_P^D k_P d_2}(e^{ik_P d_2} - 1)] - b_P[\text{c. c.}]\} - e \frac{v_0}{d_2}.$$

Le facteur $\frac{e^2}{\varepsilon^S c_P^D k_P d_2}$ contient le carré du coefficient de couplage électro-

mécanique $K^2 = \frac{e^2}{\varepsilon^S c_P^E + e^2} = \frac{e^2}{\varepsilon^S c_P^D}$ (paragr. 6. 2. 1. 2). L'épaisseur d_2 de la tranche piézoélectrique est de l'ordre d'une demi-longueur d'onde : $k_P d_2 \simeq \pi$, le rapport

$$\frac{e^2}{\varepsilon^S c_P^D k_P d_2} = \frac{K^2}{k_P d_2} \simeq \frac{K^2}{\pi}$$

est petit devant 1 pour un matériau moyennement piézoélectrique ($K < 0{,}3 \Rightarrow K^2 < 0{,}1$) et la contrainte T_P s'exprime simplement en fonction de la différence de potentiel v_0 :

$$T_P = -\,ik_P c_P^D (a_P\,e^{-ik_P x} - b_P\,e^{ik_P x}) - e\,\frac{v_0}{d_2}. \qquad (7.\ 15)$$

Connaissant l'amplitude a en fonction de v_0, il est possible de calculer la puissance élastique utile (exercice 5. 1) :

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2} Z\omega^2 \,|a|^2\, A \qquad (7.\ 16)$$

où Z est l'impédance élastique par unité de surface du milieu de propagation et A la section du faisceau. Si la résolution numérique peut être menée à bien sur ordinateur dans le cas général et même en tenant compte de sous-couches éventuelles, les expressions algébriques deviennent rapidement compliquées et les résultats sont difficiles à interpréter étant donné le nombre élevé de paramètres. Aussi appliquons-nous cette méthode à deux structures plus simples. Dans la première structure, représentée sur la figure 7. 3, les électrodes d'épaisseurs très faibles devant la longueur d'onde n'interviennent pas dans la propagation des ondes élastiques. Les résultats obtenus — réponse en fréquence pour différentes valeurs du rapport des impédances élastiques du cristal piézoélectrique et du milieu de propagation — s'appliquent donc aux transducteurs de basse fréquence (inférieure à 100 MHz). La deuxième structure qui tient compte de l'électrode interne correspond aux transducteurs de haute fréquence dans lesquels le matériau piézoélectrique de faible épaisseur est déposé sur le cristal de propagation. Pour un couple matériau piézoélectrique-cristal de propagation donné, nous analysons l'influence de la nature et de l'épaisseur de l'électrode interne sur la réponse en fréquence du transducteur.

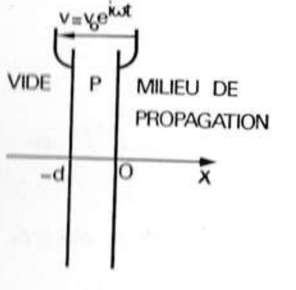


FIG. 7. 3. — *Modèle simplifié valable lorsque les épaisseurs des électrodes sont très faibles devant celle du cristal piézoélectrique.*

7. 1. 1. 3. — **Structure cristal piézoélectrique-milieu de propagation.** — Avec les notations de la figure 7. 3, les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} u_P(0) - u(0) = 0 \\ T_P(0) - T(0) = 0 \\ T_P(-d) = 0. \end{cases}$$

Leur développement conduit, en utilisant l'expression 7. 15 de T_P et en posant $\varphi = k_P d$, au système d'équations (*) :

$$\begin{cases} a_P + b_P - a = 0 \\ k_P c_P a_P - k_P c_P b_P - kca = i\,\dfrac{ev_0}{d} \\ k_P c_P a_P\,e^{i\varphi} - k_P c_P b_P\,e^{-i\varphi} = i\,\dfrac{ev_0}{d} \end{cases}$$

ou encore en mettant en évidence les impédances élastiques des deux milieux $Z_P = \frac{k_P c_P}{\omega}$, $Z = \frac{kc}{\omega}$:

$$\begin{cases} a_P + b_P = a \\ \dfrac{Z_P}{Z}(a_P - b_P) = a + i\,\dfrac{ev_0}{\omega\,dZ} \\ \dfrac{Z_P}{Z}(a_P - b_P)\cos\varphi + i\,\dfrac{Z_P}{Z}(a_P + b_P)\sin\varphi = i\,\dfrac{ev_0}{\omega\,dZ}. \end{cases}$$

La dernière équation qui s'écrit

$$\left(a + i\,\frac{ev_0}{\omega\,dZ}\right)\cos\varphi + i\,\frac{Z_P}{Z}\,a\sin\varphi = i\,\frac{ev_0}{\omega\,dZ}$$

fournit l'inconnue a :

$$a = i\,\frac{ev_0}{\omega\,dZ}\cdot\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi + i\,\dfrac{Z_P}{Z}\sin\varphi} = 2i\,\frac{ev_0}{\omega\,dZm_0}$$

en posant $$m_0 = (\cos\varphi + i\,\frac{Z_P}{Z}\sin\varphi)/\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

D'après la formule 7. 16, la puissance élastique créée dans la ligne

$$\mathscr{P} = \frac{2e^2 v_0^2}{\varepsilon^S\,dZ\,|m_0|^2}\,\frac{\varepsilon^S A}{d}$$

(*) Il est sous-entendu que c_P désigne la rigidité du matériau piézoélectrique à induction D constante.

proportionnelle au carré du coefficient de couplage électromécanique $K^2 = \frac{e^2}{\varepsilon^S c_P}$ et à la capacité $C_0 = \frac{\varepsilon^S A}{d}$ du transducteur rigidement lié :

$$\mathscr{P} = \frac{2K^2 C_0 c_P}{dZM_0} v_0^2$$

ayant défini le facteur de forme M_0 par

$$M_0 = |m_0|^2 = \frac{\cos^2 \varphi + \left(\frac{Z_P}{Z}\right)^2 \sin^2 \varphi}{\sin^4 \frac{\varphi}{2}}. \qquad (7.17)$$

Introduisons la fréquence de résonance f_P du cristal piézoélectrique ur laquelle l'épaisseur d est égale à une demi-longueur d'onde :

$$f_P = \frac{V_P}{2d}.$$

omme $c_P = Z_P V_P$ la puissance élastique s'écrit :

$$\mathscr{P} = 4K^2 C_0 f_P \frac{Z_P}{ZM_0} v_0^2. \qquad (7.18)$$

ans cette expression, seul le facteur de forme $M_0(\varphi)$ dépend de la fré- uence par l'intermédiaire de l'angle

$$\varphi = k_P d = \pi \frac{f}{f_P}$$

'après 7. 17 :

$$M_0\left(\frac{f}{f_P}\right) = \frac{\left(\cos \pi \frac{f}{f_P}\right)^2 + \left(\frac{Z_P}{Z} \sin \pi \frac{f}{f_P}\right)^2}{\left(\sin \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_P}\right)^4}. \qquad (7.19)$$

A tension électrique d'amplitude v_0 constante, le facteur de forme étermine le comportement du transducteur vis-à-vis de la fréquence du gnal électrique : la résistance de rayonnement R_A définie par

$$\mathscr{P} = \frac{v_0^2}{2R_A}$$

st proportionnelle à M_0 :

$$R_A = \frac{1}{8K^2 C_0 f_P} \frac{Z}{Z_P} M_0. \qquad (7.20)$$

L'influence du rapport des impédances élastiques ... en fréquence du transducteur est illustrée par les courbes de la figure 7. 4 qui représentent les variations de la quantité

$$10 \log \left(M_0 \frac{Z}{Z_P}\right) = 10 \log (8K^2 C_0 f_P R_A)$$

en fonction de la fréquence normalisée f/f_P pour différentes valeurs de Z_P/Z.

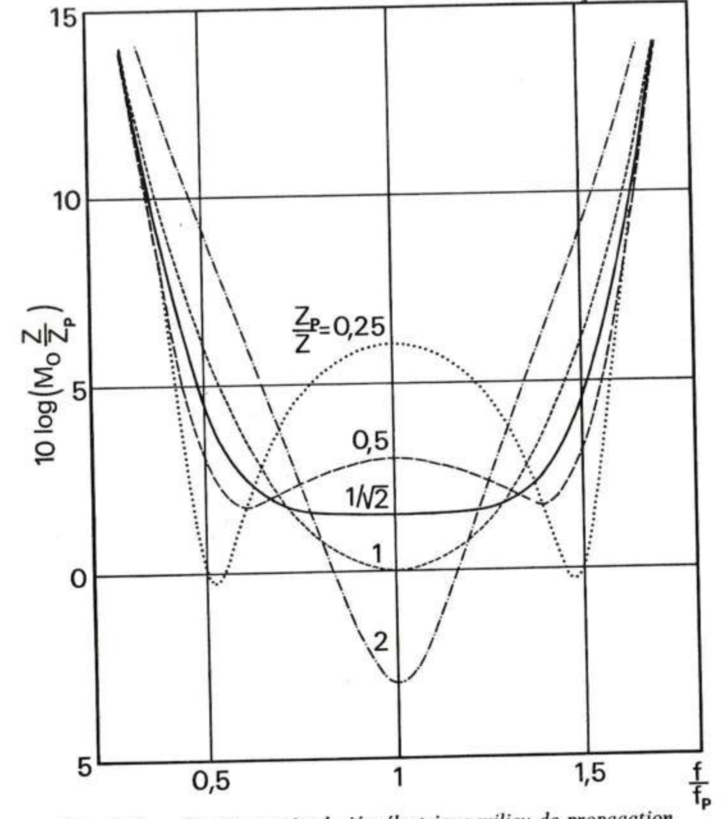


FIG. 7. 4. — *Structure cristal piézoélectrique-milieu de propagation.*
Si l'impédance élastique du milieu (Z) est inférieure à celle du cristal (Z_P), celui-ci vibre en $\lambda/2$ (ex. : $Z_P/Z = 2$). Dans le cas contraire, il vibre en $\lambda/4$ et $3\lambda/4$ ($Z_P/Z = 0{,}25$).

L'allure de ces courbes s'interprète comme suit : lorsque l'impédance du milieu de propagation est faible devant celle du cristal piézoélectrique, celui-ci, dont les deux faces sont pratiquement libres, vibre en demi-longueur d'onde (courbe pour $\frac{Z_P}{Z} = 2$). Il en résulte un minimum de la résistance de rayonnement pour $f = f_P$ correspondant à un maximum de la puissance élastique créée. Inversement lorsque Z est grand devant $Z_P \left(\frac{Z_P}{Z} = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{4}\right)$

le transducteur dont une des faces est libre et l'autre quasiment liée vibre en $\frac{\lambda_P}{4}$ et $3\,\frac{\lambda_P}{4}$. La résistance de rayonnement est minimale au voisinage de $f = 0{,}5\, f_P$ et $f = 1{,}5\, f_P$. La valeur critique $\frac{Z_P}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, au-dessus de laquelle il ne subsiste qu'un minimum, conduit à une réponse en fréquence très plate autour de la fréquence centrale f_P.

7. 1. 1. 4. Structure cristal piézoélectrique-électrode-milieu de propagation. — Les conditions aux limites se traduisent pour cette structure par les équations 7. 9 et 7. 10 et la relation $T_P(-d_2) = 0$. Leur développement conduit, en utilisant l'expression 7. 15 de T_P et en posant

$$\varphi_M = k_M d_1 \qquad \varphi_P = k_P d_2$$

au système

$$\begin{cases} a_M\, e^{-i\varphi_M} + b_M\, e^{i\varphi_M} - a\, e^{-ikd_1} = 0 \\ k_M c_M a_M\, e^{-i\varphi_M} - k'_M c_M b_M\, e^{i\varphi_M} - kca\, e^{-ikd_1} = 0 \\ a_P + b_P - a_M - b_M = 0 \\ k_P c_P a_P - k_P c_P b_P - k_M c_M a_M + k_M c_M b_M = \dfrac{iev_0}{d_2} \\ k_P c_P a_P\, e^{i\varphi_P} - k_P c_P b_P\, e^{-i\varphi_P} = \dfrac{iev_0}{d_2} \end{cases}$$

ou sous forme matricielle en mettant en évidence les impédances élastiques des trois milieux :

$$Z_P = \frac{k_P c_P}{\omega} \qquad Z_M = \frac{k_M c_M}{\omega} \qquad Z = \frac{kc}{\omega}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-i\varphi_M} & e^{i\varphi_M} & -1 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi_M} & -e^{i\varphi_M} & -\dfrac{Z}{Z_M} \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -\dfrac{Z_M}{Z_P} & \dfrac{Z_M}{Z_P} & 0 \\ e^{i\varphi_P} & -e^{-i\varphi_P} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_P \\ b_P \\ a_M \\ b_M \\ a\, e^{-ikd_1} \end{pmatrix} = \frac{iev_0}{\omega Z_P d_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'inconnue $a\, e^{-ikd_1}$ est donnée par la règle de Kramer :

$$a\, e^{-ikd_1} = \frac{iev_0}{\omega Z_P d_2}\, \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2iev_0}{\omega Z_P d_2 m}$$

en posant

$$m = 2\, \frac{\Delta}{\Delta_1}.$$

Le développement des déterminants Δ_1 et Δ conduit à l'expression :

$$m = \frac{\cos\varphi_P \cos\varphi_M - \dfrac{Z_P}{Z_M} \sin\varphi_P \sin\varphi_M + i\left(\dfrac{Z_M}{Z} \cos\varphi_P \sin\varphi_M + \dfrac{Z_P}{Z} \sin\varphi_P \cos\varphi_M\right)}{\sin^2 \dfrac{\varphi_P}{2}}. \tag{7. 21}$$

Après avoir introduit les fréquences de résonance f_M et f_P de l'électrode interne et de la couche piézoélectrique :

$$f_M = \frac{V_M}{2d_1} \qquad f_P = \frac{V_P}{2d_2}$$

la puissance élastique fournie à la ligne se déduit de la formule 7. 18 en remplaçant M_0 par le facteur de forme $M = |m|^2$:

$$\mathscr{P} = 4\, \frac{Z_P}{Z}\, \frac{K^2}{M}\, C_0 f_P v_0^2. \tag{7. 22}$$

La résistance de rayonnement

$$R_A = \frac{ZM}{8 Z_P K^2 C_0 f_P} \tag{7. 23}$$

est proportionnelle au facteur de forme M qui dépend de la fréquence par l'intermédiaire des angles

$$\varphi_P = k_P d_2 = \frac{\pi f}{f_P} \qquad \text{et} \qquad \varphi_M = \frac{\pi f}{f_M}$$

d'après 7. 21 :

$$M\left(\frac{f}{f_P}, \frac{f}{f_M}\right) = \frac{\left(\cos\frac{\pi f}{f_P} \cos\frac{\pi f}{f_M} - \frac{Z_P}{Z_M} \sin\frac{\pi f}{f_P} \sin\frac{\pi f}{f_M}\right)^2 + \left(\frac{Z_M}{Z} \cos\frac{\pi f}{f_P} \sin\frac{\pi f}{f_M} + \frac{Z_P}{Z} \sin\frac{\pi f}{f_P} \cos\frac{\pi f}{f_M}\right)^2}{\left(\sin\frac{\pi f}{2 f_P}\right)^4}. \tag{7. 24}$$

Il est facile de vérifier que cette expression redonne le facteur M_0 lorsque l'épaisseur de l'électrode s'annule ($f_M \to \infty$) :

$$M\left(\frac{f}{f_P}, 0\right) = M_0\left(\frac{f}{f_P}\right).$$

VARIATION DU FACTEUR DE FORME. — L'examen des symétries de la fonction de deux variables $M(f/f_P,\ f/f_M)$ montre qu'il suffit, en principe, de la calculer pour f/f_P et f/f_M variant de zéro à un. Sur les figures 7. 5 et 7. 7 nous représentons la variation de la quantité 10 log M sous forme de sections de la surface correspondante par des plans à M constant. Ces courbes de niveaux ont été tracées [1] pour deux structures typiques du

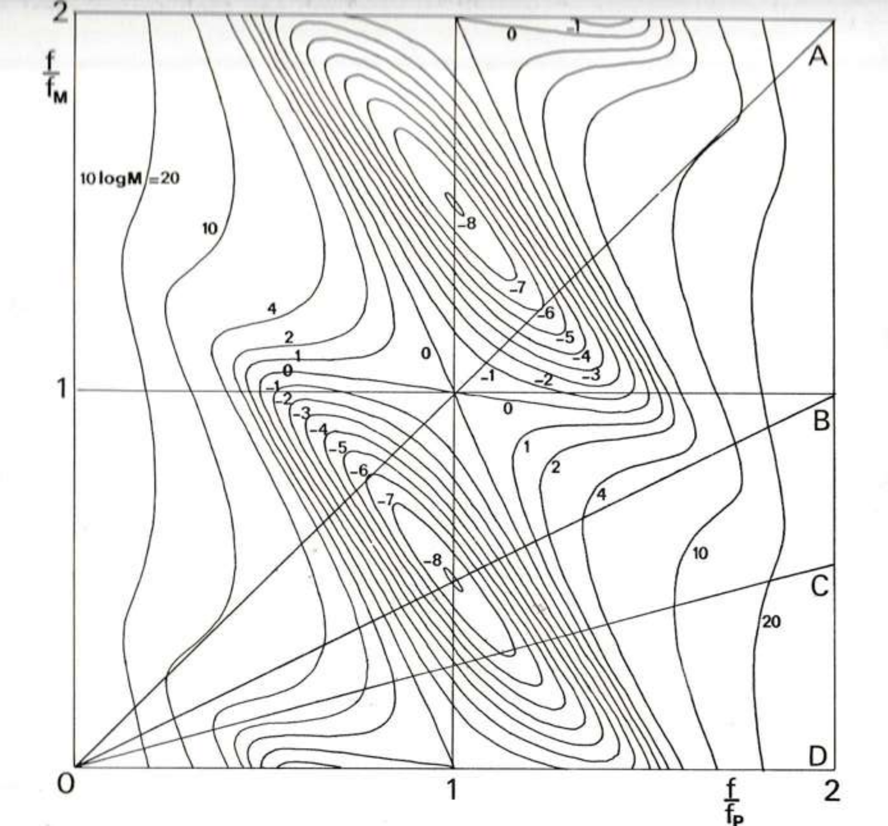


Fig. 7. 5. — *Courbes de niveaux du facteur de forme M de la structure CdS-Al-Al$_2$O$_3$ pour le mode longitudinal.* Un transducteur tel que $f_P/f_M = 0{,}25$ est représenté par un plan vertical de trace OC.

point de vue des impédances élastiques. Elles comprennent soit une électrode d'aluminium, soit une électrode d'or entre une couche de sulfure de cadmium et le cristal de corindon (milieu de propagation). L'axe d'ordre six du sulfure de cadmium est parallèle au champ électrique si bien que seule l'onde longitudinale est excitée; elle se propage dans le corindon le long de l'axe ternaire. Le modèle unidimensionnel est alors valable.

Le comportement d'un transducteur donné est représenté par une section de la surface $M(f/f_P, f/f_M)$ par un plan vertical contenant l'axe M puisque le rapport $\dfrac{f/f_M}{f/f_P} = \dfrac{f_P}{f_M}$ a une valeur constante déterminée par les épaisseurs des couches et les vitesses de propagation. Les droites A, B, C, D sur les figures 7. 5 et 7. 7 sont les traces de tels plans. La réponse en fréquence est portée sur la figure 7. 6 pour la séquence CdS-Al-Al$_2$O$_3$ et sur la figure 7. 8 pour la séquence CdS-Au-Al$_2$O$_3$. Il est possible d'expliquer la forme de ces courbes par le raisonnement physique suivant : l'impédance élastique du sulfure de cadmium ($Z_P = 21{,}5 \cdot 10^6$ kg/m^2/s) est nettement

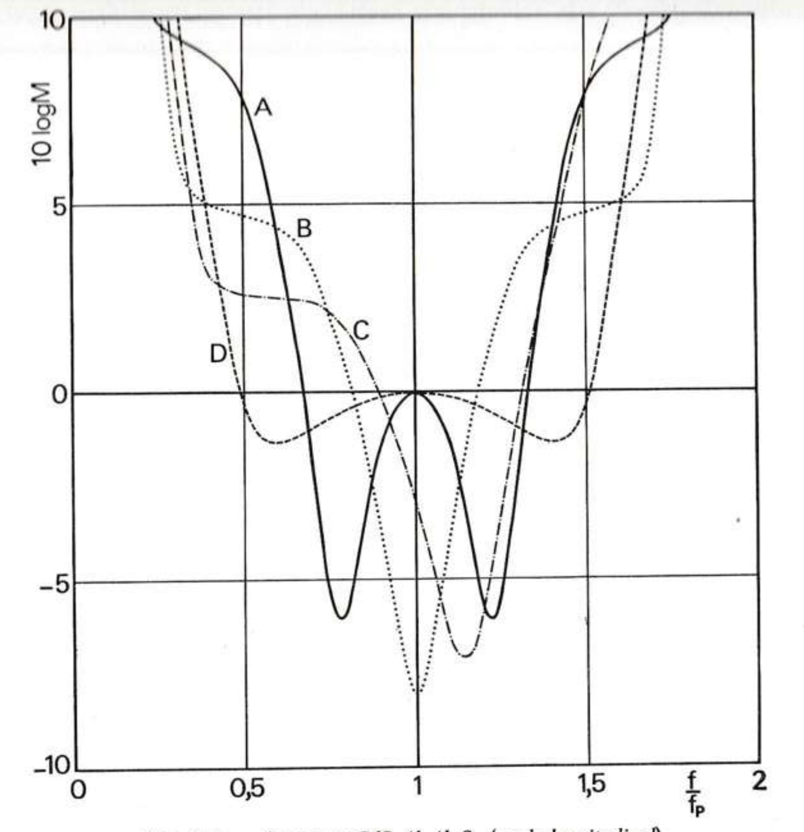


Fig. 7. 6. — *Structure CdS-Al-Al$_2$O$_3$ (mode longitudinal).*
La réponse en fréquence présente une ou deux vallées suivant l'épaisseur de l'électrode d'aluminium.

inférieure à celle du corindon ($Z = 44{,}5 \cdot 10^6$ kg/m^2/s). En conséquence, pour une épaisseur nulle de métal (courbe D), le transducteur dont une des faces est libre et l'autre est quasiment liée, vibre en $\lambda/4$ ($f/f_P = 0{,}5$) et en $3\lambda/4$ ($f/f_P = 1{,}5$). Le facteur de forme M présente deux vallées autour de ces points correspondant à deux maxima de la puissance élastique. L'adjonction du film d'or d'impédance (*) $Z_M = 64 \cdot 10^6$ kg/m^2/s ne peut, quelle que soit son épaisseur, qu'accentuer la profondeur des deux vallées (courbes A et B de la figure 7. 8). Par contre la couche d'aluminium d'impédance élastique (*) $Z_M = 17{,}5 \cdot 10^6$ kg/m^2/s, interposée entre le sulfure de cadmium et le corindon, joue, pour une épaisseur convenable égale à $\lambda/4$, le rôle de transformateur d'impédance. Elle ramène l'impédance sur la face interne du

(*) La couche métallique déposée sur le cristal de corindon n'est pas monocristalline, toutefois l'axe ternaire du corindon favorise la croissance suivant la direction [111]. La valeur de l'impédance élastique est intermédiaire entre celles propres aux directions [100] et [111].

transducteur ($x = 0$) à la valeur (voir exercice 7. 1) :

$$Z_T(x = 0) = \frac{Z_M^2}{Z} = 6{,}9 \cdot 10^6$$

si bien que cette face est quasiment libre. Le transducteur vibre en $\lambda/2$ ($f = f_P$) et la réponse en fréquence ne comporte plus qu'une seule vallée (courbes B et C de la figure 7. 6). L'évolution du facteur de forme avec réduction de deux vallées à une seule est facile à suivre en faisant pivoter autour de l'origine la trace du plan caractéristique.

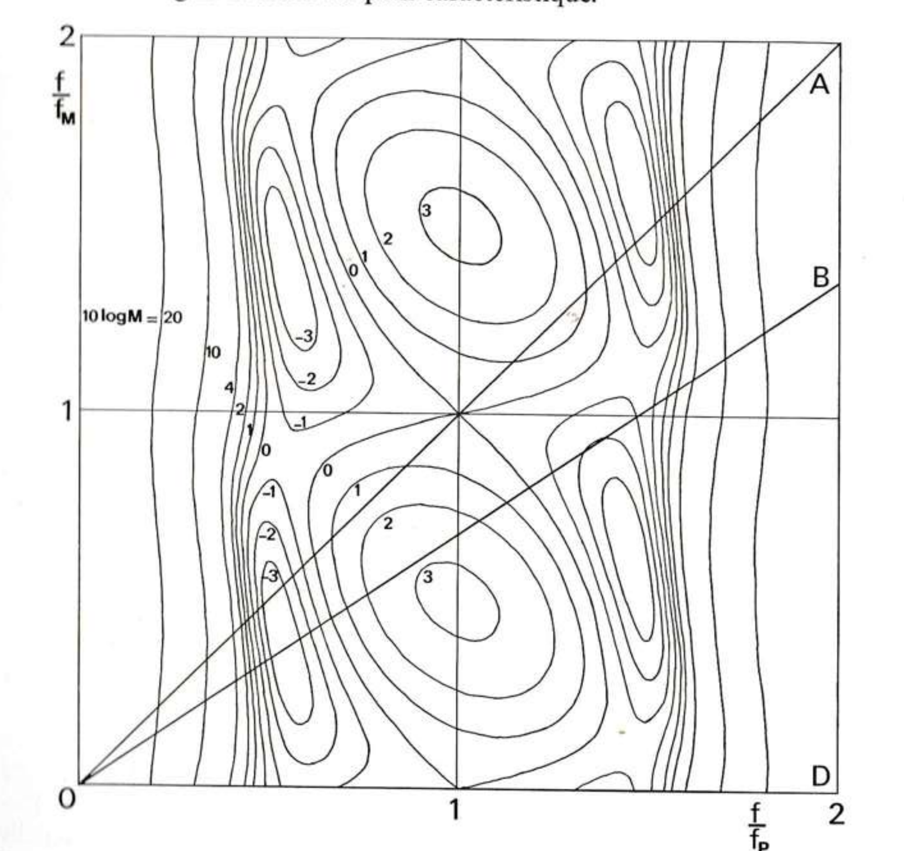


FIG. 7. 7. — *Courbes de niveaux du facteur de forme de la structure CdS-Au-Al_2O_3 pour le mode longitudinal.* Un transducteur de rapport f_P/f_M donné est représenté par un plan vertical de trace telle que OB.

Le facteur de forme, pour la structure ZnO-Pt-Al_2O_3, représenté sur la figure 7. 9 est semblable à celui de la structure CdS-Au-Al_2O_3 car la succession des impédances élastiques est analogue :

$$Z_{ZnO} = 35 \cdot 10^6 \cdot \text{kg/m}^2\text{/s} \qquad Z_{Pt} = 87 \cdot 10^6 \qquad Z_{Al_2O_3} = 44{,}5 \cdot 10^6.$$

Dans ce qui précède nous n'avons pas tenu compte de l'influence de l'électrode extérieure qui est en général constituée d'une couche d'aluminium ou d'argent. Tant que son épaisseur reste faible devant celle de la couche piézoélectrique (inférieure à 10 %) elle a pour effet de décaler légèrement vers les basses fréquences les courbes de variation du facteur de forme.

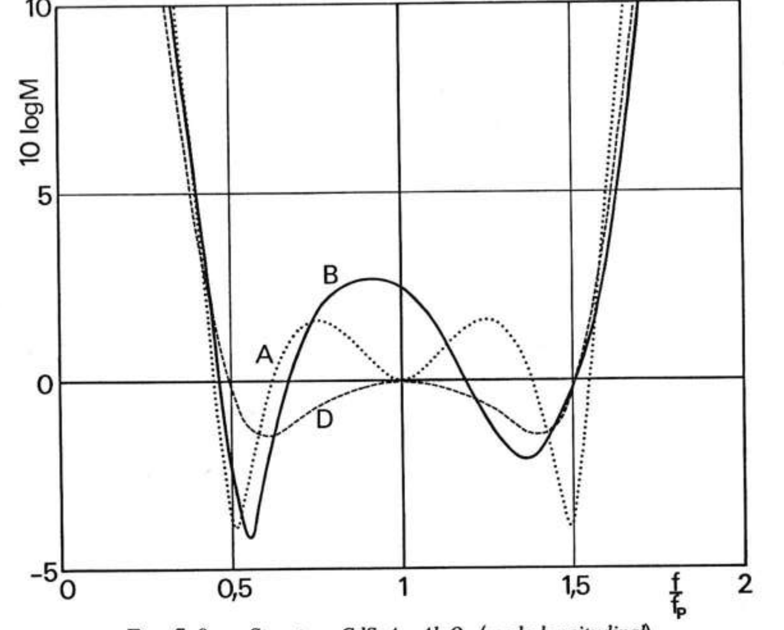


FIG. 7. 8. — *Structure CdS-Au-Al_2O_3 (mode longitudinal).* La réponse en fréquence présente toujours deux vallées.

ORDRE DE GRANDEUR. — Pour la dernière structure ZnO-Pt-Al_2O_3, à une fréquence $f_P = 1$ GHz, l'épaisseur de la couche d'oxyde de zinc ($V_P = 6\,330$ m/s) est :

$$d_2 = \frac{V_P}{2f_P} = 3{,}2\ \mu\text{m}$$

et la capacité statique d'un transducteur de section A = 1 mm² est égale à

$$C_0 = \frac{\varepsilon_{33}^S A}{d_2} = 26 \text{ pF}.$$

Étant donné la valeur du coefficient de couplage du mode longitudinal :

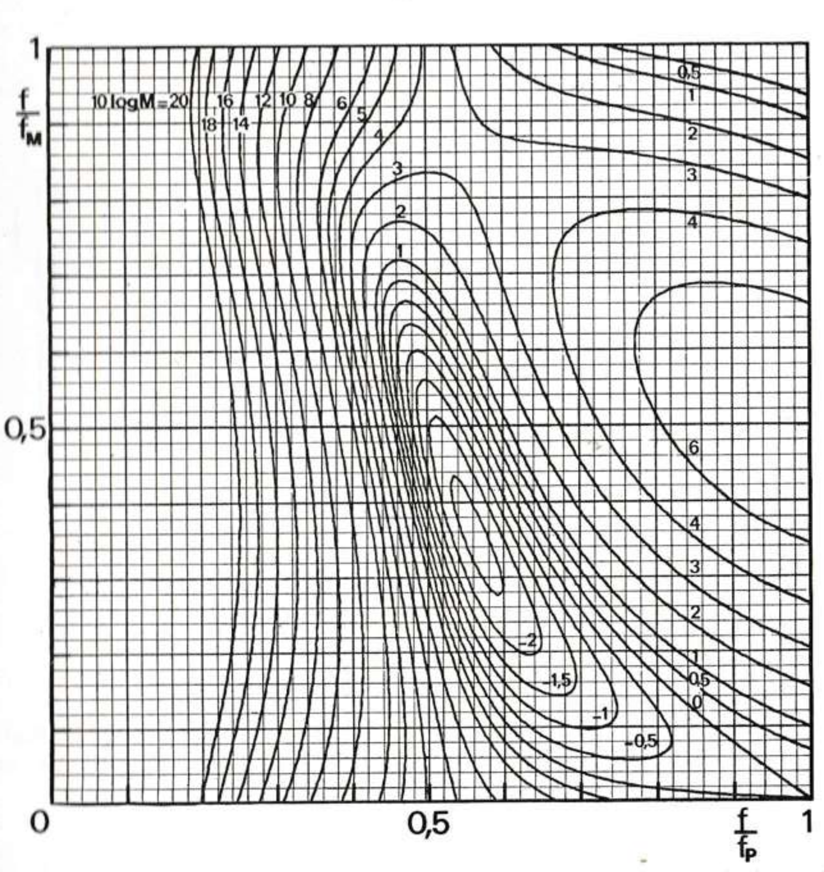
$$K^2 = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^E + e_{33}^2} = 0{,}073$$

la résistance de rayonnement vaut en ohms :

$$R_A = \frac{ZM}{8Z_P K^2 C_0 f_P} \simeq 84 \text{ M}.$$

Une tension d'amplitude $v_0 = 1$ V et de fréquence telle que M = 1 crée
e puissance élastique

$$P = \frac{v_0^2}{2R_A} \simeq 6 \text{ mW}.$$



. 7. 9. — *Courbes de niveaux de la structure ZnO-Pt-Al$_2$O$_3$ pour le mode longitudinal, f/f$_P$ et f/f$_M$ variant de 0 à 1.* Remarquer la similitude avec la figure 7. 7.

1. 1. 5. — Adaptation électrique. Perte de conversion. — Dans l'hypothèse le matériau piézoélectrique est un isolant et un diélectrique parfait, le seul urant électrique est le courant de déplacement dont la densité par unité de rface est

$$j = \frac{\partial D}{\partial t} = i\omega D.$$

ant donné l'expression 7. 14 de la tension électrique :

$$v_0 = \frac{d_2 D}{\varepsilon^S} - \frac{e}{\varepsilon^S}[u_P(0) - u_P(-d_2)]$$

l'impédance électrique du transducteur comprend deux termes

$$Z_e = \frac{v_0}{jA} = \frac{d_2}{i\omega\varepsilon^S A} - \frac{e}{i\omega\varepsilon^S DA}[u_P(0) - u_P(-d_2)].$$

Le premier n'est autre que l'impédance de la capacité statique $C_0 = \varepsilon^S A/d_2$. Le second terme conduit, dans le cas d'un matériau moyennement piézoélectrique ($K^2 \ll \pi$), à la résistance de rayonnement R_A qui représente la transformation de l'énergie électrique en énergie mécanique.

En pratique, il faut compléter ce schéma équivalent par une résistance R due à la dissipation de puissance électrique autrement que par génération d'ondes élastiques (fig. 7. 10). Ces pertes sont importantes dans le cas des transducteurs de haute fréquence pour les raisons suivantes :

— les matériaux piézoélectriques (CdS, ZnO) sont semi-conducteurs et non isolants;

— les pertes diélectriques sont élevées à ces fréquences supérieures à 1 GHz;

— la résistivité des couches métalliques n'est pas nulle;

— les différentes couches qui ne sont pas monocristallines atténuent les ondes élastiques. L'expérience montre que la résistance équivalente aux pertes R est plus petite que la résistance de rayonnement R_A.

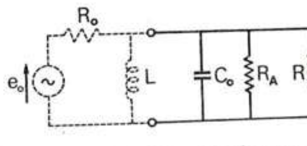


FIG. 7. 10. — *Schéma équivalent à un transducteur.* C_0 est la capacité statique, R_A est la résistance de rayon nement, variable avec la fréquence. La résistance R représente globalement les pertes d'origine électrique et élastique dans les couches.

La puissance électrique fournie au transducteur par un générateur de force électromotrice e_0 et de résistance interne R_0 est maximale lorsqu'il y a adaptation des impédances. La perte de conversion $\mathscr{T}$ du transducteur est, par définition, le rapport de cette puissance maximale disponible aux bornes du générateur

$$\mathscr{P}_d = \frac{e_0^2}{8R_0} = \frac{v_0^2}{2R_0}$$

à la puissance élastique créée dans le cristal $\mathscr{P} = \dfrac{v_0^2}{2R_A}$:

$$\mathscr{T} = \frac{\mathscr{P}_d}{\mathscr{P}} = \frac{R_A}{R_0}$$

soit, puisqu'il y a adaptation des impédances,

$$R_0 = \frac{R\,R_A}{R + R_A} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{T} = 1 + \frac{R_A}{R}.$$

Cette définition de la perte de conversion n'a de sens que si l'adaptation est réalisable dans la bande passante du transducteur, c'est-à-dire puisque R_A varie avec la fréquence, si R reste faible devant R_A. La capacité C_0

étant accordée à la fréquence centrale f_P avec une inductance L (fig. 7. 10) il faut que l'inverse du coefficient de surtension électrique Q du transducteur :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R_A C_0 \omega_P}\left(1 + \frac{R_A}{R}\right) \qquad (7.\ 25)$$

soit supérieur à la bande passante relative du facteur de forme M, qui est de l'ordre de 0,5 (fig. 7. 4, 6, 8). Comme le terme

$$\frac{1}{R_A C_0 \omega_P} = \frac{4Z_P}{\pi Z M} K^2 \simeq K^2 \qquad (7.\ 26)$$

est petit devant 1, cette condition est satisfaite puisque $R \ll R_A$. Le générateur est alors adapté à la résistance R et la perte de conversion, qui est élevée, est proportionnelle au facteur de forme M :

$$\mathcal{T} \simeq \frac{R_A}{R} = \frac{ZM}{8Z_P K^2 R C_0 f_P}. \qquad (7.\ 27)$$

7. 1. 2. — *Schéma équivalent*

Il est possible d'associer au modèle de la figure 7. 2 un circuit électromécanique [2] obtenu en juxtaposant les schémas équivalents aux différentes parties du transducteur, forces et vitesses jouant des rôles semblables aux tensions et intensités électriques (exercice 1. 3).

a) Un *milieu infini* de section A dans lequel se propage une seule onde progressive est représenté par son impédance élastique $\mathcal{Z} = \frac{ck}{\omega} A$, rapport de la force $F = -AT$ et de la vitesse de vibration $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$:

$$F = -Ac\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Ack}{\omega}\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{Z}\dot{u}.$$

b) Le schéma équivalent d'*une tranche d'épaisseur finie d* et de section A, délimitée par les plans $x = x_1$ et $x = x_2$ se déduit des relations entre les forces F_1, F_2 et les vitesses $\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$ sur les deux faces :

$$\dot{u}_1 = i\omega(a\,e^{-ikx_1} + b\,e^{ikx_1})$$

$$\dot{u}_2 = i\omega(a\,e^{-ikx_2} + b\,e^{ikx_2}).$$

En reportant les coefficients a et b tirés de ce système :

$$i\omega a = \frac{\dot{u}_1\,e^{ikx_2} - \dot{u}_2\,e^{ikx_1}}{2i\sin kd}$$

$$i\omega b = \frac{\dot{u}_2\,e^{-ikx_1} - \dot{u}_1\,e^{-ikx_2}}{2i\sin kd}$$

dans l'expression de la force analogue à 7. 6 :

$$F = ickA(a\,e^{-ikx} - b\,e^{ikx}) = \mathcal{Z}(i\omega a\,e^{-ikx} - i\omega b\,e^{ikx})$$

il vient, pour $x = x_1$

$$F_1 = \mathcal{Z}\left(\frac{\dot{u}_1}{i\,\mathrm{tg}\,kd} - \frac{\dot{u}_2}{i\sin kd}\right)$$

et pour $x = x_2$

$$F_2 = \mathcal{Z}\left(\frac{\dot{u}_1}{i\sin kd} - \frac{\dot{u}_2}{i\,\mathrm{tg}\,kd}\right)$$

soit, compte tenu de l'égalité

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,kd} = \frac{1}{\sin kd} - \mathrm{tg}\frac{kd}{2}$$

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{\mathcal{Z}}{i\sin kd}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + \left(i\mathcal{Z}\,\mathrm{tg}\dfrac{kd}{2}\right)\dot{u}_1 & (7.\ 28\,a) \\ F_2 = \dfrac{\mathcal{Z}}{i\sin kd}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - \left(i\mathcal{Z}\,\mathrm{tg}\dfrac{kd}{2}\right)\dot{u}_2. & (7.\ 28\,b) \end{cases}$$

Ces relations se retrouvent en appliquant les lois de Kirchhoff au circuit de la figure 7. 11 qui constitue le schéma équivalent de la tranche considérée.

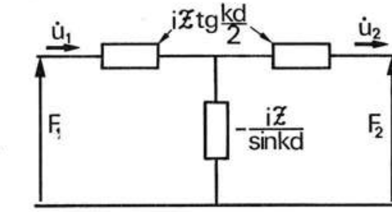


FIG. 7. 11. — *Schéma mécanique équivalent à une tranche de solide non piézoélectrique d'épaisseur d, d'impédance élastique* $\mathcal{Z}$.

c) Lorsque le matériau est *piézoélectrique* la contrainte T est donnée par la formule 7. 14 *bis* qui s'écrit en posant $h = e/\varepsilon^S$:

$$T = c^D\frac{\partial u}{\partial x} - hD.$$

Les résultats précédents s'appliquent à $T + hD$ au lieu de T. En plus comme la composante normale D de l'induction électrique est constante, il suffit d'ajouter le terme hDA aux seconds membres des expressions 7. 28 pour obtenir les forces $F_{\frac{1}{2}} = -AT_{\frac{1}{2}}$.

Le courant de déplacement $I = i\omega DA$ qui traverse la tranche de section A se calcule à partir de la tension électrique v appliquée aux faces

métallisées (fig. 7. 12) :

$$v = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{E}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{D}d}{\varepsilon^{\mathrm{S}}} - h(u_2 - u_1) \qquad (7.\ 29).$$

ou en introduisant les vitesses $\dot{u}_1$ et $\dot{u}_2$:

$$v = \frac{d}{i\omega\varepsilon^{\mathrm{S}}\mathrm{A}}\,\mathrm{I} - \frac{h}{i\omega}(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

soit

$$\mathrm{I} = i\omega \mathrm{C}_0 v - h\mathrm{C}_0(\dot{u}_1 - \dot{u}_2). \qquad (7.\ 30)$$

Rappelons que $\mathrm{C}_0 = \varepsilon^{\mathrm{S}}\mathrm{A}/d$ est la capacité du transducteur rigidement lié. Le terme supplémentaire $h\mathrm{DA} = h\mathrm{I}/i\omega$ peut être obtenu à l'aide d'un *transformateur électromécanique* dont le secondaire est « parcouru » par la vitesse $(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)$ et le primaire par le courant $h\mathrm{C}_0(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = i\omega\mathrm{C}_0 v - \mathrm{I}$ ce qui impose un rapport de transformation $\mathrm{N} = h\mathrm{C}_0$ (fig. 7. 12). En effet grâce à la capacité $-\mathrm{C}_0$ disposée en série dans le primaire, la force entre les bornes C et D vaut

$$f = h\mathrm{C}_0(v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}) = h\mathrm{C}_0\left[v - \frac{h\mathrm{C}_0(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)}{i\omega\mathrm{C}_0}\right]$$

soit d'après 7. 30 : $f = h\mathrm{I}/i\omega$.

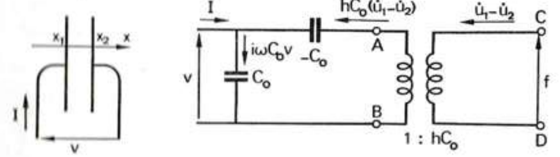


FIG. 7. 12. — *Transformateur électromécanique représentant la piézoélectricité.*

Le circuit équivalent qui comprend une entrée électrique et deux sorties mécaniques est dessiné sur la figure 7. 13.

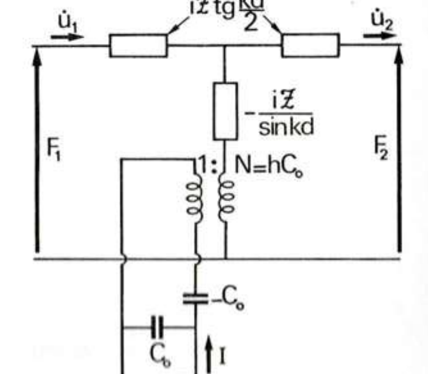


FIG. 7. 13. — *Schéma électromécanique équivalent à une tranche de matériau piézoélectrique d'épaisseur d, d'impédance élastique $\mathscr{Z}$.* Il comprend une entrée électrique et deux sorties mécaniques.

Le schéma équivalent du transducteur, représenté sur la figure 7. 14, s'obtient en associant en cascade les circuits relatifs à chacun des milieux constituant le transducteur. Les bornes correspondant à la face libre de l'électrode extérieure sont court-circuitées par l'impédance élastique très faible de l'air. La puissance élastique créée, se calcule à partir de l'amplitude F_0 de la force appliquée à l'interface avec le milieu de propagation :

$$\mathscr{P} = \frac{\mathrm{F}_0^2}{2\mathscr{Z}}.$$

FIG. 7. 14. — *Schéma équivalent complet du transducteur de la figure 7. 1.* L'extrémité gauche, en contact avec l'air, est en court-circuit, l'autre extrémité est chargée par l'impédance élastique $\mathscr{Z}$ du milieu de propagation.

d) A titre d'exemple traitons le cas du *résonateur* constitué d'une plaque piézoélectrique mince métallisée sur ses deux faces. En supposant l'épaisseur des électrodes faible, le schéma équivalent s'obtient en court-circuitant les deux sorties mécaniques du circuit de la figure 7. 13. Le secondaire du transformateur est fermé sur l'impédance mécanique

$$\mathscr{Z}_2 = \frac{i\mathscr{Z}}{2}\left(\mathrm{tg}\,\frac{kd}{2} - \frac{2}{\sin kd}\right) = -\frac{i\mathscr{Z}}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{kd}{2}}$$

qui est divisée par $\mathrm{N}^2 = h^2\mathrm{C}_0^2$ une fois ramenée au primaire. L'impédance électrique du résonateur est

$$\mathrm{Z}_e = \frac{v}{\mathrm{I}} = \frac{1}{i\mathrm{C}_0\omega}\left(\frac{\dfrac{\mathscr{Z}_2}{\mathrm{N}^2} - \dfrac{1}{i\mathrm{C}_0\omega}}{\dfrac{\mathscr{Z}_2}{\mathrm{N}^2}}\right)$$

soit

$$Z_e = \frac{1}{iC_0\omega}\left(1 - 2\frac{h^2C_0}{\omega\mathscr{Z}}\operatorname{tg}\frac{kd}{2}\right).$$

Comme $\mathscr{Z} = \frac{c}{V}A$, $C_0 = \frac{\varepsilon^S A}{d}$, $h = \frac{e}{\varepsilon^S}$:

$$\frac{h^2C_0}{\omega\mathscr{Z}} = \frac{e^2}{\varepsilon^S c}\frac{V}{\omega d} = K^2\frac{V}{\omega d}$$

il apparaît le coefficient de couplage électromécanique K :

$$Z_e = \frac{1}{iC_0\omega}\left[1 - K^2\frac{\operatorname{tg}(\omega d/2V)}{\omega d/2V}\right]. \tag{7. 31}$$

La figure 7. 15 représente les variations avec la fréquence du module de l'admittance $Y = 1/Z_e$ du résonateur. Celle-ci s'annule à chaque multiple impair de la fréquence d'antirésonance

$$f_a = \frac{V}{2d} \tag{7. 32}$$

et est infinie ($Z_e = 0$) pour les fréquences de résonance $f_r^{(n)}$ telles que

$$K^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi f_r^{(n)}}{V}d\right) = \frac{\pi f_r^{(n)}}{V}d$$

ou en introduisant f_a :

$$K^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{f_r^{(n)}}{f_a}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{f_r^{(n)}}{f_a}. \tag{7. 33}$$

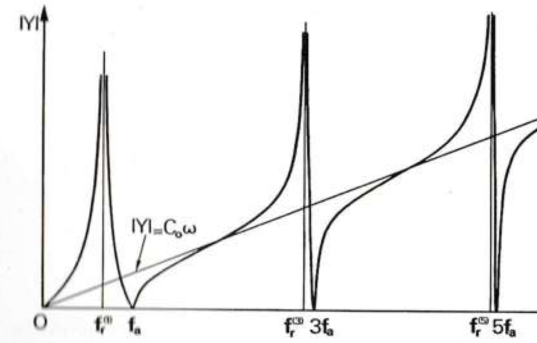


FIG. 7. 15. — *Variation, en fonction de la fréquence, du module de l'admittance d'un résonateur piézoélectrique.* La droite $|Y| = C_0\omega$ représente l'admittance de la capacité statique C_0. En réalité, aux fréquences de résonance, les pertes par propagation et par réflexion limitent l'admittance à une valeur finie. Il en est de même pour l'impédance aux fréquences d'antirésonance.

La mesure de la fréquence d'antirésonance f_a et de la première fréquence de résonance $f_r = f_r^{(1)}$ donne accès à la vitesse de propagation $V = 2f_a d$ et au coefficient de couplage du mode excité :

$$K^2 = \frac{\pi}{2}\frac{f_r}{f_a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{f_a - f_r}{f_a}\right). \tag{7. 34}$$

Excepté pour les matériaux à fort coefficient de couplage ($K > 0,3$) la différence $\frac{f_a - f_r}{f_a}$ est très petite :

$$K^2 \simeq \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{f_a - f_r}{f_a}. \tag{7. 35}$$

Dans le cas du quartz coupe AT (mode de cisaillement) le coefficient de couplage est égal à 0,07 et l'écart relatif entre les fréquences de résonance et d'antirésonance est seulement de 0,2 %. Cet écart décroît en $1/n^2$ pour les modes de vibration d'ordre n supérieur à 1, appelés « partiels » (exercice 7. 3). Au voisinage de la résonance le schéma équivalent du résonateur peut être simplifié (exercice 7. 4).

7. 1. 3. — *Coefficient de couplage électromécanique*

Au cours de l'étude de la propagation des ondes élastiques dans les matériaux piézoélectriques (paragr. 6. 2. 1. 2) il s'est introduit naturellement un facteur $K = \frac{e_{i\alpha}}{\sqrt{\varepsilon_{jk}^S c_{\beta\gamma}^E + e_{i\alpha}^2}}$ que nous avons appelé coefficient de couplage électromécanique. L'influence relative de la piézoélectricité sur la vitesse est de l'ordre de $K^2/2$. Ce coefficient est apparu à nouveau deux fois dans ce chapitre : la puissance élastique délivrée par un transducteur (formule 7. 22), l'écart relatif des fréquences de résonance et d'antirésonance sont proportionnels à son carré, tout au moins lorsque celui-ci est petit devant 1. C'est un facteur de mérite qui indique le couplage entre propriétés électriques et élastiques et renseigne sur l'aptitude des matériaux piézoélectriques à convertir l'énergie électrique en énergie élastique ou inversement. Son expression n'est simple que pour des directions liées aux éléments de symétrie (tabl. 6. 9). La formule 7. 34 peut servir de définition du coefficient de couplage dans la direction normale aux faces du résonateur.

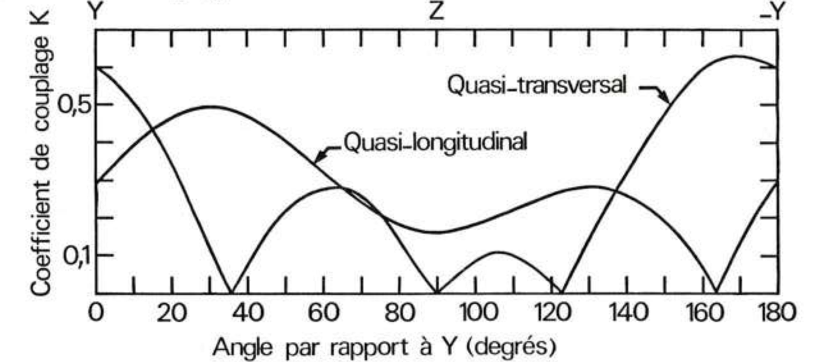


FIG. 7. 16. — *Coefficients de couplage électromécanique K_L et K_T en fonction de la direction dans le plan YZ de $LiNbO_3$.* (Figure 13 de la référence 3.)

Il est alors mesuré pratiquement à partir des fréquences de résonance et d'antirésonance des modes de vibration excités. Sa variation dans le plan de symétrie YZ de $LiNbO_3$ est tracée sur la figure 7. 16. Les deux courbes

rapportent aux modes quasi longitudinal et quasi transversal polarisés ns le plan YZ; l'autre mode n'est pas couplé. Les directions pour les-uelles un des coefficients de couplage s'annule sont particulièrement téressantes puisqu'un seul mode est alors engendré. Les plus remarquables nt la direction + 36° par rapport à l'axe Y qui présente un coefficient couplage quasi longitudinal élevé ($K_L = 0{,}49$), et celle à + 163° pour quelle le coefficient du mode quasi transversal est encore plus grand $_T = 0{,}62$). Les coupes correspondantes sont utilisées pour réaliser des ansducteurs jusqu'à des fréquences de quelques centaines de mégahertz. emarquons que l'intérêt d'un coefficient de couplage élevé pour des ansducteurs à faibles pertes ($R \gg R_A$) est de faciliter l'adaptation sur une rge bande de fréquences car le coefficient de surtension électrique est 'après les formules 7. 25 et 7. 26 de l'ordre de $1/K^2$.

Dans la formule de définition 7. 34, $f_a = V/2d$ et lorsque $K^2 \ll 1$, $\simeq V_0/2d$, V_0 étant la vitesse calculée en négligeant la piézoélectricité. Ceci xplique que l'allure des courbes de la figure 7. 16 se retrouve en examinant a figure 6. 7.

7. 1. 4. — *Technologie*

L'épaisseur du matériau piézoélectrique est toujours une fraction de la ongueur d'onde λ. En conséquence au plan de la technologie, deux sortes le transducteurs sont à distinguer suivant que la valeur de λ autorise u interdit la manipulation de monocristaux.

Si $\lambda/2$ est supérieur à 0,1 mm ($f = 25$ MHz si $V = 5\,000$ m/s) un mono-ristal (ou une céramique) piézoélectrique, métallisé au préalable de chaque ôté, peut être directement collé sur le milieu de propagation avec un liant elativement épais tel qu'une résine époxy. Pour $\lambda/2$ compris entre 10 t 100 μm, la technique consiste à souder, par diffusion métallique d'in-dium [4], un monocristal épais ($\geqslant 0{,}1$ mm) puis à l'amincir, par polissage lassique, jusqu'à la valeur désirée. Des épaisseurs de quelques microns nt été atteintes en laboratoire avec finition par bombardement ionique. La soudure à l'indium comprend une évaporation sous vide, sur la face de chacune des pièces, d'une couche d'accrochage de chrome (150 à 300 Å) puis d'or (1 500 Å) enfin d'une couche d'indium (2 500 Å). Une fois l'indium déposé (le vide ne doit plus être « cassé » pour éviter l'oxydation) les cristaux sont amenés au contact et soumis, à l'aide d'un vérin hydraulique, à une pression d'environ 200 kg/cm² pendant une vingtaine de minutes.

Si $\lambda/2$ est de l'ordre de 1 μm, le matériau piézoélectrique est déposé sous vide sur le substrat recouvert au préalable de la couche métallique constituant l'électrode interne. La fraction utile de la couche mince piézo-électrique ($\varnothing \simeq 1$ mm) est délimitée par les dimensions de l'électrode externe (déposée aussi sous vide). Il est difficile d'être maître de l'orientation cristallo-graphique de la couche mince piézoélectrique qui n'est pas monocristalline et dont les conditions de croissance sont tributaires de l'état du métal sous-jacent, lui-même fonction de la coupe du substrat. différence avec la première technique dans laquelle la coupe du transducteur monocristallin est tout à fait indépendante de celle du substrat, ce qui en conséquence, rend libre le choix du mode d'ondes élastiques (paragr. 7. 1. 3).

Les couches minces de sulfure de cadmium et d'oxyde de zinc ont été particulièrement étudiées, le substrat étant un monocristal d'alumine de forme parallélépipédique (ex. : $20 \times 6 \times 6$ mm³) ou cylindrique ($\varnothing \simeq 3$ mm). Pour créer des ondes longitudinales se propageant suivant l'axe ternaire A_3 du corindon, l'axe hexagonal A_6 des couches de CdS ou de ZnO doit être parallèle à A_3. Avec le CdS est souvent associée une électrode d'or; avec le ZnO une électrode de platine. Des sous-couches de titane ou de chrome améliorent l'adhérence du métal. Le chrome, d'impédance élastique ($41{,}2 \cdot 10^6$) très voisine de celle du corindon ($44{,}5 \cdot 10^6$) modifie peu la réponse en fréquence, quelle que soit son épaisseur. Les épaisseurs de ces différents métaux sont contrôlées, au cours du dépôt par la variation de fréquence d'un oscillateur dont le quartz est placé près du substrat.

Le sulfure de cadmium peut être déposé par évaporation directe [5. 6] ou suivant la méthode des trois températures [7] à partir de deux sources distinctes (S et Cd ou S et CdS). L'épaisseur de la couche transparente de CdS se mesure, en cours de croissance, par interférence de deux faisceaux optiques dont l'un se réfléchit sur la couche d'or, l'autre sur la couche de CdS. Des précautions sont à prendre : utilisation de pièges, rinçage à l'argon, étuvage prolongé pour diminuer la pression des gaz résiduels : vapeur d'huile, d'eau, azote. Les températures sont, par exemple, pour le substrat : 220 °C, le creuset de soufre : 100 °C, la source de sulfure de cadmium : 750 °C. La vitesse de dépôt est de l'ordre de 350 Å/mn. L'orientation cristallographique de la couche de CdS dépendant de l'inclinaison du substrat par rapport à l'axe des jets de vapeur [8] il est, en principe, possible de choisir une orientation pour exciter préférentiellement soit des ondes longitudinales soit des ondes transversales (axe A_6 incliné de 40° ou 90°). Les transducteurs, réalisés dans de bonnes conditions par cette méthode présentent des pertes en général supérieures à dix décibels; les bandes passantes ont les formes prévues par l'analyse.

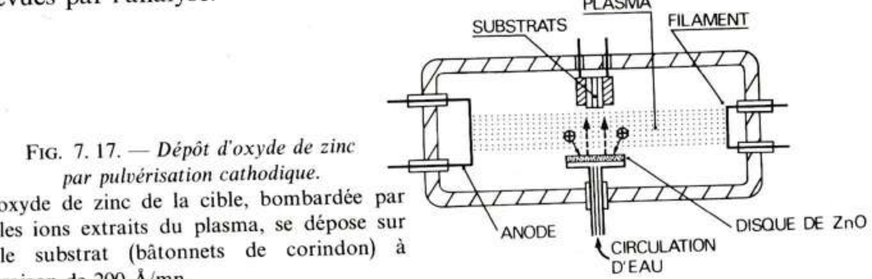


Fig. 7. 17. — *Dépôt d'oxyde de zinc par pulvérisation cathodique.*
L'oxyde de zinc de la cible, bombardée par les ions extraits du plasma, se dépose sur le substrat (bâtonnets de corindon) à raison de 200 Å/mn.

L'oxyde de zinc fournit à notre avis, des résultats meilleurs et surtout plus reproductibles lorsqu'il est déposé par pulvérisation cathodique [9] selon le montage triode et en régime continu par exemple. Cette méthode

consiste à bombarder un disque de ZnO (de poudre frittée) porté à un potentiel négatif (~ 2 000 V) par des ions extraits d'une colonne de plasma d'oxygène et d'argon (fig. 7. 17). Sur le substrat disposé en face de la cible, la couche de ZnO croît à raison de 200 Å/mn pour une intensité du courant de pulvérisation de 50 mA. L'axe A_6 du ZnO déposé est toujours perpendiculaire à la surface : seules des ondes longitudinales peuvent être créées. L'électrode externe est en général en aluminium.

La figure 7. 18 donne un exemple de bon résultat. Elle se rapporte à un transducteur ZnO-Pt-Al_2O_3. L'épaisseur d'oxyde de zinc est 2,6 µm, celle du platine 0,4 µm. La courbe de réponse tracée de 0,5 à 4,5 GHz met bien en évidence les résonances en $\lambda/4$, 3, 5 et 7 $\lambda/4$.

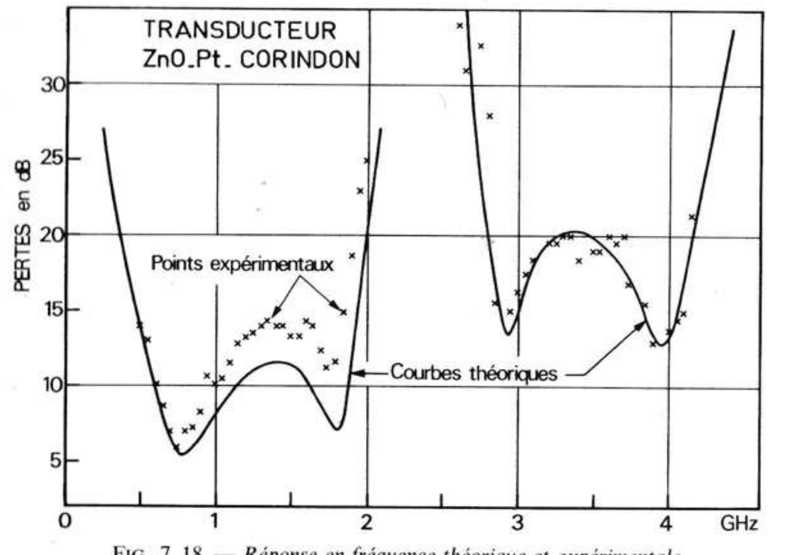


FIG. 7. 18. — *Réponse en fréquence théorique et expérimentale d'un transducteur à couche mince d'oxyde de zinc.*

7. 2. — TRANSDUCTEUR A ÉLECTRODES INTERDIGITÉES POUR ONDES DE SURFACE (RAYLEIGH)

Le terme ondes de surface s'applique en principe à toute déformation qui se propage en n'ébranlant qu'une faible épaisseur de matière s'évaluant en prenant pour unité la longueur d'onde. Sous ce terme se classent normalement les ondes de Rayleigh, les ondes de Bleustein-Gulyaev, les ondes de Love (voir paragr. 5. 3, 6. 2. 2. 3 et 5. 2. 4). Rappelons que les deux derniers types d'ondes ne sont que des ondes transversales retenues près de la surface par la piézoélectricité du milieu pour les ondes de Bleustein-Gulyaev, par l'inhomogénéité du milieu (couche mince sur un substrat) pour les ondes de Love. Les ondes de Rayleigh, qui nous intéressent ici, sont des ondes complexes se propageant à la surface de tout milieu. Elles se composent, dans les cas simples, d'un déplacement longitudinal et d'un déplacement transversal déphasés de $\pi/2$ qui s'annulent définitivement à une profondeur de l'ordre de deux longueurs d'onde. Toutefois cette complexité est compensée par un avantage important : les ondes de Rayleigh peuvent être excitées et détectées sur des substrats piézoélectriques par des transducteurs à doigts (*) de technologie simple et aptes à remplir d'autres fonctions que la conversion électromécanique. Avant d'étudier les propriétés de ce transducteur qui expliquent le développement des applications des ondes de Rayleigh en électronique, signalons que ces ondes peuvent être engendrées, avec plus ou moins de bonheur à partir d'ondes de volume, par réfraction rasante ou par diffraction sur un réseau d'obstacles (sillons, traits métalliques) régulièrement espacés. L'article de référence [10] contient une description détaillée des différents procédés utilisés.

7. 2. 1. — Principe de fonctionnement

Le transducteur à électrodes interdigitées comprend, comme l'indique la figure 7. 19, deux électrodes métalliques en forme de peigne déposées sur un substrat piézoélectrique. La tension électrique appliquée entre les deux

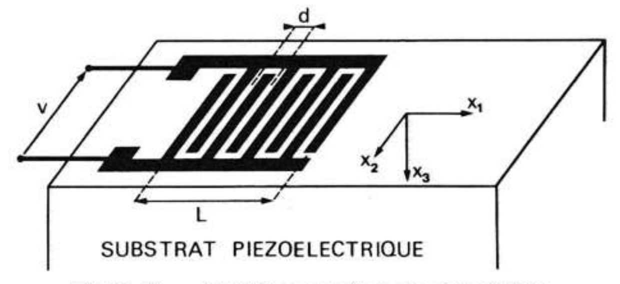


FIG. 7. 19. — *Transducteur à électrodes interdigitées.*
La tension électrique appliquée entre les électrodes, en forme de peigne, crée des contraintes à la surface du matériau.

électrodes crée un champ électrique qui engendre des compressions et des dilatations au voisinage de la surface donnant naissance à différents types d'ondes élastiques (voir paragr. 7. 2. 3). En ce qui concerne les ondes de Rayleigh émises perpendiculairement aux doigts des peignes, le transducteur se comporte comme une suite de sources ultrasonores. Lorsque la tension appliquée est sinusoïdale, les vibrations s'ajoutent de façon constructive seulement si la distance *d* séparant deux dents adjacentes est égale à une demi-longueur d'onde élastique. En effet toute contrainte produite à l'instant *t* par une paire de dents, pour une polarité donnée de la tension appliquée, parcourt à la vitesse V_R des ondes de Rayleigh la distance $\lambda/2$ pendant la demi-période T/2. A l'instant $t + T/2$ cette contrainte est arrivée

(*) Ces transducteurs sont aussi utilisés pour engendrer les ondes de Bleustein-Gulyaev et les ondes de Love mais ces ondes ont donné lieu jusqu'ici à moins d'applications car les premières exigent des conditions de symétrie très restrictives et les secondes nécessitent une couche mince homogène d'épaisseur constante dont la réalisation est souvent délicate.

sous la paire de dents voisine au moment où la tension électrique, qui a changé de signe, produit une contrainte de même phase; l'excitation élastique due à la seconde paire de dents s'ajoute à celle émise par la première paire.

La fréquence $f_0 = \dfrac{V_R}{2d}$ qui correspond à cet *effet cumulatif* est appelée *fréquence de synchronisme ou fréquence de résonance.* Si la fréquence s'écarte de cette valeur, l'interférence entre les signaux élastiques émis par les différentes paires de dents n'est plus totalement constructive et le signal résultant est moindre. Il apparaît ainsi que la bande passante d'un transducteur est d'autant plus faible qu'il comporte plus de doigts.

La fonction de transfert d'un transducteur à N doigts peut se déduire de sa réponse impulsionnelle. Une impulsion brève — devant le temps de transit des ondes élastiques entre deux doigts — appliquée aux électrodes excite simultanément les $N - 1$ sources ultrasonores. Comme le champ électrique s'inverse à chaque intervalle entre dents, le signal élastique émis est périodique. La période spatiale est égale au double de la distance d entre les axes de deux dents adjacentes. La durée Θ du signal est égale à la longueur active du transducteur $L = (N - 1)d$ divisée par la vitesse des ondes de Rayleigh :

$$\Theta = \frac{(N-1)d}{V_R} = \frac{(N-1)}{2f_0}. \tag{7. 36}$$

En assimilant intuitivement cette réponse impulsionnelle à une sinusoïde de fréquence $f_0 = V_R/2d$ et de durée Θ, la réponse en fréquence — égale à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle — apparaît comme une courbe en sin x/x (voir formule 1. 27), avec

$$x = \pi\Theta(f - f_0) = (N-1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{f - f_0}{f_0}.$$

La bande passante à trois décibels ($x = \pm\, 0{,}885\ \ \pi/2$) est ainsi inversement proportionnelle au nombre d'intervalles :

$$\frac{\Delta f}{f_0} \simeq \frac{1{,}77}{N-1}. \tag{7. 37}$$

En pratique, pour relever la réponse impulsionnelle d'un transducteur il faut transformer le train d'ondes élastiques émis en signal électrique à l'aide d'un transducteur récepteur, à électrodes interdigitées par exemple. Le champ électrique accompagnant l'onde élastique induit, lorsque celle-ci passe sous les électrodes, une différence de potentiel variable au cours du temps. La forme de ce signal dépend du nombre de doigts du récepteur. Examinons deux cas typiques :

a) Récepteur à une seule paire de doigts (fig. 7. 20 *a*). Comme la détection est localisée sur une bande étroite parallèle aux fronts d'ondes, le signal électrique reproduit fidèlement le signal élastique au fur et à mesure qu'il défile sous le récepteur.

b) Récepteur identique à l'émetteur (fig. 7. 20 *b*). L'amplitude de la tension électrique augmente à partir de l'instant $\tau = l/V_R$ où le front avant du train d'ondes élastiques atteint le premier intervalle interdigital du récepteur; elle passe par un maximum à l'instant $\tau + \Theta$ lorsqu'il y a excitation simultanée de tous les récepteurs ultrasonores, puis décroît. La réponse impulsionnelle d'enveloppe triangulaire et de durée 2Θ est la fonction d'autocorrélation de la réponse impulsionnelle d'un des transducteurs. La fonction de transfert de la ligne à deux transducteurs identiques est donc (exercice 1. 9) une courbe en $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ de bande passante à 3 dB

$$\frac{\Delta f}{f_0} \simeq \frac{1{,}27}{N-1}. \tag{7. 38}$$

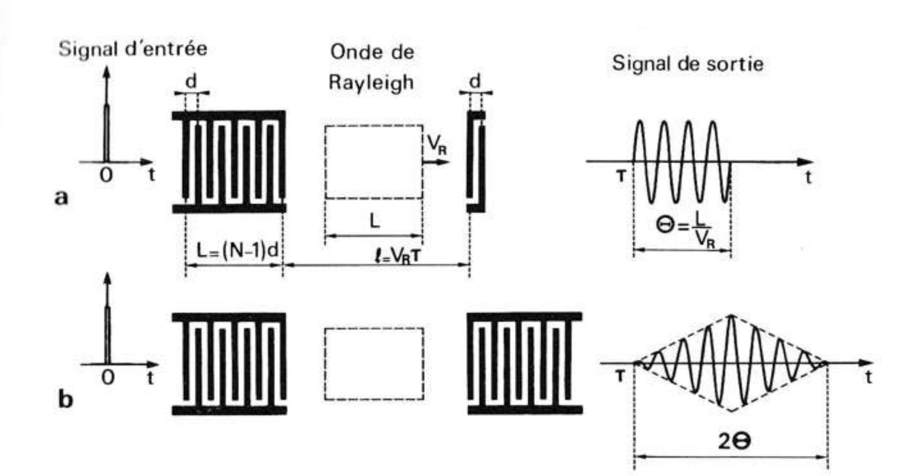


FIG. 7. 20. — *Réponse impulsionnelle d'une ligne à deux transducteurs à peignes.*
a) Le récepteur a seulement deux doigts;
b) le récepteur est identique à l'émetteur.

La figure 7. 21 montre la réponse impulsionnelle d'une ligne munie de deux transducteurs identiques de 60 dents chacun de fréquence centrale $f_0 = 17$ MHz réalisée sur quartz (coupe Y-propagation suivant X). La forme en losange de l'enveloppe et sa durée $2\Theta = 3{,}5$ µs confirment que la fonction de transfert de chaque transducteur est en $\dfrac{\sin x}{x}$ $\left(\Theta = \dfrac{L}{V_R} = \dfrac{N-1}{2f_0} = 1{,}74\ \mu s\right)$.

Cette méthode intuitive n'est pas tout à fait exacte, car, si le signal élastique émis, en réponse à une impulsion brève, a bien une périodicité et une durée imposées par le transducteur émetteur, ses variations ne sont pas nécessairement sinusoïdales. La fonction de transfert se compose donc de courbes en (sin x)/x de fréquences centrales f_0, $3f_0$, $5f_0$,... De plus il a été admis que le transducteur émettait des ondes de Rayleigh; ceci suppose que les déformations constituant l'onde de Rayleigh sont effectivement couplées aux composantes du champ électrique par les constantes

piézoélectriques du matériau. L'analyse plus approfondie de la génération d'ondes élastiques par un transducteur à peignes imbriqués nécessite en premier lieu la connaissance de la distribution du champ électrique. Prévenons le lecteur que cette analyse oblige à développer des calculs un peu longs. S'il admet que le transducteur à peignes émet bien des ondes de Rayleigh il peut directement aborder le paragraphe 7. 2. 4.

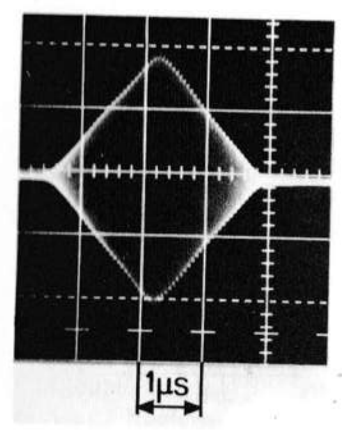


FIG. 7. 21. — *Réponse impulsionnelle d'une ligne à deux transducteurs identiques de 60 dents et de fréquence centrale 17 MHz.*

7. 2. 2. — *Distribution du champ électrique*

La figure 7. 22 indique la géométrie du transducteur et la disposition des axes de référence. Les doigts des peignes sont suffisamment longs pour qu'aucune grandeur ne dépende de la coordonnée x_2; l'épaisseur de la couche métallique est faible devant la distance *d*. Pour simplifier les calculs nous supposons le *milieu isotrope dans le plan de la surface libre* : cristal de la classe 6*mm* ou céramique piézoélectrique dont l'axe de symétrie est porté par l'axe Ox_3 dirigé vers le cœur du matériau. La tension appliquée aux électrodes est sinusoïdale : $v = v_0\,e^{i\omega t}$. Dans le cadre de l'approximation quasi statique précisée au paragraphe 6. 2, le champ électrique dérive d'un potentiel

$$\Phi(x_i, t) = \Phi(x_i)\,e^{i\omega t}$$

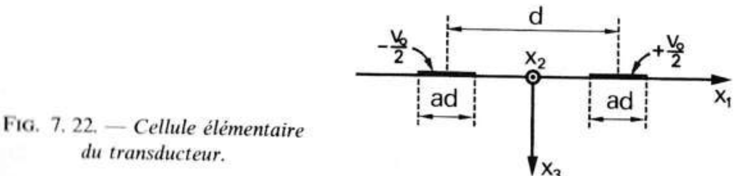


FIG. 7. 22. — *Cellule élémentaire du transducteur.*

L'induction D_i satisfait à l'équation de Poisson : $\dfrac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0$ pour un milieu isolant. Lorsque *le coefficient de couplage électromécanique du cristal est faible*, il est justifié de négliger l'induction due aux ondes élastiques engendrées. L'équation 6. 15*b* se simplifie :

$$D_i = \varepsilon_{ij}^S E_j = -\,\varepsilon_{ij}^S \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

et le potentiel Φ vérifie alors l'équation de Laplace :

$$\varepsilon_{ij}^S \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

qui s'écrit comme le matériau est transversalement isotrope et $\dfrac{\partial}{\partial x_2} = 0$

$$\varepsilon_{11}^S \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{33}^S \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0. \qquad (7.\ 39)$$

L'alternance des électrodes impose, *pour un transducteur infini*

$$\Phi(x_1 + d, x_3) = -\,\Phi(x_1, x_3) \qquad \forall\, x_1, x_3 \qquad (7.\ 40)$$

et

$$\Phi(x_1 + 2d, x_3) = \Phi(x_1, x_3) \qquad \forall\, x_1, x_3.$$

Cherchons des solutions de la forme

$$\Phi(x_1, x_3) = f(x_1)\,g(x_3)$$

pour lesquelles l'équation 7. 39 devient

$$\frac{f''}{f} = -\,\frac{\varepsilon_{33}^S}{\varepsilon_{11}^S}\,\frac{g''}{g} = -\,\chi^2$$

χ étant une constante réelle car f doit être une fonction périodique de x_1. Les solutions sont

$$f = F \sin \chi(x_1 + \delta) \qquad (7.\ 41)$$

et

$$g = G\,e^{-r\chi x_3} \qquad \text{avec } \chi > 0 \quad \text{et} \quad r = \left(\frac{\varepsilon_{11}^S}{\varepsilon_{33}^S}\right)^{1/2} \qquad (7.\ 42)$$

puisque le potentiel doit décroître dans le matériau. La condition de symétrie 7. 40 qui s'écrit :

$$f(x_1 + d) + f(x_1) = 0$$

soit

$$2F \sin\left[\chi(x_1 + \delta) + \frac{\chi d}{2}\right] \cos \frac{\chi d}{2} = 0$$

fixe les valeurs permises pour χ :

$$\chi_m = (2m + 1)\,\frac{\pi}{d} \qquad m = 0, 1, 2... \qquad (7.\ 43)$$

La solution générale est une combinaison linéaire *d'harmoniques impairs* de la période spatiale $2d$:

$$\Phi(x_1, x_3) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m}{\chi_m} e^{-r\chi_m x_3} \sin \chi_m(x_1 + \delta_m) \qquad x_3 > 0 \qquad (7.44)$$

en prenant $G_m = -1/\chi_m$.

Le potentiel électrique dans le vide ($x_3 < 0$) où $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_0$, qui s'annule pour $x_3 = -\infty$, se met sous une forme semblable avec $r = -1$ et les mêmes coefficients F_m et δ_m en raison de la continuité de Φ pour $x_3 = 0$. Ces constantes sont déterminées par les conditions aux limites électriques sur la surface libre. La composante tangentielle du champ électrique

$$E_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m e^{-r\chi_m x_3} \cos \chi_m(x_1 + \delta_m) \qquad (7.45)$$

doit être nulle à l'interface avec les électrodes métalliques :

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos \left[(2m+1)\frac{\pi}{d}(x_1 + \delta_m)\right] = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{d}{2}(1-a) < |x_1| < \frac{d}{2}. \qquad (7.46)$$

Comme les coefficients F_m et δ_m sont les mêmes dans le cristal et dans le vide, la continuité de la composante normale de l'induction entre les électrodes

$$D_3 = -\varepsilon_{33}^S \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = -(\varepsilon_{11}^S \varepsilon_{33}^S)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} F_m \sin \chi_m(x_1 + \delta_m) \qquad x_3 = 0_+$$

$$\text{et} \quad D_3 = \varepsilon_0 \sum_{m=0}^{\infty} F_m \sin \chi_m(x_1 + \delta_m) \qquad x_3 = 0_-$$

n'est possible que si celle-ci est nulle

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m \sin \left[(2m+1)\frac{\pi}{d}(x_1 + \delta_m)\right] = 0 \qquad \text{pour} \qquad |x_1| < \frac{d}{2}(1-a). \qquad (7.47)$$

Les équations 7. 46 et 7. 47 sont satisfaites lorsque δ_m est nul et F_m égal au polynôme de Legendre P_m [11] :

$$F_m = HP_m[\cos \pi(1-a)] = HP_m(-\cos \pi a). \qquad (7.48)$$

Dans l'expression du potentiel (7. 44)

$$\Phi(x_1, x_3) = -\frac{Hd}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m(-\cos \pi a)}{m + 1/2} e^{-r\chi_m x_3} \sin \chi_m x_1 \qquad (7.49)$$

la constante H dépend de la différence de potentiel v_0 appliquée aux électrodes

$$v_0 = 2\Phi\left[x_1 = \frac{d}{2}(1-a), 0\right]$$

soit

$$v_0 = -H\frac{d}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m(-\cos \pi a)}{m + 1/2} \sin \left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi(1-a)\right].$$

En introduisant la variable $s = \sin \frac{\pi}{2} a$, la somme est l'opposée de l'intégrale elliptique complète $K(s') = K'(s)$ du module complémentaire $s' = (1 - s^2)^{1/2}$ du module s [11] :

$$v_0 = \frac{Hd}{\pi} K'(s) \qquad (7.50)$$

d'où les amplitudes des harmoniques spatiaux du champ électrique déduites de 7. 48

$$\boxed{F_m = \frac{\pi v_0}{d} \frac{P_m(2s^2 - 1)}{K'(s)} = \frac{v_0}{d} \mathscr{F}_m}. \qquad (7.51)$$

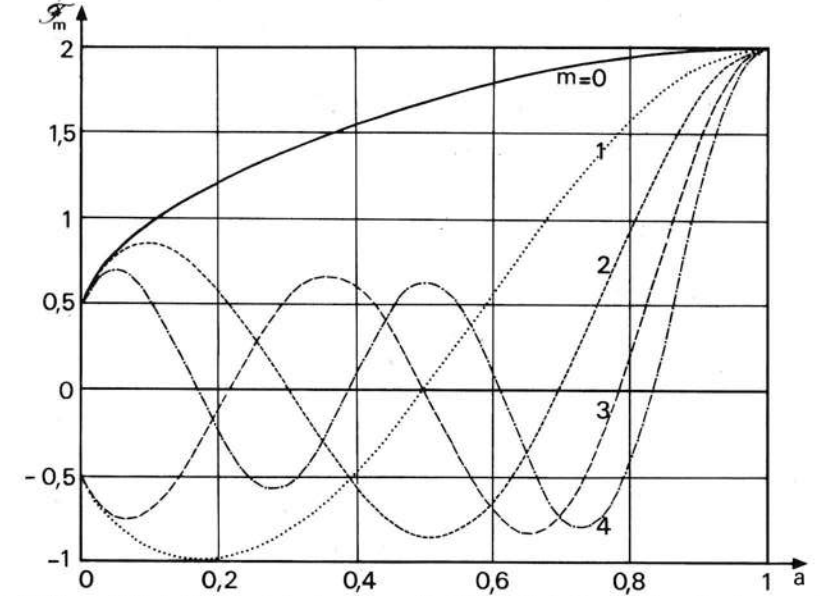


FIG. 7. 23. — *Distribution spatiale du champ électrique. Variation de l'amplitude des termes harmoniques* $\mathscr{F}_m$ *(m = 0... 4) du champ électrique en fonction de la largeur relative a des doigts des électrodes.* (Figure 2 de la référence 11.)

A cause des polynômes de Legendre, les coefficients $\mathscr{F}_m$ dépendent fortement — par l'intermédiaire du paramètre $s = \sin \frac{\pi}{2} a$ — du rapport a de la largeur de l'électrode et de la demi-période d. La figure 7. 23 montre

que les amplitudes de tous les harmoniques, excepté le premier peuvent s'annuler. En particulier, comme $P_{2p+1}(0) = 0$ *il n'y a pas d'harmoniques 3, 7,... 4p + 3, lorsque la largeur des doigts est égale à l'intervalle qui les sépare* ($a = 1/2$). L'expérience confirme ce résultat pour les matériaux à faible coefficient de couplage comme le montre la réponse impulsionnelle d'un transducteur tel que $a = 1/2$, réalisé sur quartz (fig. 7. 24). Ce n'est plus vrai pour les solides fortement piézoélectriques comme le niobate de lithium ou les céramiques.

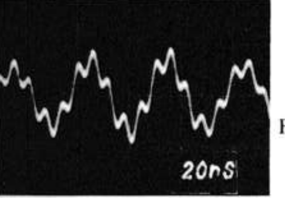


FIG. 7. 24. — *Réponse impulsionnelle d'un transducteur à peignes imbriqués tel que a = 1/2.* L'harmonique 5 existe, par contre il n'y a pas d'harmonique 3. Le substrat est du quartz α (YX).

Lorsque la *longueur L du transducteur est finie*, le potentiel électrique qui n'est plus périodique est défini par sa transformée de Fourier spatiale :

$$\hat{\Phi}(k, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_1, x_3)\, e^{ikx_1}\, dx_1 \qquad (7.\ 52)$$

telle que

$$\Phi(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(k, x_3)\, e^{-ikx_1}\, dk. \qquad (7.\ 53)$$

L'équation de Laplace 7. 39 conduit pour $\hat{\Phi}$ à

$$-\varepsilon_{11}^{S} k^2 \hat{\Phi} + \varepsilon_{33}^{S} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x_3^2} = 0$$

soit

$$\hat{\Phi}(k, x_3) = \hat{\Phi}_0(k)\, e^{-rkx_3} \qquad \text{avec} \quad rk > 0. \qquad (7.\ 54)$$

Pour calculer $\hat{\Phi}_0(k) = \hat{\Phi}(k, 0)$ nous supposons que le champ électrique est nul en dehors du transducteur ($|x_1| > L/2$) et égal pour $|x_1| < L/2$ à celui créé par le transducteur infini de même géométrie. Ces hypothèses conduisent, une fois de plus, à négliger le champ électrique accompagnant l'onde élastique et à supposer un nombre élevé de doigts. D'après le théorème de dérivation (paragr. 1. 3. 2) la transformée de Fourier de la composante $E_1 = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ est

$$\hat{E}_1(k, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(x_1, x_3)\, e^{ikx_1}\, dx_1 = ik\hat{\Phi}(k, x_3).$$

Étant donné l'expression 7. 45 du champ électrique ($\delta_m = 0$)

$$E_1(x_1, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos \chi_m x_1$$

il vient

$$\hat{\Phi}_0(k) = -\frac{i}{k}\sum_{m=0}^{\infty} F_m \int_{-L/2}^{L/2} \cos \chi_m x_1\, e^{ikx_1}\, dx_1$$

soit

$$\hat{\Phi}_0(k) = -\frac{i}{k}\sum_{m=0}^{\infty} F_m \left[\frac{\sin(k-\chi_m)L/2}{k-\chi_m} + \frac{\sin(k+\chi_m)L/2}{k+\chi_m}\right]. \qquad (7.\ 55)$$

7. 2. 3. — *Ondes élastiques émises*

Avant de résoudre l'équation du mouvement, montrons par un raisonnement qualitatif que les transducteurs à électrodes interdigitées sont aptes à engendrer des ondes de Rayleigh [12]. Compte tenu de la matrice piézoélectrique d'un solide transversalement isotrope, les composantes tangentielle E_1 et normale E_3 du champ électrique créent des contraintes

$$(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6) = (E_1, 0, E_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les contraintes $T_{11} = e_{31}E_3$ et $T_{13} = e_{15}E_1$ peuvent produire respectivement une onde longitudinale et une onde transversale se propageant suivant Ox_1. Les harmoniques de même rang des composantes E_1 et E_3 étant déphasées spatialement de $\pi/2$ dans la direction Ox_1, il en est de même des déplacements u_1 et u_3 qui peuvent donc constituer les composantes longitudinale et transversale d'une onde de Rayleigh émise dans la direction Ox_1. Les contraintes $T_{22} = e_{31}E_3$ et $T_{33} = e_{33}E_3$ donnent naissance à des phénomènes parasites.

7. 2. 3. 1. — Résolution de l'équation de propagation. — Pour mettre en évidence les différentes ondes émises il faut résoudre l'équation de propagation 6. 48 en présence de la distribution de potentiel imposée par la géométrie du transducteur :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl}^{E} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Celle-ci s'écrit dans le cas d'un milieu transversalement isotrope et

avec $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$:

$$\left\{\begin{aligned}&\left(c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho\omega^2\right)u_1 + (c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} = -(e_{15}+e_{31})\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_3}\\ &\left(c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho\omega^2\right)u_2 = 0 \qquad (7.\ 56\ a,\ b,\ c)\\ &(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3} + \left(c_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho\omega^2\right)u_3 = -e_{15}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} - e_{33}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}\end{aligned}\right.$$

Comme u_2 n'est relié ni au champ électrique, ni aux autres composantes u_1 et u_3, le déplacement des particules est contenu dans le plan sagittal x_1x_3. Afin d'éliminer la variable x_1 dans les deux autres équations différentielles couplées utilisons les transformées de Fourier $\hat{u}_i(k, x_3)$ des déplacements [13] définies par

$$u_i(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_i(k, x_3)\, e^{-ikx_1}\, dk \qquad (7.\ 57)$$

et celle du potentiel (relation 7. 53). En introduisant la vitesse de phase $V = \frac{\omega}{k}$ les équations 7. 56 *a* et *c* conduisent, avec $\frac{d\hat{\Phi}}{dx_3} = -rk\hat{\Phi}$, à

$$\left\{\begin{aligned}&\left[(\rho V^2 - c_{11})k^2 + c_{44}\frac{d^2}{dx_3^2}\right]\hat{u}_1 - ik(c_{13}+c_{44})\frac{d\hat{u}_3}{dx_3} = -irk^2(e_{15}+e_{31})\hat{\Phi}\\ &\qquad\qquad (7.\ 58\ a\ \text{et}\ b)\\ &-ik(c_{13}+c_{44})\frac{d\hat{u}_1}{dx_3} + \left[(\rho V^2 - c_{44})k^2 + c_{33}\frac{d^2}{dx_3^2}\right]\hat{u}_3 = k^2(e_{15} - r^2 e_{33})\hat{\Phi}\end{aligned}\right.$$

La solution de ce système différentiel est la somme de la solution générale du système sans second membre et d'une solution particulière des équations complètes. Cherchons une solution particulière de la forme

$$\hat{u}_i = b_i\hat{\Phi} \qquad (7.\ 59)$$

en remplaçant et en divisant par k^2, b_1 et b_3 sont déterminés par

$$\left\{\begin{aligned}&(\rho V^2 - c_{11} + r^2 c_{44})b_1 + ir(c_{13}+c_{44})b_3 = -ir(e_{15}+e_{31}) \qquad (7.\ 60\ a)\\ &ir(c_{13}+c_{44})b_1 + (\rho V^2 - c_{44} + r^2 c_{33})b_3 = (e_{15} - r^2 e_{33}). \qquad (7.\ 60\ b)\end{aligned}\right.$$

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme

$$\hat{u}_i = {}^\circ\hat{u}_i\, e^{-iqkx_3} \qquad (7.\ 61)$$

où les valeurs de q sont imposées par la condition de compatibilité des deux équations linéaires homogènes obtenues en portant cette expression dans le système 7. 58 sans second membre :

$$\left\{\begin{aligned}&(c_{11} - \rho V^2 + c_{44}q^2)\,{}^\circ\hat{u}_1 + q(c_{13}+c_{44})\,{}^\circ\hat{u}_3 = 0 \qquad (7.\ 62\ a)\\ &q(c_{13}+c_{44})\,{}^\circ\hat{u}_1 + (c_{44} - \rho V^2 + c_{33}q^2)\,{}^\circ\hat{u}_3 = 0 \qquad (7.\ 62\ b)\end{aligned}\right.$$

soit

$$c_{33}c_{44}q^4 + q^2[c_{33}(c_{11} - \rho V^2) + c_{44}(c_{44} - \rho V^2) - (c_{13}+c_{44})^2] + (c_{11} - \rho V^2)(c_{44} - \rho V^2) = 0. \qquad (7.\ 63)$$

Remarquons l'analogie de 7. 63 avec l'équation 5. 108 donnant les facteurs de décroissance des ondes de Rayleigh. Les différences proviennent du fait que le milieu est hexagonal au lieu de cubique. De même en prenant ${}^\circ\hat{u}_1 = 1$ l'amplitude $p = {}^\circ\hat{u}_3$ est donnée par une expression semblable à 5. 109 :

$$p = {}^\circ\hat{u}_3 = -\frac{c_{11} - \rho V^2 + c_{44}q^2}{(c_{13}+c_{44})q}. \qquad (7.\ 64)$$

Transformons l'équation 7. 63 en la multipliant par k^4 pour faire apparaître le produit qk :

$$c_{33}c_{44}(qk)^4 + (qk)^2[c_{33}c_{11}(k^2 - k_L^2) + c_{44}^2(k^2 - k_T^2) - (c_{13}+c_{44})^2k^2] + c_{11}c_{44}(k^2 - k_L^2)(k^2 - k_T^2) = 0 \qquad (7.\ 65)$$

$k_L = \frac{\omega}{V_L}$ et $k_T = \frac{\omega}{V_T}$ sont les nombres d'ondes des ondes longitudinale et transversale de vitesses respectives $V_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$ et $V_T = \sqrt{c_{44}/\rho}$ dans la direction Ox_1. Afin que le déplacement $\hat{u}_i$ reste fini seules sont acceptables les deux racines (q_1k) et (q_3k) à partie imaginaire négative, auxquelles correspondent deux amplitudes ${}^\circ\hat{u}_3^{(1)} = p_1$ et ${}^\circ\hat{u}_3^{(3)} = p_3$. Compte tenu de 7. 59 la solution générale est :

$$\left\{\begin{aligned}&\hat{u}_1 = A_1\, e^{-iq_1kx_3} + A_3\, e^{-iq_3kx_3} + b_1\hat{\Phi}_0\, e^{-rkx_3} \qquad (7.\ 66\ a)\\ &\hat{u}_3 = p_1A_1\, e^{-iq_1kx_3} + p_3A_3\, e^{-iq_3kx_3} + b_3\hat{\Phi}_0\, e^{-rkx_3}. \qquad (7.\ 66\ b)\end{aligned}\right.$$

Les coefficients A_1 et A_3 sont déterminés par les conditions aux limites sur la surface libre $x_3 = 0$:

$$T_{i3} = c_{i3kl}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + e_{ki3}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = 0 \quad \text{pour} \quad x_3 = 0 \quad \forall x_1. \qquad (7.\ 67)$$

Cette condition est automatiquement vérifiée pour

$$T_{23} = c_{2323}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + e_{223}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$$

car $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$ et $u_2 = 0$. Les deux autres égalités ($i = 1$ et $i = 3$) :

$$\begin{cases} c_{1313}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + e_{113}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 & (7.\ 68\ a) \\ c_{3333}\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} + c_{3311}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + e_{333}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0 & (7.\ 68\ b) \end{cases}$$

s'écrivent avec les transformées de Fourier $\hat{u}_1$, $\hat{u}_3$ et $\hat{\Phi}$:

$$\begin{cases} c_{44}\left(\dfrac{d\hat{u}_1}{dx_3} - ik\hat{u}_3\right) = ike_{15}\,\hat{\Phi} \\ c_{33}\dfrac{d\hat{u}_3}{dx_3} - ikc_{13}\hat{u}_1 = -\,e_{33}\dfrac{d\hat{\Phi}}{dx_3}. \end{cases}$$

Étant donné les expressions de $\hat{u}_1$, $\hat{u}_3$ et $\hat{\Phi}$ il vient, pour $x_3 = 0$:

$$\begin{cases} c_{44}(q_1 + p_1)A_1 + c_{44}(q_3 + p_3)A_3 = -\,(e_{15} + c_{44}b_3 - irc_{44}b_1)\hat{\Phi}_0 \\ \hfill (7.\ 69\ a \text{ et } b) \\ (c_{13} + c_{33}p_1q_1)A_1 + (c_{13} + c_{33}p_3q_3)A_3 = (ire_{33} + irc_{33}b_3 - c_{13}b_1)\hat{\Phi}_0. \end{cases}$$

Les inconnues A_1 et A_3 sont proportionnelles à $\hat{\Phi}_0$:

$$A_1 = \frac{B_1}{\Delta}\,\hat{\Phi}_0 \qquad \text{et} \qquad A_3 = \frac{B_3}{\Delta}\,\hat{\Phi}_0 \tag{7. 70}$$

où Δ est le déterminant des coefficients de A_1 et A_3 :

$$\Delta = (p_1 + q_1)(c_{13} + c_{33}p_3q_3) - (p_3 + q_3)(c_{13} + c_{33}p_1q_1). \tag{7. 71}$$

Remarquons qu'en remplaçant p_i et q_i par leurs expressions en fonction de V, l'équation $\Delta(V) = 0$, analogue à 5. 116, fournit comme racine la vitesse des ondes de Rayleigh V_R. En fonction du nombre d'onde, $\Delta(k)$ s'annule pour $k = k_R = \omega/V_R$. Pour obtenir les déplacements $u_i(x_1, x_3)$ nous utilisons la transformation de Fourier 7. 57 :

$$u_1(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{B_1}{\Delta}\,e^{-iq_1kx_3} + \frac{B_3}{\Delta}\,e^{-iq_3kx_3} + b_1\,e^{-rkx_3}\right)\hat{\Phi}_0\,e^{-ikx_1}\,dk$$

(7. 72 *a* et *b*)

$$u_3(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(p_1\frac{B_1}{\Delta}\,e^{-iq_1kx_3} + p_3\frac{B_3}{\Delta}\,e^{-iq_3kx_3} + b_3\,e^{-rkx_3}\right)\hat{\Phi}_0\,e^{-ikx_1}\,dk.$$

Les pôles de l'intégrant, c'est-à-dire les deux valeurs $k = \pm k_R$ qui annulent le déterminant Δ, sont situés sur le parcours d'intégration parce que nous avons négligé toute atténuation. Le pôle à partie réelle positive, correspondant à la propagation dans le sens des $x_1 > 0$, doit avoir une partie imaginaire négative ($k'_R = k_R - i\eta$ avec $\eta > 0$) puisque le facteur de propagation

$$e^{-ik_Rx_1}\,e^{-\eta x_1}$$

doit tendre vers zéro lorsque x_1 tend vers $+\infty$. De même l'atténuation de la propagation dans le sens des $x_1 < 0$ exige pour l'autre pôle $k''_R = -\,k_R + i\eta$. Nous pouvons ne pas tenir compte de l'atténuation à condition d'échancrer le parcours d'intégration afin de passer au-dessous du pôle $-\,k_R$ et au-dessus du pôle $+\,k_R$ (fig. 7. 25).

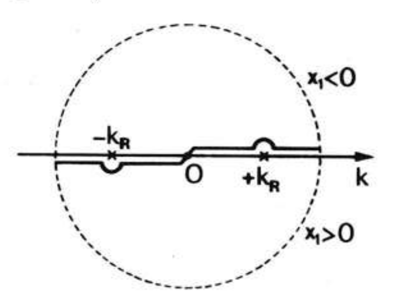


FIG. 7. 25. — *Contour d'intégration dans le cas d'un milieu sans atténuation.*

7. 2. 3. 2. — Ondes de volume. — Pour distinguer entre ondes de volume et ondes de surface émises, calculons les intégrales loin du transducteur ($R \to \infty$) dans une direction donnée θ (fig. 7. 26). Avec $x_1 = R\sin\theta$, $x_3 = R\cos\theta$ les deux premiers termes des déplacements (formules 7. 72 *a* et *b*) dérivent d'intégrales du type

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e(k)\exp\left[-\,iRk(q\cos\theta + \sin\theta)\right]dk \tag{7. 73}$$

en posant

$$e(k) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{B(k)\,\hat{\Phi}_0(k)}{\Delta(k)}. \tag{7. 74}$$

La contribution du dernier terme est nulle lorsque $R \to \infty$ car

$$e^{-rkx_3} = e^{-rRk\cos\theta} \to 0 \qquad \text{(rappelons que } rk > 0\text{)}.$$

En posant

$$\varphi(k) = k\left[q(k)\cos\theta + \sin\theta\right] \tag{7. 75}$$

l'intégrale I se met sous la forme

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(k)\,e^{-iR\varphi(k)}\,dk. \tag{7. 76}$$

Pour les grandes valeurs de R, l'exponentielle oscille très rapidement dans les régions où $\varphi(k)$ varie notablement en fonction de k. La valeur limite de l'intégrale à grande distance se calcule par la *méthode de la phase stationnaire* exposée au paragraphe 1. 3. 2, k jouant le rôle du temps t, θ celui de la pulsation ω et $\alpha = -R\varphi$. La formule 1. 24 fournit :

$$I(\theta) = \sqrt{\frac{2\pi}{R\,|\varphi''(k_0)|}}\; e^{-i\frac{\pi}{4}} e(k_0)\, e^{-iR\varphi(k_0)} \qquad (7.\ 77)$$

k_0 étant la valeur de la variable k qui rend la phase φ stationnaire :

$$\left(\frac{d\varphi}{dk}\right)_{k_0} = 0. \qquad (7.\ 78)$$

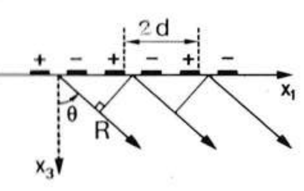


FIG. 7. 26. — *Loin du transducteur, les ondes de volume sont émises préférentiellement dans les directions où les interférences des différentes sources sont constructives.*

La décroissance de l'intégrale $I(\theta)$ en $R^{-1/2}$ exprime la conservation de l'énergie élastique. Loin du transducteur, les ondes créées sont pratiquement planes, leur vitesse de phase ne peut être que celle de l'onde quasi longitudinale (V_1) ou celle de l'onde quasi transversale (V_2). Ces vitesses dépendent de la direction de propagation :

$$V_{\substack{1\\2}} = f(n_1, n_2, n_3)$$

c'est-à-dire de l'angle θ par l'intermédiaire de $n_1 = \sin\theta$, $n_2 = 0$, $n_3 = \cos\theta$:

$$V_{\substack{1\\2}}(\theta) = f(\sin\theta, 0, \cos\theta).$$

Les formules explicites (5. 47 et 5. 48) ont été établies au paragraphe 5. 1. 6. 2*c*. Le paramètre $V = \omega/k$ introduit au paragraphe précédent est égal à

$$V(q) = f(1, 0, q)$$

puisque pour une onde plane

$$n_1 = \frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial x_1} = 1 \qquad n_2 = \frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{et} \quad n_3 = q.$$

Comme f est une fonction homogène de degré un (paragr. 5. 1. 5. 2) :

$$f(\sin\theta, 0, q\sin\theta) = V(q)\sin\theta$$

le premier membre de cette égalité représente $V_{\substack{1\\2}}(\theta)$ pour $q = q_0 = \cot g\,\theta$:

$$V_{\substack{1\\2}}(\theta) = V(q_0)\sin\theta.$$

L'identité entre la phase de I et celle d'une onde plane de vitesse V_1 ou V_2

$$\varphi(k_0) = \frac{\omega}{V_{\substack{1\\2}}(\theta)} = \frac{\omega}{V(q_0)\sin\theta} \qquad (7.\ 79)$$

qui s'écrit encore compte tenu de 7. 75

$$k_0[q(k_0)\cos\theta + \sin\theta] = \frac{k(q_0)}{\sin\theta}$$

est satisfaite lorsque

$$q(k_0) = q_0 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad k_0 = k(q_0) = \frac{\omega}{V(q_0)}$$

c'est-à-dire d'après 7. 79 pour les deux valeurs :

$$k_{01} = \frac{\omega}{V_1(\theta)}\sin\theta \qquad k_{02} = \frac{\omega}{V_2(\theta)}\sin\theta.$$

La variation, avec l'angle θ, de l'amplitude des deux ondes correspondantes :

$$U(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R\,|\varphi''(k_0)|}}\,\frac{B(k_0)}{\Delta(k_0)}\,\hat{\Phi}_0(k_0) \qquad (7.\ 80)$$

fournit le *diagramme de rayonnement du transducteur*. Si les peignes ont un nombre élevé de doigts ($L \gg d$), la fonction $\Phi_0(k)$ donnée par 7. 55 ne prend de valeur notable que pour k voisin de $\pm\chi_m$. Les ondes de volume sont émises principalement dans des directions θ_m

$$\frac{\omega}{V_{\substack{1\\2}}(\theta_m)}\sin\theta_m = \pm(2m+1)\frac{\pi}{d}$$

vérifiant la condition d'interférence constructive (fig. 7. 26)

$$2d\sin\theta_m = \pm(2m+1)\lambda_{\substack{1\\2}}(\theta_m)$$

réalisable en général si la fréquence est supérieure à $\dfrac{V(\pi/2)}{2d}$, où $V(\pi/2)$ est la vitesse de l'onde longitudinale, ou transversale, dans la direction Ox_1

7. 2. 3. 3. — Ondes de Rayleigh. — La contribution des pôles $-k_R$ et $+k_R$ de $e(k)$, qui se calcule par la méthode des résidus :

$$I_R = 2\pi i \text{ Rés } [e(k)]_{k_R}\, e^{-iR\varphi(k_R)} \qquad (7.\ 81)$$

doit être ajoutée à I. Étant donné l'expression 7. 75 de $\varphi(k)$, le facteur

$$e^{-iR\varphi(k)} = e^{-iRk_R q(k_R)\cos\theta}\, e^{-iRk_R\sin\theta}$$

tend vers zéro lorsque R augmente car les racines qk acceptables de l'équation 7. 65 ont une partie imaginaire négative. Cette contribution des pôles qui s'annule sauf lorsque $\theta = \pi/2$ ($\cos\theta = 0$), correspond à une onde de Rayleigh se propageant à la surface libre. Le calcul des déplacements u_1, u_3 se fait par la méthode des résidus en fermant le chemin d'intégration par un demi-cercle de rayon infini situé dans le demi-plan inférieur lorsque x_1 est positif et dans le demi-plan supérieur lorsque x_1 est négatif afin que le facteur e^{-ikx_1} soit nul sur ce demi-cercle (fig. 7. 25). Le pôle $+k_R$ correspond à une onde se propageant dans le sens des x_1 positifs, le pôle $-k_R$ à une onde émise dans la direction des x_1 négatifs. Comme b_1 et b_3 sont des fonctions analytiques de k, la troisième partie des intégrales 7. 72 *a* et *b* est nulle. Les deux autres intégrales se déduisent de I_R avec comme résidu :

$$\text{Rés}\,[e(k)]_{k_R} = \frac{1}{2\pi}\frac{B(k_R)\,\hat{\Phi}_0(k_R)}{\left[\dfrac{d\Delta}{dk}\right]_{k_R}} = -\frac{1}{2\pi}\frac{B(k_R)}{V_R\left(\dfrac{d\Delta}{dV}\right)_{V_R}}\,k_R\hat{\Phi}_0(k_R).$$

Les composantes du déplacement des particules sont

$$u_1^R(x_1, x_3, t) = -\frac{ik_R\hat{\Phi}_0(k_R)}{V_R\left[\dfrac{d\Delta}{dV}\right]}\left(B_1\,e^{-iq_1k_Rx_3} + B_3\,e^{-iq_3k_Rx_3}\right)e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V_R}\right)} \qquad (7.\ 82\ a)$$

$$u_3^R(x_1, x_3, t) = -\frac{ik_R\hat{\Phi}_0(k_R)}{V_R\left[\dfrac{d\Delta}{dV}\right]}\left(p_1B_1\,e^{-iq_1k_Rx_3} + p_3B_3\,e^{-iq_3k_Rx_3}\right)e^{i\omega\left(t-\frac{x_1}{V_R}\right)} \qquad (7.\ 82\ b)$$

l'indice R indique que toutes les grandeurs du second membre sont calculées pour $V = V_R$ ou $k = k_R = \omega/V_R$. Comme il s'agit de fonction de V^2 ou de k^2, *les ondes de Rayleigh émises dans les deux directions ont la même amplitude.* Celle-ci dépend de la fréquence par le terme $H = ik_R\hat{\Phi}_0(k_R)$ soit, compte tenu de 7. 55 :

$$H(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m\left[\frac{\sin\left(\dfrac{\omega}{V_R}-\chi_m\right)\dfrac{L}{2}}{\dfrac{\omega}{V_R}-\chi_m} + \frac{\sin\left(\dfrac{\omega}{V_R}+\chi_m\right)\dfrac{L}{2}}{\dfrac{\omega}{V_R}+\chi_m}\right]$$

En reportant la valeur de χ_m (formule 7. 43) :

$$\frac{\omega}{V_R} - \chi_m = \frac{2\pi}{V_R}\left[f - (2m+1)f_0\right]$$

il vient comme $F_m = \dfrac{v_0}{d}\mathscr{F}_m$:

$$H(f) = v_0\frac{V_R}{d}\sum_{m=0}^{\infty}\mathscr{F}_m\frac{\sin\dfrac{\pi L}{V_R}\left[f-(2m+1)f_0\right]}{2\pi\left[f-(2m+1)f_0\right]} + \mathscr{F}_m\frac{\sin\dfrac{\pi L}{V_R}\left[f+(2m+1)f_0\right]}{2\pi\left[f+(2m+1)f_0\right]}. \qquad (7.\ 83)$$

La réponse en fréquence du transducteur est formée de courbes en $(\sin x)/x$ *centrées sur les fréquences harmoniques impaires de la fréquence de synchronisme* f_0, *de bande passante constante et d'amplitude proportionnelle aux coefficients* $\mathscr{F}_m$. D'après la relation 1. 27 la réponse impulsionnelle a une durée $\Theta = L/V_R$ et une amplitude $A = V_R v_0/d$:

$$h(t) = V_R\frac{v_0}{d}\,\Pi\left(\frac{t}{\Theta}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\mathscr{F}_m\cos(2m+1)f_0t. \qquad (7.\ 84)$$

Remarquons qu'à tension électrique d'amplitude v_0 donnée la réponse impulsionnelle est inversement proportionnelle à la distance interdigitale d, c'est-à-dire proportionnelle à la fréquence de résonance f_0 (comme le champ électrique $E \propto v_0/d$).

La largeur relative a des doigts du transducteur modifie aussi l'amplitude des ondes de Rayleigh émises. Toutes choses égales par ailleurs, il a été montré [14, 15] que celle-ci est maximale pour $a = 1/2$, *i. e.* pour une largeur des doigts égale à l'intervalle qui les sépare ($\lambda_0/4$).

7. 2. 4. — *Méthode des sources discrètes*

Les deux paragraphes précédents montrent que, même dans le cas le plus simple : matériau transversalement isotrope, faible couplage piézoélectrique, doigts de longueur constante et régulièrement espacés, l'analyse du fonctionnement du transducteur à peignes imbriqués est ardue; toutefois la forme de la réponse en fréquence est indépendante du matériau. Il est donc utile de disposer d'une méthode générale pour calculer la réponse en fréquence d'un transducteur ayant des doigts de longueurs différentes et d'espacement variable. La méthode des sources discrètes ou méthode des « deltas » [16, 17] assimile chaque paire de doigts à un générateur ou un récepteur ultrasonore infiniment étroit localisé par exemple sur la ligne médiane entre deux dents comme l'indique la figure 7. 27. A chaque source est attribuée une amplitude A proportionnelle à la longueur de recouvrement l des deux dents, avec le signe + ou − suivant le sens du champ électrique.

Avec ces hypothèses la réponse impulsionnelle d'un transducteur est une succession de fonctions de Dirac :

$$h(t) = \sum_n s_nA_n\delta(t - t_n) \qquad (7.\ 85)$$

le signe s_n est égal à $(-1)^n$ lorsque le sens du champ électrique s'inverse à chaque intervalle interdigital. La réponse en fréquence

$$\mathrm{H}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, \mathrm{e}^{-i2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

est égale à :

$$\boxed{\mathrm{H}(f) = \sum_n s_n \mathrm{A}_n\, \mathrm{e}^{-i2\pi f t_n}} \qquad (7.\ 86)$$

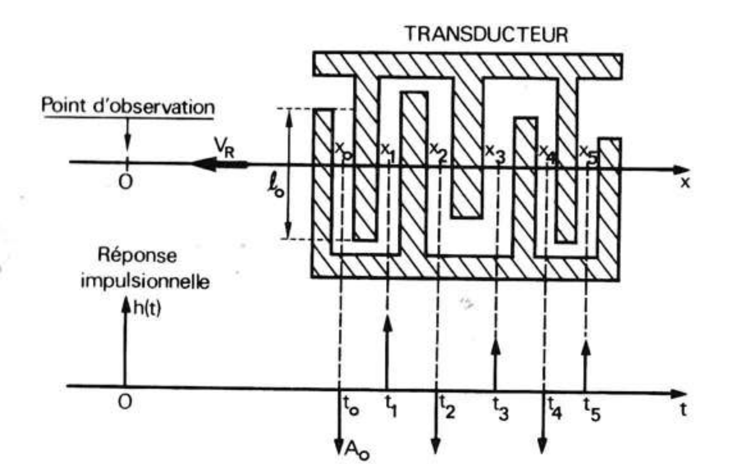


FIG. 7. 27. — *Méthode des sources discrètes.*
Le transducteur est assimilé à une suite discrète de sources, localisées entre les dents sur les lignes médianes, dont les amplitudes sont proportionnelles aux longueurs de recouvrement.

Afin de vérifier la validité de cette méthode des sources discrètes appliquons-la au transducteur à N dents régulièrement espacées, de même longueur pour lequel :

$$s_n = (-1)^n \qquad \mathrm{A}_n = \mathrm{A}_0 = C^{te} \qquad t_n = t_0 + n\frac{d}{\mathrm{V_R}} = t_0 + \frac{n}{2f_0}.$$

La réponse en fréquence est

$$\mathrm{H}(f) = \mathrm{A}_0\, \mathrm{e}^{-i2\pi f t_0} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-2} (-1)^n \exp\left(-in\pi\frac{f}{f_0}\right)$$

ou, comme $(-1)^n = \mathrm{e}^{in\pi}$:

$$\mathrm{H}(f) = \mathrm{A}_0\, \mathrm{e}^{-i2\pi f t_0} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-2} \exp\left(-in\pi\frac{f-f_0}{f_0}\right)$$

La sommation conduit à

$$\mathrm{H}(f) = \mathrm{A}_0\, \mathrm{e}^{-i2\pi f t_0} \frac{1 - \exp\left[-i(\mathrm{N}-1)\pi\dfrac{f-f_0}{f_0}\right]}{1 - \exp\left(-i\pi\dfrac{f-f_0}{f_0}\right)}$$

ou encore

$$\mathrm{H}(f) = \mathrm{A}_0 \exp\left[-i\left(2\pi f t_0 + (\mathrm{N}-2)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{f-f_0}{f_0}\right)\right] \frac{\sin\left[(\mathrm{N}-1)\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{f-f_0}{f_0}\right]}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{f-f_0}{f_0}\right)}.$$

A un déphasage près dû au retard moyen

$$\tau = t_0 + \frac{(\mathrm{N}-2)}{4f_0} = t_0 + \frac{\mathrm{N}-2}{2\mathrm{V_R}}\, d$$

la fonction de transfert s'écrit

$$\mathrm{H}(f) = \mathrm{A}_0 \frac{\sin\,(\mathrm{N}-1)\pi\dfrac{f-f_0}{2f_0}}{\sin\,\pi\dfrac{f-f_0}{2f_0}} \qquad (7.\ 87)$$

au voisinage des fréquences $f_m = (2m+1)f_0$ (m entier relatif) telles que

$$\frac{f-f_0}{2f_0} = \frac{f-f_m}{2f_0} + m$$

qui annulent numérateur et dénominateur, $\mathrm{H}(f)$ est équivalent à

$$\mathrm{H}_m(f) = \mathrm{A}_0 \frac{\sin\,(\mathrm{N}-1)\pi\dfrac{f-f_m}{2f_0}}{\pi\dfrac{f-f_m}{2f_0}} = \mathrm{A}_0\frac{\mathrm{V_R}}{d}\cdot\frac{\sin\,\pi\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{V_R}}(f-f_m)}{\pi(f-f_m)}. \qquad (7.\ 88)$$

La seule différence avec l'analyse du paragraphe précédent (formule 7. 83) est que les bandes harmoniques impaires ont toutes la même amplitude au lieu d'être proportionnelles aux coefficients $\mathscr{F}_m$.

La méthode des sources discrètes permet de résoudre le problème pratique de la *synthèse d'un transducteur* délivrant une réponse impulsionnelle (ou une fonction de transfert) imposée. Soit par exemple

$$h(t) = e(t)\cos\varphi(t) \qquad (7.\ 89)$$

la réponse impulsionnelle désirée, modulée en amplitude par la fonction enve-

loppe $e(t)$ positive, et en fréquence par la loi de phase $\varphi(t)$ (fig. 7. 28) :

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (7.\,90)$$

FIG. 7. 28. — *Synthèse d'une réponse impulsionnelle.*
La réponse est représentée par des échantillons équidistants en phase dont l'amplitude est proportionnelle à la valeur de l'enveloppe et inversement proportionnelle à la fréquence instantanée.

Pour déterminer les positions $x_n = V_R t_n$ des sources discrètes, il est toujours possible de définir une fonction $g(t)$ telle que

$$g(t_n) = n \qquad n \text{ entier.}$$

En donnant à chaque source une amplitude égale à $h(t_n)$ nous constituons un échantillonnage de la réponse impulsionnelle :

$$h_e(t) = \sum_n h(t_n)\delta[g(t) - n] = h(t)\sum_n \delta[g(t) - n] \qquad (7.\,91)$$

ou encore compte tenu du résultat de l'exercice 1. 11 :

$$h_e(t) = \sum_n h(t_n)\frac{\delta(t - t_n)}{|g'(t_n)|} = \sum_n \frac{e(t_n)}{|g'(t_n)|}\cos\varphi(t_n)\delta(t - t_n). \qquad (7.\,92)$$

Cette distribution de sources dont les signes sont *a priori* quelconques est mal aisée à réaliser avec un transducteur à électrodes interdigitées. Il est préférable de choisir les instants t_n tels que

$$\boxed{\varphi(t_n) = n\pi} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi(t_n) = (-1)^n \qquad (7.\,93)$$

de façon à alterner le signe des sources (fig. 7. 28). L'expression 7. 92 devient, en prenant $g(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\pi}$:

$$h_e(t) = \sum_n (-1)^n \frac{\pi e(t_n)}{\varphi'(t_n)}\delta(t - t_n). \qquad (7.\,94)$$

En fait cette suite de deltas représente plus que la fonction $h(t) = e(t)\cos\varphi(t)$ comme le laisse pressentir la figure 7. 29. La formule 1. 40

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x - n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi mx} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\cos(2\pi mx)$$

dont la démonstration fait l'objet de l'exercice 1. 10, appliquée à la relation 7. 91 avec $x = g = \varphi/\pi$ conduit à

$$n_e(t) = h(t) + 2e(t)\sum_{m=1}^{\infty}\cos\varphi\cos(2m\varphi)$$

soit après transformation du produit en somme :

$$h_e(t) = 2h(t) + 2e(t)\sum_{m=1}^{\infty}\cos(2m+1)\varphi.$$

La réponse impulsionnelle échantillonnée

$$\frac{h_e(t)}{2} = h(t) + e(t)\sum_{m=1}^{\infty}\cos(2m+1)\varphi \qquad (7.\,95)$$

représente, en plus de la réponse désirée $h(t) = e(t)\cos\varphi(t)$, des fonctions de même enveloppe mais de fréquence instantanée multiple impaire de celle du terme fondamental $h(t)$.

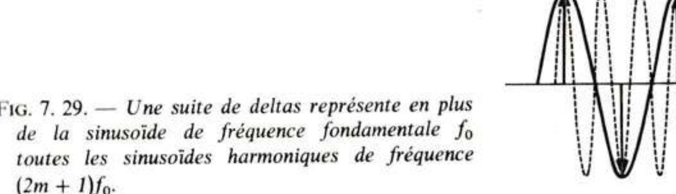


FIG. 7. 29. — *Une suite de deltas représente en plus de la sinusoïde de fréquence fondamentale f_0 toutes les sinusoïdes harmoniques de fréquence $(2m+1)f_0$.*

La longueur de recouvrement des dents l_n est proportionnelle à l'amplitude A_n des sources qui se déduit de la relation 7. 94 :

$$\boxed{A_n = \frac{\pi e(t_n)}{2\varphi'(t_n)}} \qquad (7.\,96)$$

En choisissant l'intervalle entre dents et leur largeur égale au quart de la longueur d'onde instantanée, la distance entre les axes des deux doigts formant la source de rang n est :

$$d_n = \frac{\lambda(t_n)}{2} = \frac{V_R}{2f(t_n)} = \frac{\pi V_R}{\varphi'(t_n)}. \qquad (7.\,97)$$

La réponse impulsionnelle désirée est obtenue en éliminant les harmoniques par un filtre de bande constitué en pratique par le peigne récepteur et les circuits d'adaptation.

Dans le cas des lignes dispersives, décrites au paragraphe 9. 3. 5. 1, le nombre de doigts du transducteur peut être très élevé. Par exemple pour obtenir une impulsion de durée $\Theta = 10$ µs et de fréquence centrale $f_0 = 60$ MHz il faut environ $2f_0\Theta = 1\,200$ dents. La réduction de ce nombre facilite le dessin du masque et diminue les interactions parasites dues au

passage sous toutes les autres dents, des ondes émises à une extrémité du transducteur. Ceci est obtenu en utilisant une des réponses harmoniques, comme le montre la figure 7. 30. La distance entre les axes des dents formant les sources, toujours placées aux instants t_n, est $\lambda(t_n)/2Q$. L'harmonique d'ordre $Q = 2m + 1$ est sélectionné par un filtre centré sur la fréquence Qf_0. La réponse impulsionnelle

$$h_Q(t) = e(t) \cos [Q\varphi(t)]$$

de fréquence Q fois plus élevée est ainsi réalisée avec le même nombre de doigts. De la même manière, le signal fondamental s'obtient avec Q fois moins d'échantillons disposés aux instants t_n tels que

$$\varphi(t_n) = Qn\pi \qquad (7.\ 98)$$

si bien que le nombre de dents est divisé par le taux d'échantillonnage Q.

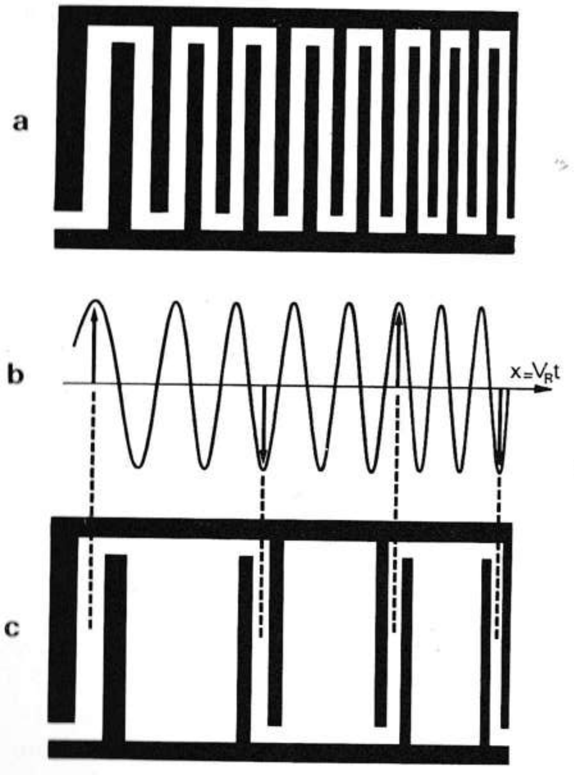


FIG. 7. 30. — *Réduction du nombre de doigts d'un transducteur par échantillonnage.* La réponse impulsionnelle désirée (*b*) s'obtient en plaçant :
— une source à chaque instant t_n tel que $\varphi(t_n) = n\pi$ ce qui conduit au transducteur *a*.
— ou bien à chaque instant t_n tel que $\varphi(t_n) = Qn\pi$ (ici $Q = 5$) ce qui conduit au transducteur échantillonné *c*.

REMARQUE : *Déformation du front d'onde.* — Dans l'analyse précédente, unidimensionnelle, l'onde émise par le transducteur est supposée plane et le front d'onde est parallèle aux doigts. L'examen, perpendiculairement à la direction de propagation, du faisceau montre que le front d'onde est déformé lorsque la longueur des doigts varie, surtout si le substrat possède un coefficient de couplage électromécanique élevé (cas du $LiNbO_3$). Cette distorsion provient de l'inhomogénéité du transducteur : la vitesse des ondes de Rayleigh sur la surface d'un matériau piézoélectrique est affectée par la présence d'une couche métallique (*) (paragr. 6. 2. 2. 4). Quand la longueur des doigts des peignes n'est pas constante, les ondes créées par les divers points d'une source linéaire parcourent des chemins de longueurs métallisées inégales et subissent des déphasages différents (effet de lentille). Un exemple [18] est donné sur la figure 7. 31*a*. Le relevé expérimental a été effectué par la méthode de la sonde capacitive constituée d'une aiguille de tungstène

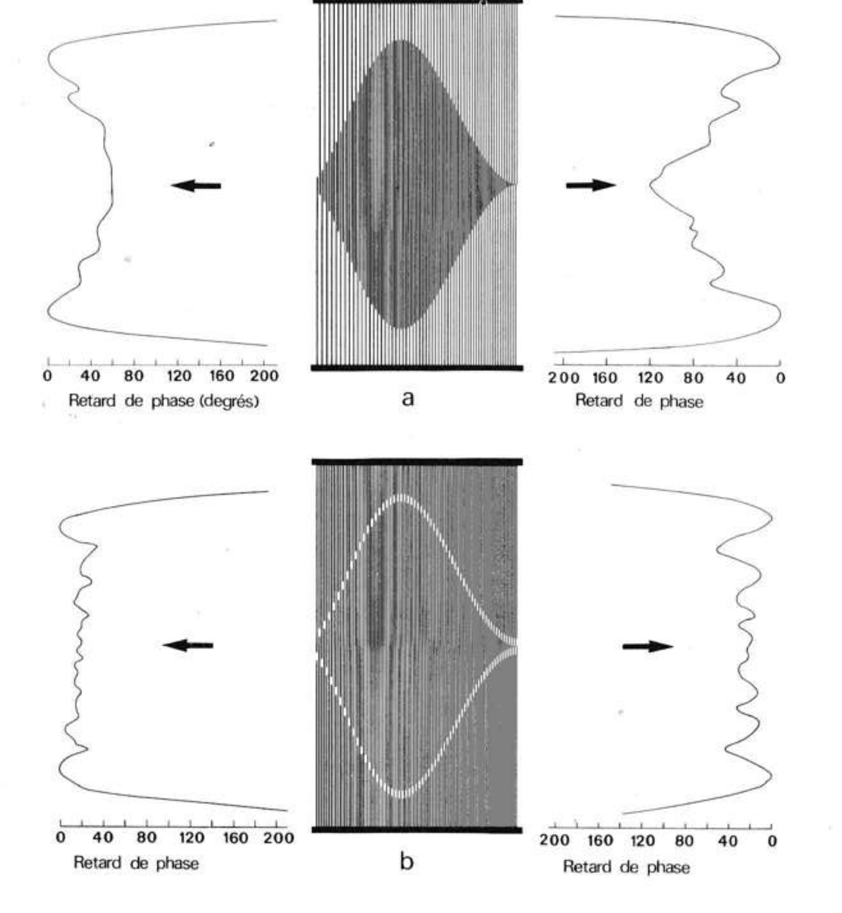


FIG. 7. 31. — *Distorsion du front d'onde* (a). *Correction par doigts morts* (b). Substrat $LiNbO_3$. La fréquence d'excitation 57 MHz est la fréquence de résonance des sources aux doigts les plus longs. La phase de l'onde est mesurée à 0,89 cm environ du centre du transducteur. (Figure 2 de la référence 18, aimablement communiquée par R. H. TANCRELL.)

(*) Si le matériau n'est pas piézoélectrique la vitesse des ondes de Rayleigh est aussi affectée par la masse métallique. Cet effet purement mécanique (*mass loading*) est négligeable pour une couche mince d'un métal peu dense comme l'aluminium.

en contact avec la surface [19]. Le retard de phase des ondes issues de la zone centrale à chemin acoustique maximal atteint 120° par rapport aux ondes provenant des zones latérales. La déformation des fronts des ondes émises en sens opposés n'est pas identique car le transducteur n'est pas symétrique. Ces déphasages importants, qui donnent lieu à des interférences non désirées sur un transducteur récepteur à doigts rectilignes, sont considérablement atténués lorsque des doigts morts sont ajoutés (fig. 7. 31*b*). Ces doigts, inactifs parce que portés au même potentiel que leurs voisins, ont pour rôle d'uniformiser la distribution du métal sur la surface (*).

7. 2. 5. — Schéma électrique équivalent

Un transducteur à deux électrodes en forme de peignes est équivalent du point de vue électrique, près de la fréquence de synchronisme, à une capacité et à une résistance. La résistance comprend deux parties : la résistance ohmique des électrodes et la résistance de rayonnement. La capacité dépend du nombre, de l'intervalle des doigts des peignes et de la constante diélectrique du substrat [11, 20].

Pour déterminer l'impédance d'un transducteur à peignes, il est possible [21] de le décomposer en sections de longueur $2d$ et d'associer à chaque section un circuit équivalent dérivé de celui construit par Mason pour un transducteur à ondes de volume (paragr. 7. 1. 2). La décomposition est simplifiée si l'une des composantes du champ électrique joue un rôle prépondérant. Si la composante tangentielle est la plus importante (approximation du « champ en ligne »), le schéma de base est celui de la figure 7. 13. Si la composante normale est la plus importante (approximation du « champ croisé »), le schéma de base se déduit du précédent en court-circuitant la capacité $-C_0$ (exercice 7. 2). L'inversion du champ électrique dans chaque section exige l'association de deux circuits élémentaires, en cascade pour les sorties mécaniques et en parallèle pour les entrées électriques.

L'expression habituellement utilisée de la conductance de rayonnement se retrouve à un facteur numérique près par le raisonnement simple suivant. La puissance $\mathscr{P}_s$ émise par source sous forme d'ondes de Rayleigh est proportionnelle à la fréquence f_0 et à l'énergie diélectrique moyenne emmagasinée dans le substrat entre deux doigts voisins :

$$\mathscr{P}_s = \eta C_s v_0^2 f_0$$

η étant un facteur de proportionnalité et C_s la capacité par intervalle interdigital. A la fréquence de synchronisme $f_0 = V_R/2d$, les $N-1$ sources constituant le transducteur rayonnent en phase et la puissance totale émise $\mathscr{P}$ est $(N-1)^2\mathscr{P}_s$:

$$\mathscr{P} = (N-1)^2 \eta C_s v_0^2 f_0.$$

La conductance de rayonnement est définie par

$$G_0 = \frac{2\mathscr{P}}{v_0^2} = 2(N-1)^2 \eta C_s f_0. \qquad (7.\ 99)$$

Lorsque la fréquence s'écarte de la fréquence de synchronisme, les sources ne sont plus en phase et la conductance G est égale à G_0 multiplié par le carré de l'expression 7. 87 :

$$G = G_0 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \quad \text{avec} \quad x = (N-1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{f-f_0}{f_0}. \qquad (7.\ 100)$$

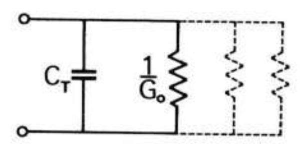


FIG. 7. 32. — *Schéma électrique équivalent à un transducteur à peignes.*

Les formules 7. 99 et 7. 100 s'identifient avec celles de la référence 21 en prenant $\eta = 2K_R^2$:

$$G_0 = 4(N-1)K_R^2 C_T f_0 \qquad (7.\ 101)$$

où $C_T = (N-1)C_s$ est la capacité totale du transducteur. En réalité, puisque le transducteur émet aussi des ondes de volume (paragr. 7. 2. 3), le schéma électrique équivalent (fig. 7. 32) comprend plusieurs conductances. Pour assurer l'adaptation au générateur, la capacité C_T est compensée par une inductance choisie pour obtenir la résonance à la fréquence de synchronisme f_0.

7. 2. 6. — Technologie

La largeur d'un doigt de peigne est généralement égale à $\lambda_0/4$. Quand la fréquence est inférieure à 300 MHz, la longueur d'onde est supérieure à 10 µm pour la plupart des matériaux utilisés et les transducteurs sont réalisés par la technique de photogravure, classique en micro-électronique.

(*) Un autre effet peut être rapproché de celui-ci : la variation d'impédance (mécanique et électrique) en surface, due aux doigts métalliques, donne lieu, quand une onde élastique arrive sous un transducteur, à des réflexions. L'analyse de ces effets n'est pas très simple. Ils sont d'autant plus importants que le coefficient de couplage électromécanique du substrat est grand. Ils dépendent non seulement de la fréquence de l'onde mais aussi de la charge du transducteur. Quelques configurations ont été imaginées pour les diminuer. Par exemple, la scission d'un doigt en deux. En effet, les ondes réfléchies sur les arêtes homologues de deux doigts voisins ordinaires, de largeur $\lambda/4$ séparés par un intervalle de $\lambda/4$, s'ajoutent puisque la différence de trajet cause un déphasage de 2π. Ces réflexions sont, en principe, supprimées quand chaque doigt est formé de deux traits de largeur $\lambda/8$ séparés de $\lambda/8$: la distance entre les axes de deux doigts voisins restant $\lambda/2$, il y a interférence destructive. (Voir « Reflection of a surface wave from three types of ID transducers » by A. J. DE VRIES, R. L. MILLER and T. J. WOJCIK, 1972, *IEEE Ultrasonics Symposium Proc.*, p. 353 et « Applications of double electrodes in acoustic surface wave device design » by T. W. BRISTOL, W. R. JONES, P. B. SNOW and W. R. SMITH, 1972, *IEEE Ultrasonics symposium Proc.*, p. 43).

Pour des fréquences élevées, la largeur d'un doigt est de l'ordre des longueurs d'ondes lumineuses — à 1 000 MHz, $\lambda \simeq 3$ µm — et les effets de diffraction de la lumière deviennent prohibitifs. On a recours, pour tracer les peignes, à un graveur, ou « masqueur », électronique; la longueur d'onde associée à des électrons est, en effet, extrêmement petite : $\lambda < 1$ Å pour des électrons d'énergie 10 keV.

A notre connaissance, les lignes à ondes de surface actuellement en service dans des systèmes (voir le chap. 9 : « Applications ») ont été construites suivant la technologie conventionnelle des circuits intégrés [22]. Elle consiste, à quelques variantes près [23], à déposer sous vide une couche métallique homogène et uniforme, par exemple une couche d'aluminium de 6 000 Å, sur un substrat plan poli (ici monocristal de quartz, de niobate de lithium... ayant la forme d'une plaquette de quelques centimètres de longueur, d'un centimètre de largeur et de deux millimètres d'épaisseur) puis à recouvrir le métal d'une couche de résine photosensible, à l'aide d'une centrifugeuse (tournette). La plaque portant la photographie du transducteur étant appliquée sur la résine, celle-ci est éclairée en lumière violette et se polymérise. Les parties insolées de la résine puis le métal qui n'est plus protégé sont enlevés par attaque chimique. Le masque photographique provient d'un dessin tracé à grande échelle au moyen d'un coordinatographe (1×1 m^2). Les deux transducteurs sont, si possible, réalisés simultanément.

La gravure électronique est une technique de laboratoire [24] qui nécessite un appareil du type microscope à balayage et consiste à « insoler » la résine avec un pinceau d'électrons ($\varnothing < 500$ Å). L'ordre des opérations peut être le suivant [25] : dépôt sur le substrat isolant d'une fine couche d'aluminium (200 Å) destinée à éviter la charge électrique statique de la surface, étalement de la résine : film de 4 000 Å d'épaisseur de polyméthacrylate de méthyle (PMM), insolation par le faisceau d'électrons (20 keV) reproduisant automatiquement [26] le dessin des transducteurs, attaque chimique sélective de la résine insolée, évaporation d'une deuxième couche d'aluminium ($\sim$ 1 500 Å) dans les sillons formés et sur la résine restante, dissolution de la résine (qui est recouverte d'aluminium) : les traits métalliques qui vont constituer les doigts des peignes subsistent seuls en surimpression sur la toute première couche d'aluminium, bombardement ionique de l'ensemble pour éliminer entre les doigts cette fine couche d'aluminium : la hauteur des dents se trouve diminuée de l'épaisseur de cette couche. Des transducteurs fonctionnant à des fréquences de 3 500 MHz [27] ont été réalisés suivant cette méthode. La largeur d'une dent de peigne est alors environ 0,15 µm. L'exploitation de lignes munies de tels transducteurs reste néanmoins problématique, étant donné les pertes de propagation des ondes de Rayleigh à ces fréquences (> 10 dB/µs pour $LiNbO_3$). Il semble difficile de dépasser des fréquences centrales utiles de 1 500 MHz. Mentionnons qu'un type différent de transducteur, dit transducteur à réseau, a été employé [28]. Constitué d'une suite de traits métalliques parallèles électriquement isolés, le premier et le dernier formant les électrodes, il fonctionne, pour une largeur de trait donnée, à une fréquence double de celle du transducteur à peignes. Il est donc plus facile à construire mais ses pertes sont plus élevées.

Une fois les transducteurs gravés, les lignes, quelle que soit leur fréquence de fonctionnement, sont placées dans des boîtiers étanches car la présence de poussières ou la condensation de vapeurs perturbe la propagation des ondes de Rayleigh.

RÉFÉRENCES

[1] J. TROTEL, E. DIEULESAINT and B. AUTIN. — *Electron. Letters*, *4*, 156 (1968).
[2] W. P. MASON. — *Electromechanical transducers and wave filters*, pp. 201-399. Princeton, N. J. : Van Nostrand (1948).
[3] Référence 20 du chapitre 4.
[4] E. K. SITTIG, A. W. WARNER and H. D. COOK. — *Ultrasonics*, *7*, 108 (1969).
[5] N. F. FOSTER. — *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-11*, 63 (1964).
[6] J. DE KLERK and E. F. KELLY. — *Appl. Phys. Lett.*, *5*, 2 (1964).
[7] N. F. FOSTER, G. A. COQUIN, G. A. ROZGONYI and F. A. VANNATA. — *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-15*, 28 (1968).
[8] N. F. FOSTER. — *Proc. IEEE*, *53*, 1400 (1965).
[9] G. A. ROZGONYI and W. J. POLITO. — *Appl. Phys. Lett.*, *8*, 220 (1966).
[10] R. M. WHITE. — *Proc. IEEE*, *58*, 1238 (1970).
[11] H. ENGAN. — *IEEE Trans. Electron. Devices*, *ED-16*, 1014 (1969).
— ELAB Report TE-91, *Electronics Res. Lab.*, *Norwegian Institute of Technology*, Trondheim, Norway (1967).
[12] J. DE KLERK, *Ultrasonics*, *9*, 35 (1971).
[13] S. G. JOSHI and R. M. WHITE. — *J. Acoust. Soc. Am.*, *46*, 17 (1969).
[14] G. A. COQUIN and H. F. TIERSTEN. — *J. Acoust. Soc. Am.*, *41*, 921 (1967).
[15] M. REDWOOD and R. F. MILSOM. — *Electron. Letters*, *6*, 437 (1970).
[16] R. H. TANCRELL and M. G. HOLLAND. — *Proc. IEEE*, *59*, 393 (1971).
[17] C. ATZENI and L. MASOTTI. — *Acoustic surface waves and acousto-optic devices* (T. Kallard Ed.) Vol. *4*, p. 69-80. New York : Optosonic Press (1971).
[18] R. H. TANCRELL and R. C. WILLIAMSON. — *Appl. Phys. Lett.*, *19*, 456 (1971).
[19] B. A. RICHARDSON and G. S. KINO. — *Appl. Phys. Lett.*, *16*, 82 (1970).
[20] G. W. FARNELL, I. A. CERMAK, P. SILVESTER and S. K. WONG, *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-17*, 188 (1970).
[21] W. R. SMITH, H. M. GERARD, J. H. COLLINS, T. M. REEDER and H. J. SHAW. — *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-17*, 856 (1969).
[22] R. LYON-CAEN. — *Circuits logiques intégrés*, chap. 2, Paris, Masson et Cie (1968).
[23] H. I. SMITH, F. J. BACHNER and N. EFREMOW. — *J. Electrochemical society*, *118*, 821 (1971).
[24] A. N. BROERS, E. G. LEAN and M. HATZAKIS. — *Appl. Phys. Lett.*, *15*, 98 (1969).
[25] P. HARTEMANN, C. ARNODO et R. GAUDRY. — *J. Physique*, *C. 6*, 33, 266 (1972).
[26] O. CAHEN, R. SIGELLE, J. TROTEL. — 141st National Meeting, *The Electrochemical Society*, Houston, U. S. A. (1972).
[27] E. G. LEAN and A. N. BROERS. — *The Microwave Journal*, *13*, 97 (1970).
[28] A. J. BAHR, R. E. LEE and A. F. PODELL. — *Proc. IEEE*, *60*, 443 (1972).
[29] A. P. VAN DEN HEUVEL. — *Appl. Phys. Lett.*, *21*, 280 (1972).

BIBLIOGRAPHIE

Transducteur à ondes de volume. Résonateur.

C. F. BROCKELSBY, J. S. PALFREEMAN, R. W. GIBSON. — *Ultrasonic Delay Lines*, chap. 3. London, Iliffe L. T. D. (1963).

Y. KIKUCHI. — *Ultrasonic Transducers*, Corona Pub. Co, Tokyo (1969).

T. R. MEEKER. — Thickness mode piezoelectric transducers. *Ultrasonics*, *10*, 26 (1972).

E. K. SITTIG. — Design and technology of piezoelectric transducers for frequencies above 100 MHz. In *Physical Acoustics* (W. P. Mason and R. N. Thurston Eds) Vol. *9*, p. 221-275. New York : Academic Press (1972).

T. M. REEDER and D. K. WINSLOW. — Characteristics of microwave acoustic transducers for volume wave excitation. *IEEE Trans. MTT-17*, 927 (1969).

H. F. TIERSTEN. — *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, New York : Plenum Press (1969).

W. P. MASON. — Use of Piezoelectric Crystals and Mechanical Resonators in Filters and Oscillators. In *Physical Acoustics* (W. P. Mason and R. N. Thurston) Vol. *1 A*, p. 335-416. New York : Academic Press (1964).

Transducteur à électrodes interdigitées.

G. F. MILLER and H. PURSEY. — The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid. *Proc. Roy. Soc.*, *A 223*, 521 (1954).

R. M. WHITE and F. W. VOLTMER. Direct piezoelectric coupling to surface elastic waves, *Appl. Phys. Lett.*, *7*, 314 (1965).

C. C. TSENG. — Frequency response of an interdigital transducer for excitation of surface elastic waves. *IEEE Trans. Electron Devices ED-15*, 586 (1968).

J. H. COLLINS, H. M. GERARD, T. M. REEDER and H. J. SHAW. — Unidirectional surface wave transducer, *Proc. IEEE* (*Letters*), *57*, 833 (1969).

M. REDWOOD and R. F. MILSOM. — Piezoelectric coupling coefficient of interdigital Rayleigh-wave transducers, *Electron. Lett.*, *6*, 437 (1970).

J. DE KLERK. — Surface wave transducers, *Ultrasonics*, *9*, 35 (1971).

R. F. MILSOM and M. REDWOOD. — Piezoelectric generation of surface waves by interdigital array, *Proc. IEEE*, *118*, 831 (1971).

T. KRAIROJANANAN and M. REDWOOD. — Equivalent electrical circuits of interdigital transducers for piezoelectric generation and detection of Rayleigh waves, *Proc. IEEE*, *118*, 305 (1971).

R. V. SCHMIDT. — Excitation of shear elastic waves by an interdigital transducer operated at its surface-wave center frequency, *J. Appl. Phys.*, *43*, 2498 (1972).

W. R. SMITH, H. M. GERARD and W. R. JONES. — Analysis and design of dispersive interdigital surface-wave transducers, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, *MTT-20*, 458 (1972).

F. S. HICKERNELL and J. W. BREWER. — Surface-elastic-wave properties of dc-triode-sputtered zinc oxide films, *Appl. Phys. Lett.*, *21*, 389 (1972).

G. S. KINO and R. S. WAGERS. — Theory of interdigital couplers on non piezoelectric substrates, *J. Appl. Phys.*, *44*, 1480 (1973).

A. K. GANGULY and M. O. VASSELL. — Frequency response of acoustic surface wave filters, *J. Appl. Phys.*, *44*, 1072 (1973).

Autres types de transducteurs pour ondes de Rayleigh.

R. M. ARZT, E. SALZMANN and K. DRANSFELD. — Elastic surface waves in quartz at 316 MHz, *Appl. Phys. Lett.*, *10*, 165 (1967). (Transducteur à réseau.)

R. F. HUMPHRYES, E. A. ASH, Acoustic bulk-surface-wave transducer, *Electron. Lett.*, *5*, 175 (1969).

M. L. DAKSS and E. G. LEAN. — Excitation of acoustic surface waves with a grating-coupled Gunn oscillator, *Appl. Phys. Lett.*, *18*, 137 (1971).

L. T. CLAIBORNE, E. J. STAPLES, J. L. HARRIS. — MOSFET ultrasonic surface wave detectors for programmable matched filters, *Appl. Phys. Lett.*, *19*, 58 (1971).

M. BRUUN, S. LUDVIK and C. F. QUATE. — Field effect transistors on epitaxial GaAs as transducers for acoustic surface waves, *Appl. Phys. Lett.*, *18*, 118 (1971).

E. W. GREENEICH and R. S. MULLER. — Acoustic-wave detection via a piezoelectric field-effect transducer, *Appl. Phys. Lett.*, *20*, 156 (1972).

EXERCICES

• **7. 1.** Quelle est l'impédance élastique en $x = 0$ de la ligne située du côté des x positifs (figure 7. 2)? Cas $d_1 = \frac{\lambda_M}{2}$, $d_1 = \frac{\lambda_M}{4}$.

Solution. Pour $0 < x < d_1$:

$$u = A\,e^{i(\omega t - kx)} + B\,e^{i(\omega t + kx)} \qquad \text{et} \qquad T = c_M \frac{\partial u}{\partial x}$$

L'impédance élastique

$$Z_T = \frac{-T}{\dot{u}} = Z_M \frac{A\,e^{-ikx} - B\,e^{ikx}}{A\,e^{-ikx} + B\,e^{ikx}}$$

est égale à Z pour $x = d_1$:

$$B = A \frac{Z_M - Z}{Z_M + Z}\,e^{-2ikd_1}$$

et il vient en reportant

$$Z_T(x = 0) = Z_M \frac{Z + iZ_M \operatorname{tg} kd_1}{Z_M + iZ \operatorname{tg} kd_1}.$$

— Pour $d_1 = \frac{\lambda_M}{2}\ (kd_1 = \pi)$: $Z_T(0) = Z$.

— Pour $d_1 = \frac{\lambda_M}{4}\left(kd_1 = \frac{\pi}{2}\right)$: $Z_T(0) = \frac{Z_M^2}{Z}$.

• **7. 2.** Soit un barreau piézoélectrique infini de largeur L et d'épaisseur $l \ll L$, taillé et métallisé de sorte que le champ électrique excite une onde longitudinale se propageant suivant Ox_3 (fig. 7. 33). Quelle est sa vitesse? Établir, en s'inspirant de la méthode du paragraphe 7. 1. 2. *c*, le schéma équivalent d'une tranche de longueur *d*.

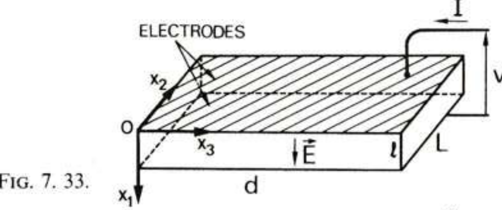


FIG. 7. 33.

Solution. A l'aide des composantes de la déformation $S_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ et du champ électrique $\vec{E}(E_1, 0, 0)$

$$T_{33} = c_{33}^E \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - e_{13}E_1 \qquad (7.\ 102)$$

$$D_1 = \varepsilon_{11}^S E_1 + e_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \qquad (7.\ 103)$$

l'équation de propagation

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = c_{33}^E \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - e_{13} \frac{\partial E_1}{\partial x_3}$$

montre que la vitesse de l'onde est $V = \sqrt{\frac{c_{33}^E}{\rho}}$ car E_1 ne dépend pas de x_3 (les plans $x_1 = 0$ et $x_1 = l$ sont des surfaces équipotentielles). Par la suite nous utiliserons les notations simplifiées :

$$x_3 = x, \quad u_3 = u, \quad E_1 = E, \quad D_1 = D, \quad c_{33}^E = c, \quad \varepsilon_{11}^S = \varepsilon,$$
$$e_{13} = e = h\varepsilon, \quad T_{33} = T = -\frac{F}{lL}.$$

L'équation 7. 102 montre que les forces sur les faces $x = 0$ et $x = d$ s'obtiennent en ajoutant aux expressions 7. 28 le terme constant

$$eE l L = hmC_0 v \qquad (7.\ 104)$$

avec $m = \frac{l}{d}$, $C_0 = \frac{\varepsilon L d}{l}$ (capacité), $v = El$ (tension électrique).

Le courant est donné par $I = \frac{dQ}{dt} = i\omega Q$, où Q est la charge de l'électrode $x_1 = 0$:

$$Q = \int D\, ds = L \int_0^d D\, dx = Ld\varepsilon E - Le(u_1 - u_2).$$

En introduisant les vitesses sur les deux faces : $\dot{u}_1 = i\omega u_1$ (pour $x = 0$) et $\dot{u}_2 = i\omega u_2$ (pour $x = d$) :

$$I = i\omega C_0 v - hmC_0(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \qquad (7.\ 105)$$

et le schéma équivalent qui se déduit des formules 7. 104 et 7. 105 ne comprend plus la capacité $-C_0$, le rapport de transformation est $N = hmC_0$.

• **7. 3.** Comment varie, avec l'ordre $n = 2p + 1$, l'écart relatif $\varepsilon_n = \frac{f_a^{(n)} - f_r^{(n)}}{f_a^{(n)}}$ entre les fréquences de résonance et d'antirésonance?

Solution. Comme $f_a^{(n)} = nf_a$: $f_r^{(n)} = nf_a(1 - \varepsilon_n)$ et le premier membre de 7. 33 devient

$$K^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{f_r^{(n)}}{f_a} = \frac{K^2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} n\varepsilon_n\right)} \simeq \frac{K^2}{\frac{\pi}{2} n\varepsilon_n} \qquad \text{car} \qquad \varepsilon_n \ll 1$$

d'où

$$\varepsilon_n \simeq \frac{4K^2}{\pi^2 n^2}.$$

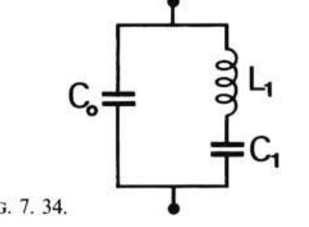


Fig. 7. 34.

• **7. 4.** Montrer que le schéma équivalent d'un résonateur en forme de barreau (exercice 7. 2) s'identifie au circuit de la figure 7. 34 au voisinage de la résonance. Calculer les éléments L_1 et C_1.

Solution. L'impédance du secondaire du transformateur : $\mathscr{Z}_2 = -\frac{i\mathscr{Z}}{2 \operatorname{tg} \frac{\omega d}{2V}}$ équivaut au voisinage de la fréquence de résonance $\omega_r = \frac{\pi V}{d}$ à :

$$\mathscr{Z}_2 = -\frac{i\mathscr{Z}}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(1 + \varepsilon)} \simeq \frac{i\pi\mathscr{Z}}{4}\varepsilon \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon = \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}$$

Cette expression s'identifie avec l'impédance d'un circuit $\mathscr{L}\mathscr{C}$ au voisinage de sa fréquence de résonance $\omega_0 = \omega_r$:

$$\mathscr{Z}' = i\left(\omega\mathscr{L} - \frac{1}{\mathscr{C}\omega}\right) \simeq 2i\mathscr{L}\omega_r\varepsilon$$

en posant

$$\mathscr{L} = \frac{\pi\mathscr{Z}}{8\omega_r} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C} = \frac{8}{\pi\mathscr{Z}\omega_r}$$

Ramené au primaire du transformateur de rapport $N = hmC_0 = eL$, il vient

$$C_1 = N^2\mathscr{C} = \frac{8e^2L^2d}{\pi^2\rho V^2 lL} = \frac{8}{\pi^2}\frac{e^2}{\varepsilon^S c^E}\frac{\varepsilon^S Ld}{l} = \frac{8}{\pi^2}\frac{K^2}{1 - K^2} C_0 = \frac{8}{\pi^2} K^2 C_0^T$$

où $C_0^T = \frac{\varepsilon^T}{\varepsilon^S} C_0$ est la capacité à tension mécanique constante (nulle), et

$$L_1 = \frac{\mathscr{L}}{N^2} = \frac{\rho l L d}{8N^2} = \frac{\text{masse}}{8N^2}.$$

Ordre de grandeur : $l = 0{,}5$ mm, $L = 4$ mm, $d = 10$ mm, $\varepsilon^T = 4 \cdot 10^{-11}$ F/m, $e = 0{,}1$ C/m², $\rho = 3 \cdot 10^3$ kg m⁻³, $K^2 = 10^{-3}$ ⇒ $C_0 = 3{,}2$ pF, $C_1 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$ pF, $L_1 = 47$ H.

• **7. 5.** En supposant que les ondes de Rayleigh sont créées uniquement et uniformément sous les doigts des peignes dessiner la réponse impulsionnelle : 1 – d'un transducteur à trois doigts; 2 – d'une ligne formée d'un émetteur à trois doigts et d'un récepteur à quatre doigts.

Solution. 1 – figure 7. 35 *a*, 2 – corrélation des signaux *a* et *b* ⇒ *c*.

a * b ⇒ c

Fig. 7. 35.

• **7. 6.** Deux transducteurs identiques T_1 et T_2, séparés par une distance l, émettent suivant une même direction et dans les deux sens des ondes de fréquence f_0. Comment choisir l et le déphasage φ entre les tensions électriques appliquées à T_1 et T_2 pour que l'ensemble des deux transducteurs n'émette que dans un seul sens.

Solution. Dans un sens les déphasages électrique (φ) et spatial (ψ) s'ajoutent, dans l'autre sens ils se retranchent. Le transducteur est unidirectionnel si

$$\varphi + \psi = \pi \quad \text{et} \quad \varphi - \psi = 0 \Rightarrow \varphi = \psi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{V}{4f_0}.$$

• **7. 7.** Une ligne est composée d'un transducteur émetteur à N doigts inclinés ($N \gg 1$) et d'un récepteur droit (fig. 7. 36). Quelle est la réponse en fréquence de cette ligne lorsque l'inclinaison θ_n des sources varie linéairement entre $-\theta_0$ et $+\theta_0$ avec leur abscisse $x_n = n\lambda_0/2$ (θ_0 petit) (d'après la référence 29)?

Solution. En décomposant chaque source en éléments dy le signal provenant de la n-ième source est

$$A_n = A_0\, e^{-i\frac{\omega l}{V}} \int_{-b/2}^{b/2} e^{i\frac{\omega x}{V}} \frac{dy}{b}$$

amplitude de l'onde émise par une source droite de longueur b :

$$A_n = A_0\, e^{-\frac{i\omega}{V}(l-x_n)} \frac{\sin\left(\frac{b\theta_n}{2V}\omega\right)}{\frac{b\theta_n}{2V}\omega}.$$

FIG. 7. 36.

Si N est grand, la distribution de sources est quasi continue et la réponse en fréquence $H(\omega) = \sum_n (-1)^n A_n = \sum_n A_n \cos\left(\frac{2\pi f_0 x_n}{V}\right)$ peut être calculée par l'intégrale :

$$H(\omega) = \int_{-L/2}^{+L/2} A(x) \cos\left(\frac{2\pi f_0}{V}x\right)\frac{dx}{L} \qquad \text{avec} \qquad A(x) = A_0\, e^{i\frac{\omega x}{V}} \frac{\sin\left(\frac{b\theta(x)\omega}{2V}\right)}{\frac{b\theta(x)\omega}{2V}}$$

(en omettant le retard moyen $\tau = l/V$). Pour une variation linéaire $\theta = 2\theta_0 x/L$ il vient :

$$H(\omega) = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{A_0}{L} \frac{\sin\left(\frac{b\theta_0\omega}{LV}x\right)}{\frac{b\theta_0\omega}{LV}x} \cos\left(\frac{2\pi f_0}{V}x\right) e^{i\frac{\omega x}{V}}\, dx.$$

L'intégration étant étendue à $\pm\infty$ ($N \gg 1$) et la fréquence supposée constante dans le facteur en $(\sin\alpha)/\alpha$ (bande passante étroite : $\omega \simeq \omega_0$), la réponse en fréquence est la transformée de Fourier d'une fonction $(\sin\alpha)/\alpha$ avec porteuse :

$$H(\omega) = \frac{A_0 V}{L}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi B t}{\pi B t} \cos 2\pi f_0 t\; e^{i2\pi f t}\, dt \qquad \text{avec} \qquad t = \frac{x}{V} \quad \text{et} \quad B = \frac{2b\theta_0 f_0}{L}$$

$H(\omega)$ est donc un créneau de fréquence centrale $\pm f_0$ (paragr. 1. 3. 2) :

$$H(\omega) = \frac{A_0\lambda_0}{4b\theta_0}\left[\Pi\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right]$$

de bande passante relative $\frac{B}{f_0} = \frac{2b\theta_0}{L} = 4\frac{b\theta_0}{(N-1)\lambda_0}$

• **7. 8.** Pour un transducteur simple, adapté avec une inductance, quelle est la valeur N_0 du nombre de doigts qui assure une bande passante relative maximale. Application : $LiNbO_3$(YZ), SiO_2(YX) avec les valeurs du tableau 6. 18.

Solution. D'après la formule 7. 37 le coefficient de surtension dû à l'effet cumulatif est $Q_a = \frac{N-1}{1,77}$. Le coefficient de surtension électrique provenant de l'adaptation est (formule 7. 101):

$$Q_e = \frac{C_T\omega_0}{G_0} = \frac{\pi}{2(N-1)K_R^2}.$$

Pour N grand $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q_a}$, pour N petit $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q_e}$; $\frac{\Delta f}{f_0}$ est maximum lorsque $Q_a = Q_e$:

$$\Rightarrow \quad N_0 - 1 = \frac{1,67}{K_R} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)_{max} = 1,06\, K_R$$

$LiNbO_3 : N_0 = 9, \left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)_{max} = 0,23$ $\qquad$ $SiO_2 : N_0 = 37, \left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)_{max} = 0,05.$

CHAPITRE 8

INTERACTION ENTRE ONDES ÉLASTIQUES ET ONDES LUMINEUSES

L'interaction entre ondes élastiques et ondes lumineuses a été analysée par Léon Brillouin [1] dès 1922. Les premières expériences ont été réalisées en 1932 par René Lucas et Pierre Biquard [2] en France, par P. Debye et F. W. Sears [3] aux États-Unis.

Les effets de diffraction de la lumière par les ultra-sons mis en évidence au cours de ces expériences ont été, par la suite, exploités surtout pour effectuer des mesures de vitesse de propagation des ondes élastiques dans différents matériaux. La limite supérieure des fréquences des ultra-sons utilisés était de l'ordre de trente mégahertz.

Le regain sensible d'intérêt pour ce sujet, qui se manifeste depuis ces dernières années, s'explique d'une part par l'avènement du laser, source d'un faisceau de lumière de forme bien définie et de grande densité d'énergie, d'autre part par le développement technologique de transducteurs d'énergie électrique en énergie élastique fonctionnant dans le domaine du gigahertz (paragr. 7. 1), transducteurs d'abord étudiés pour la réalisation des lignes à retard.

La mise en œuvre de ces éléments nouveaux : laser, transducteur à haute fréquence, ouvre à l'interaction élasto-optique un domaine intéressant d'applications liées aux possibilités de modifier rapidement et de manière importante l'intensité, la direction et même la fréquence d'un faisceau lumineux. Cette diffraction des ondes lumineuses par les ondes élastiques reste, par ailleurs, un moyen précieux de mesure des caractéristiques (homogénéité, atténuation, diagramme de rayonnement) d'un faisceau d'ondes élastiques se propageant dans un solide. Elle joue le rôle d'une sonde donnant accès à l'intérieur du solide.

L'objet de ce chapitre est, une fois rappelées les conditions de propagation des ondes lumineuses dans un cristal, de définir le tenseur élasto-optique et de décrire, sans faire appel à de longs développements théoriques, les principaux résultats de l'interaction ondes lumineuses-ondes élastiques. Il nous semble toutefois utile de préciser dès maintenant qualitativement les différentes circonstances de cette interaction souvent désignée par plu-

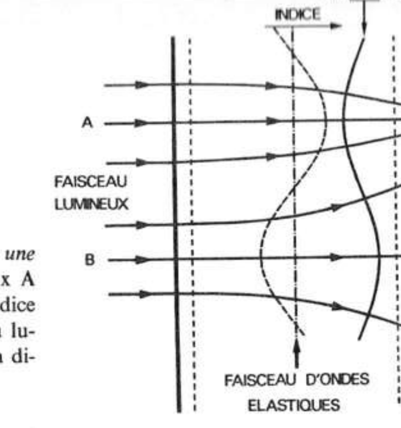


Fig. 8. 1. — *Courbure des rayons lumineux par une onde élastique.* Les rayons du faisceau lumineux A qui traversent une région du matériau où l'indice a augmenté convergent. Les rayons du faisceau lumineux B qui traversent une région où l'indice a diminué divergent.

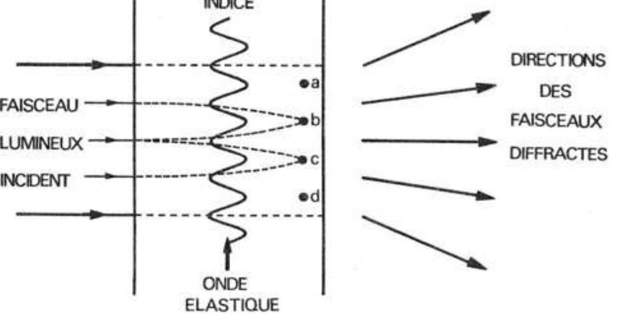


Fig. 8. 2. — *Effet de réseau.*
Lorsque la largeur du faisceau lumineux est grande devant la longueur d'onde élastique, il y a formation, par courbure des rayons lumineux, de nombreux foyers *a*, *b*,... qui jouent le rôle de sources [2]. Les interférences entre les ondes issues de ces sources expliquent l'émission résultante suivant des directions distinctes. Ce fait s'interprète aussi en considérant le déphasage des ondes lumineuses produit par l'onde progressive de variation d'indice (paragr. 8. 4).

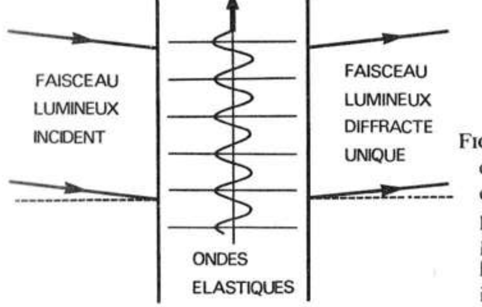


Fig. 8. 3. — *Effet Bragg.* Pour une inclinaison correcte du faisceau incident, et à condition que les rayons lumineux coupent plusieurs plans d'ondes élastiques homologues, il est possible d'obtenir un faisceau diffracté unique, les autres (de la figure 8. 2) se détruisant par interférence.

... effet Brillouin, effet Debye et Sears, effet Lucas-Biquard, effet Raman-Nath, effet Bragg.

8. 1. — PRINCIPAUX CAS D'INTERACTION

Trois cas principaux peuvent être distingués :

— Le premier, illustré par la figure 8. 1, se rapporte à un faisceau lumineux de largeur inférieure à la longueur d'onde élastique. La variation lente de l'indice optique du milieu courbe seulement les rayons lumineux (phénomène de mirage).

— Le deuxième, représenté sur la figure 8. 2 suppose que la largeur du faisceau lumineux est grande devant la longueur d'onde élastique. La variation périodique de l'indice engendre des faisceaux d'intensités et de directions différentes. Ce fait peut s'interpréter en admettant qu'il y a formation, par courbure des rayons lumineux, de nombreux foyers qui jouent le rôle de sources [2]. Les interférences entre les ondes issues de ces sources expliquent la division du faisceau en plusieurs faisceaux distincts. Ce phénomène s'analyse aussi en considérant le déphasage des ondes lumineuses produit par l'onde progressive de variation d'indice [4]. C'est le point de vue que nous adoptons ici. Si le lecteur est attiré par des théories plus générales s'appuyant directement sur les équations de Maxwell, il peut consulter les articles cités en bibliographie.

— Dans le troisième cas (fig. 8. 3) l'angle entre le faisceau lumineux incident et le faisceau élastique et la largeur de ce dernier sont choisis pour qu'il n'émerge qu'un seul faisceau lumineux, les autres faisceaux se détruisant par interférence.

En général, le terme effet Brillouin est utilisé pour désigner tout couplage entre ondes électromagnétiques et ondes élastiques (cohérentes ou pas). L'un des trois couples de noms : Debye et Sears, Lucas et Biquard, Raman et Nath est employé, suivant les pays, pour décrire le deuxième cas. Le nom d'effet Bragg est très souvent donné au troisième cas car il rappelle la diffraction des rayons X par les plans cristallins.

8. 2. — PROPAGATION DES ONDES LUMINEUSES DANS LES CRISTAUX

La transmission de la lumière à travers les cristaux au repos fait intervenir des phénomènes de double réfraction ou biréfringence liés à l'anisotropie naturelle du milieu cristallin : une lame de calcite ($CaCO_3$) dédouble un faisceau lumineux incident en faisceaux polarisés rectilignement suivant deux directions perpendiculaires. L'anisotropie, cause de cette double réfraction, peut être accentuée et même créée dans les milieux isotropes ou dans les cristaux du système cubique où elle n'existe pas naturellement, par l'application de « forces extérieures » : champ électrique (effet électro-optique) ou déformation mécanique (effet élasto-optique étudié ici).

Le comportement des cristaux, vis-à-vis des ondes lumineuses, s'interprète bien à l'aide de l'ellipsoïde des indices — ou de la surface des indices — à laquelle conduit l'application des équations de Maxwell qui régissent la propagation des ondes électromagnétiques. Résumons l'essentiel de ce qu'il faut savoir.

8. 2. 1. — *Ellipsoïde des indices*

Dans un milieu *isotrope*, quelle que soit la direction examinée et sa polarisation, une onde lumineuse se propage à la vitesse v :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{v_0}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{v_0}{n}$$

ε_0, μ_0 étant les constantes diélectrique et magnétique du vide; ε, μ, $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ étant celles, absolues et relatives, du milieu; v_0 est la vitesse de la lumière dans le vide; $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ est l'indice de réfraction du milieu. Pour un matériau non magnétique $\mu_r = 1 \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r}$. Nous n'utiliserons dans ce chapitre que la permittivité relative; pour alléger les notations nous supprimons l'indice r. L'ellipsoïde des indices d'équation

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{\varepsilon} = \frac{x_i^2}{n^2} = 1 \quad \text{ou} \quad Bx_i^2 = 1 \quad \text{avec} \quad B = \frac{1}{\varepsilon}$$

est une sphère.

Les propriétés diélectriques d'un milieu *anisotrope* se traduisent par le tenseur symétrique ε_{ij} ou par le tenseur inverse B_{ij}, appelé impermittivité

$$\varepsilon_{ij} B_{jk} = \delta_{ik} \qquad (8.\ 1)$$

auquel correspond l'ellipsoïde des indices d'équation

$$B_{ij} x_i x_j = 1. \qquad (8.\ 2)$$

La résolution des équations de Maxwell, compte tenu de la relation $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j$, aboutit à l'existence possible, pour une direction donnée, de deux ondes planes polarisées perpendiculairement et se propageant à deux vitesses distinctes. Les polarisations de ces deux ondes et leurs vitesses sont fournies par l'ellipsoïde des indices :

Les directions des vecteurs induction $\vec{D}^{(1)}$ et $\vec{D}^{(2)}$ des deux ondes sont portées par les axes de l'ellipse résultant de l'intersection de l'ellipsoïde des indices, lié au cristal, avec le plan d'onde diamétral P perpendiculaire au vecteur d'onde $\vec{K}$ (fig. 8. 4). Les indices, qui donnent les vitesses, sont respectivement égaux aux longueurs des demi-axes de l'ellipse.

… évidemment la symétrie des cristaux dont elle décrit les propriétés optiques. Il en résulte que les cristaux sont à séparer en trois groupes. Ce résultat se déduit aussi de l'examen du tenseur symétrique B_{ij} après réduction de ses composantes par la symétrie du cristal (paragr. 3. 4. 3).

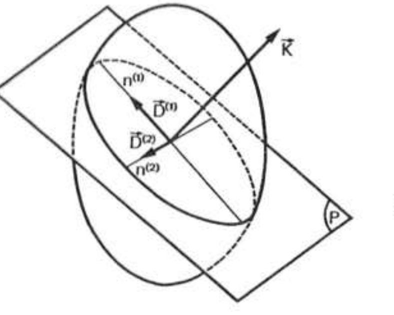


FIG. 8. 4. — *Ellipsoïde des indices.* Deux ondes de polarisations $\vec{D}^{(1)}$ et $\vec{D}^{(2)}$ perpendiculaires peuvent se propager dans la direction $\vec{K}$, respectivement avec les vitesses $v_1 = v_0/n^{(1)}$, $v_2 = v_0/n^{(2)}$.

CRISTAUX BIAXES. — Ils ne possèdent aucun axe d'ordre supérieur à deux et appartiennent donc aux systèmes triclinique, monoclinique, orthorhombique. Les trois axes principaux d'un ellipsoïde quelconque sont axes de symétrie binaires. Si le cristal possède un axe binaire (système monoclinique) ou trois axes binaires (système orthorhombique), ils coïncident nécessairement avec un des axes ou les trois axes principaux de l'ellipsoïde. Pour les cristaux du système triclinique, il n'existe, de ce point de vue, aucune exigence particulière. Dans le système des axes principaux, l'équation de l'ellipsoïde des indices est :

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \qquad (8.\ 3)$$

où n_1, n_2, n_3 (*) — longueurs des demi-axes — sont les indices principaux. Un ellipsoïde quelconque possède deux sections diamétrales circulaires qui sont symétriques par rapport à deux des axes principaux et qui contiennent le troisième. Les normales à ces deux sections remarquables sont appelées *axes optiques* : il ne subsiste qu'un seul indice égal au rayon du cercle et aucune polarisation particulière n'est imposée; donc suivant chacune de ces directions, toutes les ondes ont la même vitesse : il n'y a pas de double réfraction. Les cristaux se comportent comme des matériaux isotropes pour ces directions privilégiées.

CRISTAUX UNIAXES. — Possédant un axe de symétrie A_n d'ordre n supérieur à deux, ils appartiennent aux systèmes trigonal, tétragonal, hexagonal. L'ellipsoïde des indices dont un des axes principaux coïncide avec A_n est un ellipsoïde de révolution. Le plan d'onde perpendiculaire à A_n coupe l'ellipsoïde suivant un cercle, la polarisation est indéterminée et l'indice, égal au rayon du cercle, est unique : le cristal se comporte comme un milieu isotrope pour les ondes se propageant suivant l'axe A_n, appelé axe optique. L'ellipsoïde des indices des cristaux uniaxes est ainsi défini par deux nombres n_0 et n_e; n_0 est l'indice ordinaire égal au rayon du cercle-section, n_e est l'indice extraordinaire égal au rayon vecteur suivant l'axe de révolution A_n. L'ellipsoïde des indices d'équation :

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_0^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1 \qquad (8.\ 4)$$

est allongé suivant l'axe optique si $n_e > n_0$, le cristal est uniaxe positif (quartz); si $n_e < n_0$ l'ellipsoïde est aplati, le cristal est uniaxe négatif. Le but de l'exercice 8. 1 est de montrer que l'indice d'une des vibrations est indépendant de la direction de propagation (n_0); celui de l'autre vibration varie entre n_0 et n_e.

CRISTAUX OPTIQUEMENT ISOTROPES. — Ils possèdent plusieurs axes de symétrie d'ordre supérieur à deux et appartiennent donc au système cubique ($4A_3$). L'ellipsoïde des indices devant posséder plusieurs axes de révolution est nécessairement une sphère définie par un seul indice. Toute onde lumineuse se propage dans ces cristaux comme dans un verre ou un liquide, à la même vitesse et en conservant sa polarisation originelle quelle que soit la direction. Complétons ce paragraphe par deux remarques :

— L'écart entre les indices principaux est toujours petit, quel que soit le cristal, contrairement à ce que suggèrent les figures sur lesquelles les différences sont, pour des raisons de clarté, volontairement exagérées. L'ellipsoïde des indices est très proche d'une sphère. Pour le quartz $n_0 = 1{,}5442$ et $n_e = 1{,}5533$.

— Les permittivités varient avec la fréquence et à un domaine limité de fréquences correspond un ellipsoïde particulier. Ainsi dans un matériau piézoélectrique, les constantes diélectriques qui déterminent l'ellipsoïde des indices sont différentes de celles qui figurent dans l'expression de la vitesse des ondes élastiques.

8. 2. 2. — *Surface des indices*

D'après ce qui précède, l'ellipsoïde des indices s'obtient en portant suivant la direction de vibration une longueur proportionnelle à l'indice. Une autre surface utile, appelée surface des indices, se trace en portant une longueur encore égale à l'indice mais suivant le vecteur d'onde $\vec{K}$. Comme l'indice est inversement proportionnel à la vitesse, cette surface caractéristique est semblable à celles que nous avons utilisées en élasticité dynamique (surfaces des lenteurs). Elle comprend deux nappes puisque

(*) Les lettres K, n_1, n_2, n_3 ont désigné, dans les chapitres précédents, le coefficient de couplage électromécanique et les composantes de la direction de propagation. Comme ces grandeurs ne sont pas utilisées ici, il n'y a pas de confusion possible.

deux vibrations orthogonales peuvent se propager suivant une direction quelconque. La forme de la surface des indices pour un cristal uniaxe positif est dessinée sur la figure 8. 5.

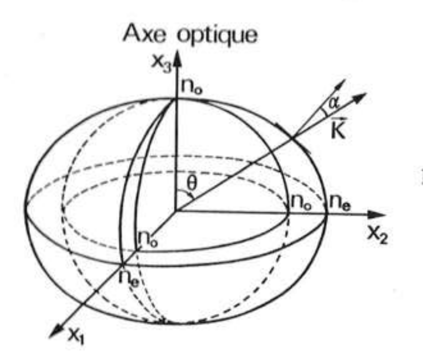


FIG. 8. 5. — *Surface des indices d'un cristal uniaxe positif* ($n_e > n_0$). Elle se construit en portant sur le vecteur d'onde $\vec{K}$ les deux valeurs des indices $n^{(1)} = n_0 = C^{te}$ et $n^{(2)}$. Le rayon extraordinaire fait un angle α avec $\vec{K}$, nul seulement pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

Une des nappes est sphérique puisqu'une des vibrations — la vibration ordinaire — se propage à la vitesse constante $v_{or} = v_0/n_0$ quelle que soit la direction. L'autre nappe est un ellipsoïde tangent à la sphère sur l'axe optique et de demi-grand axe égal à n_e. L'énergie se propage suivant la normale qui, pour la nappe elliptique, fait un angle α, fonction de la direction, avec le vecteur d'onde (fig. 8. 5). Cet angle ne s'annule que suivant les axes principaux. L'intérêt de la surface des indices est de se prêter à une construction simple de l'onde plane réfractée à partir de l'onde plane incidente (voir au paragr. 8. 4. 2. 5 le diagramme de vecteurs d'onde).

8. 3. — LE TENSEUR ÉLASTO-OPTIQUE

Les propriétés optiques d'un cristal au repos sont donc représentées par l'ellipsoïde des indices d'équation :

$$B_{ij}x_ix_j = 1.$$

Une déformation S_{kl} subie par le cristal entraîne une modification de l'ellipsoïde des indices qui se traduit par une variation ΔB_{ij} du tenseur B_{ij} :

$$\boxed{\Delta B_{ij} = p_{ijkl}S_{kl}}\,. \qquad (8.\ 5)$$

Les quantités sans dimension p_{ijkl} sont les composantes du tenseur élasto-optique de rang quatre.

La variation ΔB_{ij} peut s'exprimer aussi en fonction des contraintes T_{kl} :

$$\Delta B_{ij} = \pi_{ijkl}T_{kl}. \qquad (8.\ 6)$$

Le tenseur π_{ijkl} est appelé tenseur piézo-optique. En tenant compte de la loi de Hooke :

$$T_{kl} = c_{klmn}S_{mn}$$

il vient

$$p_{ijmn} = \pi_{ijkl}c_{klmn}. \qquad (8.\ 7)$$

Remarquons que les tenseurs B_{ij} et S_{kl} étant symétriques, les indices du tenseur élasto-optique peuvent être contractés. En posant

$$B_{ij} = B_\alpha$$

et, comme au paragraphe 4. 3 :

$$S_\beta = \begin{cases} S_{kl} & \text{si} \quad \beta \leqslant 3 \\ 2S_{kl} & \text{si} \quad \beta > 3 \end{cases}$$

la relation 8. 5 s'écrit en notation matricielle

$$\Delta B_\alpha = p_{\alpha\beta}S_\beta \qquad (8.\ 8)$$

avec

$$p_{\alpha\beta} = p_{ijkl} \qquad \forall\ \alpha,\ \beta = 1, 2,..., 6.$$

Toutefois en général $p_{\alpha\beta}$ est différent de $p_{\beta\alpha}$, contrairement aux constantes élastiques pour lesquelles l'existence d'un potentiel thermodynamique exige la symétrie en α et β (paragr. 4. 4). Le tenseur élasto-optique des cristaux du système triclinique compte donc 36 composantes indépendantes. La réduction du nombre des composantes avec la symétrie du cristal s'effectue selon la méthode exposée au paragraphe 4. 5. Les résultats, rassemblés dans le tableau de la figure 8. 6, s'appliquent aussi aux composantes piézo-optiques π_{ijkl}. Pour obtenir les relations entre les constantes $\pi_{\alpha\beta}$ définies par $\Delta B_\alpha = \pi_{\alpha\beta}T_\beta$ il faut tenir compte de la correspondance :

$$\pi_{\alpha\beta} = \pi_{ijkl} \quad \text{si} \quad \beta \leqslant 3 \qquad \text{et} \qquad \pi_{\alpha\beta} = 2\pi_{ijkl} \quad \text{si} \quad \beta > 3. \qquad (8.\ 9)$$

Les coefficients élasto-optiques varient peu pour les solides utilisés en pratique, ils sont de l'ordre de 0,2 à 0,3 comme l'indique le tableau 8. 7. En conséquence les variations ΔB_{ij}, avec $S \simeq 10^{-5}$, restent petites : 10^{-6} environ.

Il est utile de relier les variations ΔB_{jk} et $\Delta\varepsilon_{il}$ des composantes des tenseurs d'impermittivité B_{ij} et de permittivité diélectriques ε_{il}. Comme ces variations sont petites, elles s'obtiennent en différentiant la relation 8. 1 de définition du tenseur B_{jk} :

$$\Delta\varepsilon_{ij}B_{jk} + \varepsilon_{ij}\,\Delta B_{jk} = 0.$$

Il vient après contraction avec ε_{kl} comme $B_{jk}\varepsilon_{kl} = \delta_{jl}$

$$\Delta\varepsilon_{il} = -\ \varepsilon_{ij}\,\Delta B_{jk}\varepsilon_{kl}$$

soit en fonction des déformations

$$\boxed{\Delta\varepsilon_{il} = -\ \varepsilon_{ij}p_{jkmn}\varepsilon_{kl}S_{mn}}\,. \qquad (8.\ 10)$$

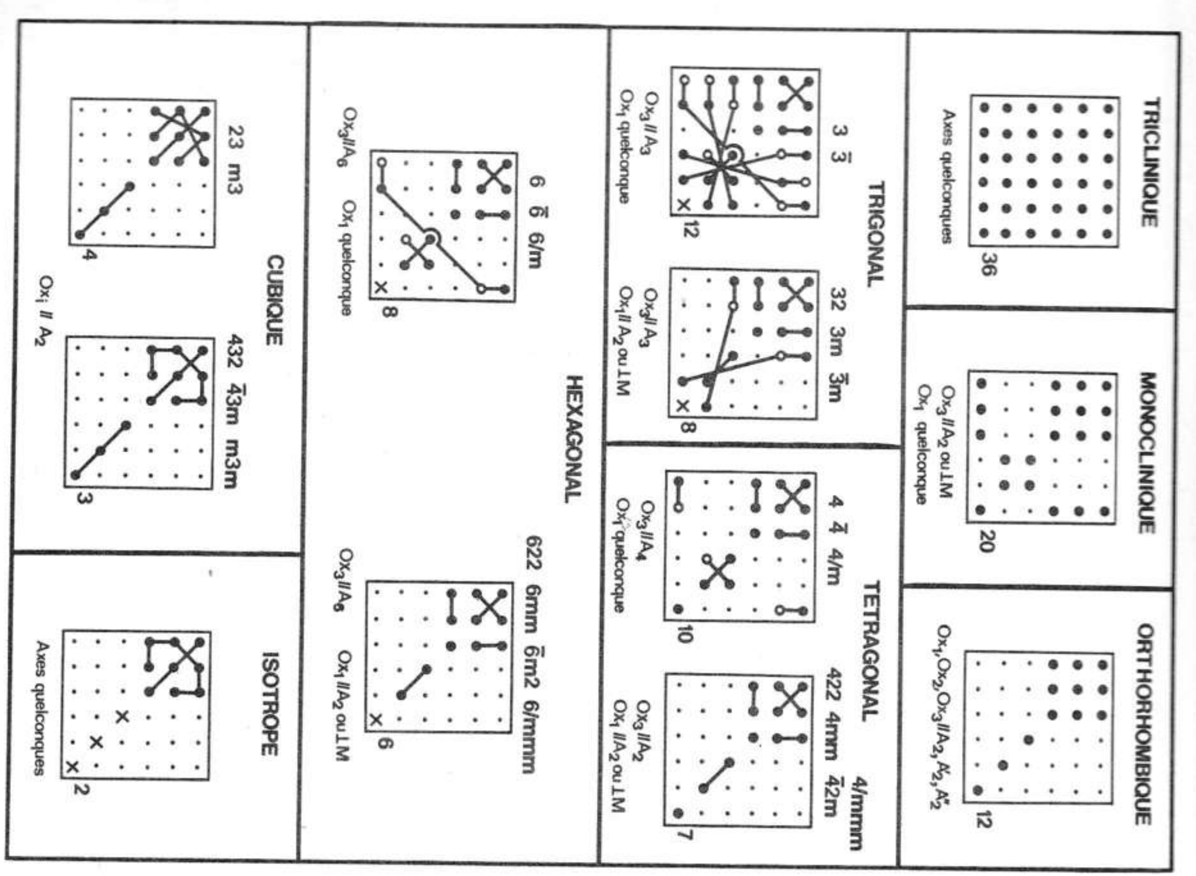


FIG 8. 6. — *Tableau des matrices élasto-optiques* $p_{\alpha\beta}$

● ○ composante non nulle — composante nulle

●—● composantes égales ●—○ composantes opposées

× composante égale à $(p_{11} - p_{12})/2$.

TABLEAU 8. 7. — *Constantes élasto-optiques de quelques matériaux mesurées par diffraction de la lumière du laser* He-Ne (0,6328 µm), *excepté pour le quartz* (Λ_0 = 0,589 µm)

MATÉRIAUX	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	p_{13}	p_{31}	p_{33}	p_{23}	p_{32}	p_{14}	p_{41}	p_{44}	p_{45}	p_{55}	p_{16}	p_{61}	p_{66}	RÉF.
Silice (isotrope)	0,121	0,270	p_{12}	p_{11}	p_{12}	p_{12}	p_{11}	p_{12}	p_{12}	0	0	[-0,075]	0	p_{44}	0	0	p_{44}	[5]
α-HIO_3(222)..	0,406	0,277	0,279	0,343	0,304	0,503	0,334	0,305	0,310	0	0	—	0	—	0	0	0,092	[6]
$PbMoO_4$(4/*m*).	0,24	0,24	p_{12}	p_{11}	0,255	0,175	0,300	p_{13}	p_{31}	0	0	0,067	-0,01	p_{44}	0,017	0,013	0,05	[14] chap.4
TiO_2(4/*mmm*)..	0,011	0,172	p_{12}	p_{11}	0,168	0,096	0,058	p_{13}	p_{31}	0	0	—	0	p_{44}	0	0	—	[7]
TeO_2(422)	0,007	0,187	p_{12}	p_{11}	0,340	0,090	0,240	p_{13}	p_{31}	0	0	-0,17	0	p_{44}	0	0	-0,046	[8]
$LiNbO_3$(3*m*) ..	0,036	0,072	p_{12}	p_{11}	0,092	0,178	0,088	p_{13}	p_{31}	0,07(ᵃ)	0,155	—	0	p_{44}	0	0	[-0,018]	[7]
$LiTaO_3$(3*m*) ..	0,080	0,080	p_{12}	p_{11}	0,094	0,086	0,150	p_{13}	p_{31}	0,031	0,024	0,022	0	p_{44}	0	0	[0,00]	[7]
Quartz α(32) ..	0,138	0,250	p_{12}	p_{11}	0,259	0,258	0,098	p_{13}	p_{31}	-0,029	-0,042	-0,068	0	p_{44}	0	0	[-0,056]	[9]

(ᵃ) Valeur déterminée par J. REINTJES and M. B. SCHULZ. — *J. Appl. Phys.*, *39*, 5254 (1968).

Les valeurs entre crochets sont égales à $\frac{p_{11} - p_{12}}{2}$.

A titre d'exemple, calculons pour un *cristal cubique de la classe m3m*, les variations $\Delta\varepsilon_{il}$ et Δn pour une déformation S_{11}. Le tenseur diélectrique d'un cristal cubique est :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}$$

si bien que

$$\Delta\varepsilon_{il} = -\varepsilon^2 p_{ilmn} S_{mn}$$

soit pour une déformation S_{11}

$$\Delta\varepsilon_{il} = -\varepsilon^2 p_{il11} S_{11}.$$

D'après le tableau 8. 6 les seuls coefficients élasto-optiques p_{il11} des cristaux de la classe *m3m* sont :

$$p_{1111} = p_{11} \qquad p_{2211} = p_{12} \qquad \text{et} \qquad p_{3311} = p_{12}.$$

Les variations des permittivités sont :

$$\Delta\varepsilon_{11} = -\varepsilon^2 p_{11} S_{11} \qquad \Delta\varepsilon_{22} = \Delta\varepsilon_{33} = -\varepsilon^2 p_{12} S_{11}$$

et

$$\Delta\varepsilon_{il} = 0 \qquad \text{si} \qquad i \neq l.$$

Comme le tenseur ε_{ij} reste diagonal, les axes de référence sont les axes principaux de l'ellipsoïde des indices du cristal déformé d'indices principaux

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{11}} \qquad n_2 = n_3 = \sqrt{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{22}}.$$

Les variations $\Delta\varepsilon_{ii}$ étant petites et $n = \sqrt{\varepsilon}$

$$n_i \simeq n\left(1 + \frac{\Delta\varepsilon_{ii}}{2\varepsilon}\right) = n + \Delta n_i$$

avec

$$\Delta n_i = \frac{\Delta\varepsilon_{ii}}{2n}$$

soit

$$\Delta n_1 = -\frac{n^3}{2} p_{11} S_{11} \tag{8. 11}$$

$$\Delta n_2 = \Delta n_3 = -\frac{n^3}{2} p_{12} S_{11}. \tag{8. 12}$$

Le cristal devient uniaxe d'axe optique Ox_1. Il est à noter qu'il y a biréfringence pour une onde lumineuse de polarisation quelconque pénétrant dans le cristal suivant Ox_2 ou Ox_3, néanmoins la polarisation se conserve si elle est parallèle à un des axes principaux. L'onde ne subit qu'un retard (ou une avance) de phase si l'indice augmente (ou diminue) suivant cet axe. C'est ce cas simple que nous envisageons dans ce qui suit.

8. 4. — DIFFRACTION DES ONDES LUMINEUSES PAR UN FAISCEAU D'ONDES ÉLASTIQUES

Ainsi, le tenseur diélectrique et l'indice optique d'un matériau sont fonctions des déformations qu'il subit. En conséquence, toute onde élastique qui parcourt un solide est accompagnée d'une onde de variation d'indice qui progresse à la même vitesse. Pour analyser son action sur des ondes lumineuses, examinons le cas le plus simple où il n'y a pas de changement de polarisation : milieu optiquement isotrope, onde élastique longitudinale sinusoïdale, faisceau lumineux monochromatique, de polarisation perpendiculaire ou parallèle au vecteur d'onde élastique, sous incidence normale, puis sous incidence oblique (angle de Bragg).

8. 4. 1. — Incidence normale

La succession de compressions et de dilatations qui composent l'onde élastique se propageant dans la direction Ox_1 engendre respectivement une augmentation et une diminution de l'indice par rapport à la valeur au repos n_0 :

$$n = n_0 + \Delta n \sin \omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right) \tag{8. 13}$$

ω et V étant la fréquence angulaire et la vitesse de propagation des ondes élastiques.

Les vibrations lumineuses qui traversent le matériau en un endroit où l'indice augmente se propagent plus lentement que celles qui traversent le matériau en un endroit où l'indice diminue. L'expression de l'onde lumineuse se propageant dans la direction x_2 est :

$$a = A \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{\Lambda_0} n x_2\right) \tag{8. 14}$$

en prenant l'origine des phases à l'entrée $(x_2 = 0)$ du faisceau élastique (fig. 8. 8); Λ_0 est la longueur d'onde lumineuse dans le vide.

Toute atténuation étant négligée, l'onde lumineuse après la traversée du faisceau élastique d'épaisseur e est :

$$a = A \cos\left[\Omega t + \Phi_0 + \Delta\Phi \sin \omega\left(t - \frac{x_1}{V}\right)\right] \tag{8. 15}$$

où $\Phi_0 = -\frac{2\pi n_0}{\Lambda_0} e = -\frac{2\pi}{\Lambda} e$ est le déphasage dû à l'indice moyen n_0 et

$$\Delta\Phi = -\frac{2\pi e}{\Lambda_0}\Delta n.$$

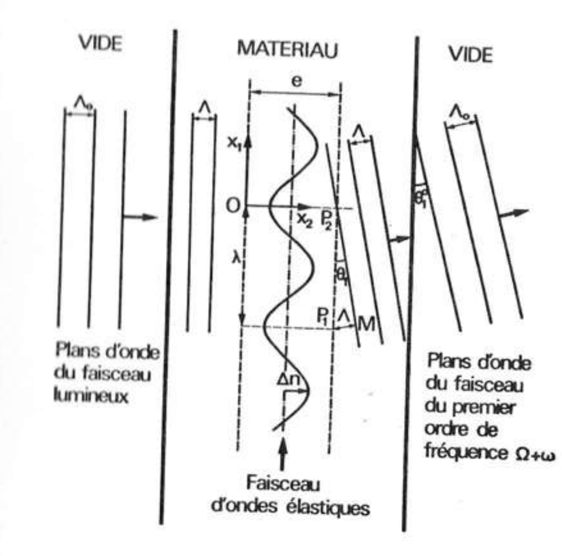


FIG. 8. 8. — *Le déphasage de 2π (dû à la variation d'indice Δn) entre les points P_1 et P_2, séparés d'une longueur d'onde élastique λ, détermine l'inclinaison (θ_1) du front d'onde du faisceau du premier ordre de fréquence $\Omega + \omega$: $\sin\theta_1 = \Lambda/\lambda$.* Dans le vide, après traversée du matériau, l'angle de déviation est θ_1^0 tel que $\sin\theta_1^0 = \Lambda_0/\lambda$.

En chaque point de la frontière du faisceau élastique ($x_2 = e$, x_1 fixé), c'est une onde modulée en phase dont la modulation ne dépend que du temps. Cherchons le spectre de cette onde. En posant $\tau = t - x_1/V$, l'expression 8. 15 se décompose :

$$\frac{a}{A} = \cos(\Delta\Phi \sin\omega\tau)\cos(\Omega t + \Phi_0) - \sin(\Delta\Phi\sin\omega\tau)\sin(\Omega t + \Phi_0). \qquad (8.\ 16)$$

Les termes $\cos(\Delta\Phi\sin\omega\tau)$ et $\sin(\Delta\Phi\sin\omega\tau)$ se développent à l'aide des fonctions de Bessel :

$$\cos(\Delta\Phi\sin\omega\tau) = J_0(\Delta\Phi) + 2\sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(\Delta\Phi)\cos 2p\omega\tau$$

$$\sin(\Delta\Phi\sin\omega\tau) = 2\sum_{p=1}^{\infty} J_{2p-1}(\Delta\Phi)\sin(2p-1)\omega\tau.$$

Ces développements portés dans l'expression 8. 16

$$\frac{a}{A} = J_0(\Delta\Phi)\cos(\Omega t + \Phi_0) + \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(\Delta\Phi)\ 2\cos(\Omega t + \Phi_0)\cos 2p\omega\tau - \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p-1}(\Delta\Phi)\ 2\sin(\Omega t + \Phi_0)\sin(2p-1)\omega\tau$$

conduisent, en transformant les produits de fonctions trigonométriques en somme, à

$$\frac{a}{A} = J_0(\Delta\Phi)\cos(\Omega t + \Phi_0) + \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(\Delta\Phi)\left[\cos(\Omega t + 2p\omega\tau + \Phi_0) + \cos(\Omega t - 2p\omega\tau + \Phi_0)\right] + \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p-1}(\Delta\Phi)\left[\cos(\Omega t + (2p-1)\omega\tau + \Phi_0) - \cos(\Omega t - (2p-1)\omega\tau + \Phi_0)\right]$$

ou de façon plus concise :

$$\frac{a}{A} = J_0(\Delta\Phi)\cos(\Omega t + \Phi_0) + \sum_{N=1}^{\infty} J_N(\Delta\Phi)\left[\cos(\Omega t + N\omega\tau + \Phi_0) + (-1)^N\cos(\Omega t - N\omega\tau + \Phi_0)\right]. \qquad (8.\ 17)$$

Le spectre de la vibration lumineuse comprend une raie centrale (porteuse) de fréquence Ω et des raies latérales symétriques de fréquence $\Omega \pm N\omega$ puisque $\tau = t - x_1/V$, N étant un entier. L'amplitude de l'onde porteuse et des ondes latérales sont les fonctions de Bessel J_0, J_1, J_2 de l'excursion de phase $\Delta\Phi$ (fig. 8. 9).

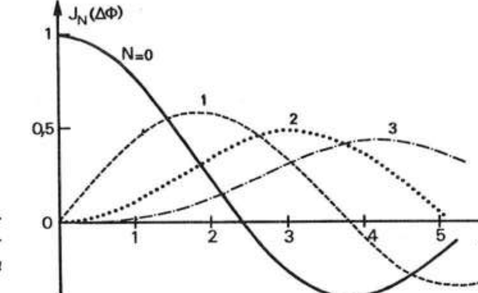


FIG. 8. 9. — *Fonctions de Bessel J_0, J_1, J_2... représentant les amplitudes de l'onde porteuse et des composantes spectrales en fonction de l'excursion de phase $\Delta\Phi$.*

A un instant donné, la phase de l'onde porteuse $\Phi_0 = -2\pi e/\Lambda$ ne dépend pas de x_1, ses plans d'onde sont donc parallèles à ceux de l'onde incidente. Il n'en est pas de même pour les composantes spectrales latérales, telles que

$$J_N(\Delta\Phi)\cos\left[(\Omega + N\omega)t + \Phi_0 - \frac{N\omega x_1}{V}\right]$$

dont la phase Φ_N dépend de x_1, *i. e.* du point d'émergence sur la frontière :

$$\Phi_N = \Phi_0 - \frac{N\omega x_1}{V} = \Phi_0 - 2\pi\frac{N x_1}{\lambda}$$

λ étant la longueur d'onde acoustique. L'interférence des ondes de même fréquence, *i. e.* de même ordre N, émises sur la frontière $x_2 = e$ n'est

constructive que dans une direction repérée par l'angle θ_N (fig. 8. 8). Dans cette direction, pour l'onde émergeant en P_1, par rapport à celle émergeant en P_2, le retard de phase $-\frac{2\pi}{\Lambda} P_1M$ dû à la différence de marche P_1M compense l'avance de phase initiale $\Delta\Phi_N = \frac{2\pi N}{\lambda} P_2P_1$:

$$-\frac{2\pi}{\Lambda} P_1M + 2\pi \frac{N}{\lambda} P_2P_1 = 0$$

soit comme $P_1M = P_2P_1 \sin\theta_N$:

$$\sin\theta_N = N \frac{\Lambda}{\lambda}. \qquad (8.\ 18)$$

La composante spectrale d'ordre N, *de fréquence* $\Omega + N\omega$ *est déviée de l'angle* θ_N *donné par la formule 8. 18.* Quant aux composantes spectrales de fréquence $\Omega - N\omega$ elles sont déviées symétriquement (fig. 8. 10).

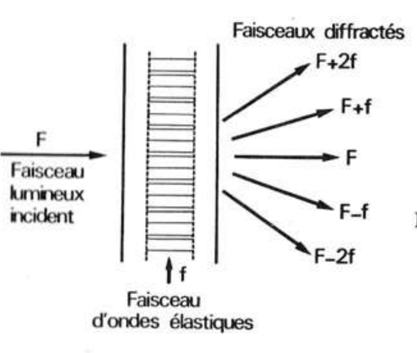


FIG. 8. 10. — *Diffraction de la lumière par un faisceau d'ondes élastiques. Incidence normale.* Le faisceau lumineux est séparé en plusieurs faisceaux inclinés symétriquement par rapport au faisceau incident.

En résumé, la variation sinusoïdale de l'indice, engendrée par l'onde élastique, a sur l'onde lumineuse un effet analogue à celui d'un réseau de phase : le faisceau lumineux pénétrant dans le cristal parallèlement aux plans d'onde élastiques est séparé en plusieurs faisceaux inclinés symétriquement par rapport au faisceau incident d'angles θ_N :

$$\boxed{\sin\theta_N = \pm N \frac{\Lambda}{\lambda}.}$$

Dans le cas de la silice avec des ondes élastiques longitudinales de fréquence 200 MHz et la lumière rouge du laser He-Ne :

$$V_L = 5{,}96 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 30\ \mu\text{m}$$
$$\Lambda_0 = 0{,}633\ \mu\text{m} \quad \text{et} \quad n = 1{,}46 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0{,}433\ \mu\text{m}$$
$$\sin\theta_1 \simeq \theta_1 = 1{,}45 \cdot 10^{-2} \text{ rd} = 0°\ 50'.$$

ÉPAISSEUR CRITIQUE. — Le raisonnement précédent ne s'applique en fait que si l'épaisseur e du faisceau élastique est inférieure à une valeur critique e_c. En effet les ondes latérales sont engendrées tout au long du trajet de l'onde porteuse à l'intérieur du faisceau ultrasonore et non seulement à la sortie, sur la frontière. Divisons par la pensée le faisceau élastique en tranches minces parallèles à la direction de propagation x_1. Pour chacune de ces tranches l'analyse spectrale précédente est valable : les fréquences $\Omega + N\omega$ et la direction de propagation θ_N des ondes latérales sont les mêmes pour les tranches d'abscisses x_2 et $x_2 + l$ (fig. 8. 11). Additionnons, pour un ordre donné, les contributions de ces deux tranches distantes de l. Le front de l'onde latérale émise à l'instant $t - l/v$ au point x_2, qui progresse suivant θ_N, est arrivé en Q_1 à l'instant t, tandis que le front de l'onde latérale émise en $x_2 + l$ à l'instant t est en Q_2. Les deux ondes sont déphasées de

$$\eta = \frac{2\pi l}{\Lambda}(1 - \cos\theta_N)$$

θ_N étant petit :

$$\cos\theta_N \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{N\Lambda}{\lambda}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \eta \simeq \frac{\pi l \Lambda}{\lambda^2} N^2.$$

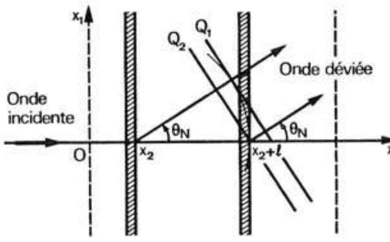


FIG. 8. 11. — *Incidence normale. Épaisseur critique.* Le front de l'onde latérale lumineuse d'ordre N, émise à l'instant $t - l/v$ en x_2 progresse suivant θ_N et est arrivé en Q_1 à l'instant t. Le front de l'onde latérale de même ordre émise en $x_2 + l$, à l'instant t, est en Q_2. Les deux ondes sont déphasées de

$$\eta = \frac{2\pi l}{\Lambda}(1 - \cos\theta_N) \simeq \frac{\pi l \Lambda}{\lambda^2} N^2.$$

Il y a opposition de phase lorsque $\eta = \pi$ soit pour une distance

$$l_N = \frac{\lambda^2}{\Lambda} \cdot \frac{1}{N^2}$$

L'interférence des ondes émises par les deux tranches distantes de l_N est alors destructive. Si la largeur du faisceau est supérieure à l_N, l'effet d'une tranche est annulé par la tranche distante de l_N. Dans les meilleures conditions, l'épaisseur e du faisceau élastique ne doit pas dépasser la valeur critique du premier ordre :

$$e_c = l_1 = \frac{\lambda^2}{\Lambda}. \qquad (8.\ 19)$$

Cette limitation est d'autant plus difficile à satisfaire que la fréquence ω est élevée. Exemple, pour de la silice et $\Lambda_0 = 0{,}633\ \mu m$ ($\Lambda = 0{,}433\ \mu m$) :

$$\text{à } 100 \text{ MHz} \quad e_c = 8{,}4 \text{ mm}, \qquad \text{à } 300 \text{ MHz} \quad e_c = 0{,}93 \text{ mm}.$$

8. 4. 2. — Incidence à l'angle de Bragg

L'interaction à l'angle de Bragg, la plus importante en pratique puisqu'elle ne fournit qu'un seul faisceau dévié, s'obtient en inclinant le faisceau incident d'un angle α de façon à rendre constructives les interférences pour le premier ordre de fréquence angulaire $\Omega + \omega$ (fig. 8. 12).

8. 4. 2. 1. — Angle d'incidence. — Cherchons l'angle de déviation θ pour une incidence oblique α en écrivant que pour deux points P_1 et P_2 d'une tranche parallèle à Ox_1 le retard de phase dû à la différence de marche des rayons lumineux compense l'avance de phase due à l'onde élastique :

$$-\frac{2\pi}{\Lambda}(HP_1 + P_1K) + 2\pi\frac{P_1P_2}{\lambda} = 0$$

soit

$$\sin\alpha + \sin(\theta - \alpha) = \frac{\Lambda}{\lambda}. \qquad (8.\ 20)$$

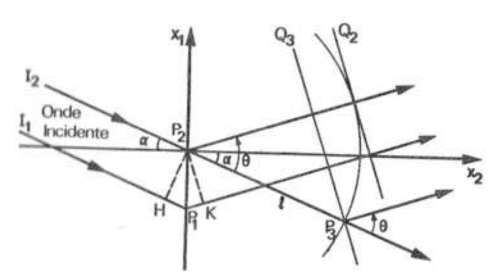


Fig. 8. 12. — *Incidence oblique.* Pour rendre constructives les interférences entre les ondes latérales du premier ordre, il faut que les effets produits par deux rayons incidents I_1P_1 et I_2P_2 s'ajoutent : $\sin\alpha + \sin(\theta - \alpha) = \Lambda/\lambda$ ainsi que ceux créés sur son parcours par chaque rayon :

$$1 - \cos\theta = \frac{\Lambda}{\lambda}\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{\theta}{2}.$$

Établissons la relation entre α et θ pour que les ondes latérales émises en deux points P_2 et P_3 d'un rayon lumineux incident soient en phase quelle que soit leur distance l. A un instant t, le déphasage η entre les plans d'ondes Q_2 et Q_3 comprend un terme dû à la propagation en biais $\frac{2\pi l}{\Lambda}(1 - \cos\theta)$ et un terme dû à l'onde élastique : $-\frac{2\pi l}{\lambda}\sin\alpha$:

$$\eta = 2\pi l\left(\frac{1 - \cos\theta}{\Lambda} - \frac{\sin\alpha}{\lambda}\right).$$

Le déphasage η est nul, quel que soit l, si

$$1 - \cos\theta = \frac{\Lambda}{\lambda}\sin\alpha$$

soit, compte tenu de la relation 8. 20 qui s'écrit

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)$$

lorsque

$$\sin\frac{\theta}{2} = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)\sin\alpha.$$

Cette équation est satisfaite pour $\alpha = \theta/2$; l'angle d'incidence α est donné par

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\Lambda}{2\lambda} = \frac{\Lambda f}{2V}} \qquad (8.\ 21)$$

et le faisceau lumineux est dévié de l'angle $\theta = 2\alpha$. Les fronts d'ondes élastiques donnent l'apparence de jouer le rôle de miroirs pour le rayon incident (fig. 8. 13) et la condition 8. 21, qui fait penser à la réflexion sélective des rayons X par les plans réticulaires d'un cristal, est appelée condition de Bragg. L'incidence sous l'angle de Bragg ne favorise que la croissance du faisceau du premier ordre, toutefois l'onde porteuse engendre sur son parcours des ondes latérales de tous ordres. L'effet cumulatif pour le premier ordre, destructif pour les autres, est d'autant plus marqué que le faisceau incident traverse davantage de plans d'ondes homologues, ce qui nécessite, pour α petit :

$$e\alpha \gg \lambda \quad\Rightarrow\quad e \gg \frac{2\lambda^2}{\Lambda} = 2e_c.$$

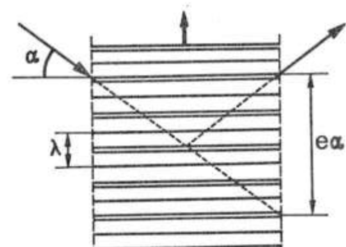


Fig. 8. 13. — *Condition de Bragg.* Un rayon lumineux doit traverser plusieurs fronts d'ondes élastiques.

Notons que si l'inclinaison du faisceau lumineux incident est symétrique par rapport aux fronts d'ondes élastiques de celle de la figure 8. 13, c'est le faisceau du premier ordre de fréquence angulaire $\Omega - \omega$ qui est favorisé.

8. 4. 2. 2. — Intensité du faisceau dévié. Facteur de mérite. — La comparaison des propriétés élasto-optiques des matériaux est facilitée par l'introduction d'un facteur de mérite qui rend compte de la fraction de lumière

déviée sous incidence de Bragg. Soient respectivement A_0 et $A(x_2)$ l'amplitude de l'onde porteuse à l'entrée et après un parcours x_2 dans le faisceau élastique. Étant donné l'approximation

$$J_N(x) \simeq \frac{x^N}{2^N N!} \qquad \text{lorsque} \qquad x \ll 1$$

l'expression 8. 17 de l'onde totale à l'abscisse $x_2 + dx_2$ se réduit, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, à :

$$a(x_2 + dx_2, t) = A(x_2)\cos(\Omega t + \delta\Phi_0) + \frac{A(x_2)}{2}\, d\Phi\,[\cos(\Omega t + \omega\tau + \delta\Phi_0) - \cos(\Omega t - \omega\tau + \delta\Phi_0)] \tag{8. 22}$$

où $$d\Phi = -\frac{2\pi}{\Lambda_0}\,\Delta n\, dx_2 = \frac{\Delta\Phi}{e}\, dx_2 \qquad \text{et} \qquad \delta\Phi_0 = -\frac{2\pi}{\Lambda}\, dx_2$$

$d\Phi$ est l'amplitude du déphasage introduit par la tranche d'épaisseur dx_2. Pour la composante, celle de fréquence $\Omega + \omega$ par exemple, qui satisfait aux conditions de Bragg, les amplitudes des ondes émises par les tranches successives du faisceau élastique s'ajoutent car il y a interférence constructive. L'augmentation dB de l'amplitude $B(x_2)$ de l'onde latérale de pulsation $\Omega + \omega$, produite par la tranche d'épaisseur dx_2 est d'après 8. 22 :

$$dB = \frac{A}{2}\, d\Phi = A\,\frac{\Delta\Phi}{2e}\, dx_2. \tag{8. 23}$$

Elle s'effectue au détriment de la porteuse; la conservation de l'énergie :

$$A^2 + B^2 = A_0^2$$

implique

$$A\, dA + B\, dB = 0$$

soit compte tenu de la relation 8. 23 :

$$\frac{dB}{dx_2} = A\,\frac{\Delta\Phi}{2e} \qquad \text{et} \qquad \frac{dA}{dx_2} = -B\,\frac{\Delta\Phi}{2e}.$$

Les amplitudes A et B vérifient la même équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{dx_2^2} + \left(\frac{\Delta\Phi}{2e}\right)^2 f = 0$$

dont les solutions satisfaisant aux conditions initiales $B = 0$ et $A = A_0$ pour $x_2 = 0$ et à la conservation de l'énergie sont

$$B = A_0 \sin \frac{|\Delta\Phi|}{2e}\, x_2$$

$$A = A_0 \cos \frac{|\Delta\Phi|}{2e}\, x_2.$$

A la sortie du faisceau élastique ($x_2 = e$), l'intensité relative du faisceau de lumière diffracté est

$$\frac{i}{i_0} = \left(\frac{B}{A_0}\right)^2 = \sin^2 \frac{|\Delta\Phi|}{2}. \tag{8. 24}$$

Mettons en évidence dans l'expression $|\Delta\Phi| = \frac{2\pi e}{\Lambda_0}|\Delta n|$ la densité moyenne de puissance élastique par unité de surface :

$$P = \left(\frac{1}{2} c S^2\right) V = \frac{1}{2}\rho V^3 S^2. \tag{8. 25}$$

La variation d'indice est reliée à la déformation $S = \sqrt{2P/\rho V^3}$ par 8. 11

$$|\Delta n| = \frac{n^3}{2}\, pS = \sqrt{\frac{p^2 n^6}{2\rho V^3}\, P}$$

En introduisant le facteur de mérite M du matériau [10]

$$\boxed{M = \frac{p^2 n^6}{\rho V^3}} \tag{8. 26}$$

il vient $$|\Delta\Phi| = \frac{2\pi e}{\Lambda_0}\sqrt{\frac{MP}{2}}.$$

L'intensité relative du faisceau diffracté, donnée par la formule

$$\frac{i}{i_0} = \sin^2\left(\pi\,\frac{e}{\Lambda_0}\sqrt{\frac{MP}{2}}\right) \tag{8. 27}$$

peut théoriquement atteindre l'unité (déviation totale du faisceau incident). La densité de puissance élastique nécessaire pour dévier une fraction donnée de la lumière incidente est inversement proportionnelle au facteur de mérite M qui caractérise le matériau. Comme nous l'avons déjà dit, le coefficient photoélastique p pour les meilleures tailles des cristaux est compris entre 0,2 et 0,3. Les paramètres importants – ils ne sont pas en fait indépendants [11] — sont l'indice n et la vitesse V qui figurent dans l'expression de M respectivement à la puissance 6 et à la puissance 3. L'indice de réfraction ne dépasse guère 2,5 pour les matériaux transparents dans le spectre visible. La vitesse des ondes élastiques longitudinales est comprise entre 1 000 et 10 000 m/s. En général les corps à vitesse faible présentent un fort coefficient d'atténuation pour les ondes élastiques. A ce sujet notons que les liquides, bien que possédant des facteurs de mérite

... la fréquence de fonctionnement atteint 50 MHz. A cette fréquence, pour l'eau par exemple, l'atténuation est supérieure à 5 dB/cm et elle croît comme le carré de la fréquence. Le tableau 8. 14 donne, pour quelques matériaux, le coefficient d'atténuation à 500 MHz et le facteur de mérite rapporté à celui de la silice fondue

$$M_0 = 1{,}51 \cdot 10^{-15}\ s^3\,kg^{-1}$$

$$(n = 1{,}46,\ p = 0{,}27,\ \rho = 2{,}2 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3},\ V = 5\,960\ m/s).$$

L'acide α iodique a un grand facteur de mérite (55) mais présente le gros inconvénient d'être très hygroscopique. Le facteur de mérite très élevé (515) de la paratellurite (TeO_2) provient de la vitesse extraordinairement petite de l'onde transversale dans la direction [110]. Malheureusement son coefficient d'atténuation est excessif au-delà de 100 MHz (6 dB/cm). Le molybdate de plomb ($PbMoO_4$) semble actuellement le matériau le plus intéressant. TiO_2 et $LiNbO_3$ sont indiqués en haute fréquence en raison de leur faible coefficient d'atténuation. Calculons la puissance élastique $\mathscr{P} = Pe^2$ (fournie par un transducteur carré de côté e) nécessaire pour dévier la moitié d'un faisceau laser He-Ne ($\Lambda_0 = 0{,}632\,8\ \mu m$). D'après la formule 8. 27

$$\mathscr{P} = \frac{\Lambda_0^2}{8M}$$

soit 33 W dans le cas de la silice et seulement 1,4 W dans le cas du molybdate de plomb.

8. 4. 2. 3. — Bande passante de l'interaction. — Malgré les conditions strictes de l'interaction à l'angle de Bragg qui fixent pour un angle d'incidence α_0 donné la fréquence f_0 des ondes élastiques, il est possible d'obtenir une certaine bande passante grâce à la divergence naturelle du faisceau d'ondes élastiques. Nous avons établi au paragraphe 1. 3. 6 que le diagramme de rayonnement à grande distance d'une source (transducteur) de largeur $e = a\lambda$ est :

$$A(\Delta\alpha) = A_0\,\frac{\sin(\pi e s/\lambda)}{\pi e s/\lambda} \qquad \text{avec} \qquad s = \sin\Delta\alpha \simeq \Delta\alpha$$

Δα étant l'écart angulaire par rapport à la direction moyenne du faisceau (axe du cristal). L'incidence du faisceau lumineux par rapport au cristal restant inchangée, l'interaction s'effectue à la fréquence f avec les ondes élastiques dont la direction de propagation est inclinée d'un angle Δα (fig. 8. 15). D'après la formule 8. 21 :

$$\Delta\alpha = \frac{\Lambda}{2V}(f - f_0).$$

TABLEAU 8. 14. — *Conditions d'interaction et facteurs de mérite de quelques matériaux*

Matériau	*Onde élastique*			*Onde lumineuse incidente* ($\Lambda_0 = 0{,}6328\ \mu m$)				p_{ij} *approprié*	*Facteur de mérite* $M = \frac{n^6 p^2}{\rho V^3}$
	propag.-polar.	vitesse m/s	atténuation dB/cm (500 MHz)	domaine utile (μm)	propag.-polar. (a)	indices n_0	n_e		
Silice	arbitraire-L	5 960	3,0	0,2-2,5	arbitraire-⊥	1,46		p_{12}	1 $(1{,}51 \cdot 10^{-15})$
α-HIO_3	[001]-L	2 440	2,5 [6]	0,4-1,3	[010]-⊥ ([100])	$n_1 = 1{,}98$ (b)		p_{31}	55
$PbMoO_4$	[001]-L	3 630	2,5 (c)	0,2-0,9	[010]-// ou ⊥	2,38	2,26	p_{33} ou p_{31}	23,7
TiO_2	[100]-L	8 015	0,5 (d)		[001]-⊥ ([010])	2,58	2,9	p_{12}	2,6
TeO_2	[110]-T [1$\bar{1}$0]	616	50 [8]	0,35-5	[001]-arbitraire	2,26	2,41	$\frac{p_{11} - p_{12}}{2}$	515
	[001]-L	4 200	2,3 [8]		[010]-[100]			p_{13}	23
$LiNbO_3$	X-L	6 560	0,03 (e)	0,5-4,5	Y-Z	2,29	2,20	p_{31} (*)	1,8
$LiTaO_3$	Z-L	6 180	0,02 (e)		arbitraire-Z	2,175	2,180	p_{33}	0,9
Quartz-α	Z-L	6 363	0,6 (f)		Y-Z	1,54	1,55	p_{13}	0,87

(a) La polarisation est définie parallèle ou perpendiculaire par rapport au plan des vecteurs d'ondes élastique et optique.
(b) Les deux autres indices principaux de α-HIO_3 (biaxe) sont $n_2 = 1{,}96$ et $n_3 = 1{,}84$.
(c) Réf. 14 du chapitre 4.
(d) M. DUTOIT, *IEEE Trans. Son. Ultrason.*, **SU-20**, 279 (1973).
(e) E. G. SPENCER and P. V. LENZO, *J. Appl. Phys.*, **38**, 423 (1967).
(f) C. D. W. WILKINSON and D. E. CADDES, *J. Acoust. Soc. Am.*, **40**, 498 (1966).
(*) Pour le faisceau qui ne subit pas de changement de polarisation.

Dans l'hypothèse d'interaction faible, l'intensité du faisceau dévié est proportionnelle à la puissance élastique et

$$\frac{i(f)}{i(f_0)} = \left|\frac{A(\Delta\alpha)}{A_0}\right|^2 = \frac{\sin^2\left|\dfrac{\pi e \Lambda f(f-f_0)}{2V^2}\right|}{\left[\dfrac{\pi e \Lambda f(f-f_0)}{2V^2}\right]^2}.$$

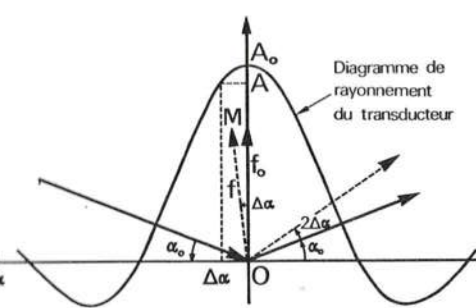


FIG. 8. 15. — *Bande passante de l'interaction compte tenu de la divergence du faisceau d'ondes élastiques.* A une fréquence f différente de f_0, l'interaction s'effectue avec les ondes élastiques dont la direction de propagation OM satisfait à la condition de Bragg

$$\alpha_0 + \Delta\alpha = \Lambda f/2V.$$

L'intensité du faisceau dévié, proportionnelle à A^2, diminue.

La bande passante, supposée étroite ($f \simeq f_0$), vaut à -3 dB (affaiblissement de moitié de l'intensité lumineuse déviée) :

$$\Delta f = \frac{1{,}77\ V^2}{e \Lambda f_0} \qquad (8.\ 28)$$

soit $\Delta f = 100$ MHz pour $V = 4\,000$ m/s, $e = 1{,}5$ mm, $\Lambda_0 = 0{,}63$ µm, $n = 2$, $f_0 = 600$ MHz.

Réciproquement, si on tourne le cristal en laissant constante la fréquence du signal, la variation de l'intensité lumineuse déviée en fonction de l'écart $\Delta\theta$ par rapport à la déviation moyenne θ_0 reproduit le diagramme de rayonnement du transducteur :

$$\frac{i(\theta_0 + \Delta\theta)}{i(\theta_0)} = \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi e f_0 \Delta\theta}{2V}\right)}{\left(\dfrac{\pi e f_0 \Delta\theta}{2V}\right)^2}$$

à une dilatation des abscisses près ($\Delta\theta = 2\,\Delta\alpha$).

8. 4. 2. 4. — Nombre de directions distinctes. — La déviation angulaire θ du faisceau lumineux produite par les ondes élastiques de fréquence f est égale à deux fois l'angle de Bragg :

$$\theta = 2\alpha \simeq \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{\Lambda}{V} f.$$

Une variation de fréquence Δf entraîne

$$\Delta\theta = \frac{\Lambda}{V}\Delta f.$$

En admettant que la largeur angulaire du faisceau lumineux de diamètre D est définie par l'angle de diffraction naturelle $\Delta\beta = \Lambda/D$, le nombre de directions N_B pouvant être distinguées dans l'angle $\Delta\theta$ est

$$N_B = \frac{\Delta\theta}{\Delta\beta} = \frac{D}{V}\Delta f$$

soit

$$N_B = T_B \Delta f$$

en désignant par T_B le temps de transit des ondes élastiques à travers le faisceau lumineux. Pour obtenir $N_B = 300$, il faut par exemple $\Delta f = 100$ MHz et $T_B = 3$ µs. Pour une vitesse des ondes élastiques $V = 4\,000$ m/s soit 4 mm/µs, le diamètre du faisceau lumineux doit être de 12 mm. Une optique d'élargissement du faisceau laser est en général nécessaire. Par ailleurs remarquons que la longueur du cristal, au moins égale à $T_B V$, ne doit pas donner lieu à une atténuation excessive des ondes élastiques pour la fréquence de fonctionnement, elle-même déterminée par la bande passante requise. Pour le molybdate de plomb, l'atténuation à 300 MHz, est supérieure à 1 dB/cm.

Résumons les trois points essentiels de l'interaction sous incidence de Bragg :

— *l'intensité du faisceau unique diffracté est fonction de celle des ondes élastiques;*

— *l'angle dont est dévié le faisceau est proportionnel à la fréquence des ondes élastiques;*

— *la fréquence des ondes élastiques se retrouve dans celle du faisceau lumineux diffracté.*

La première propriété est exploitée pour moduler un faisceau lumineux (paragr. 9. 8), la seconde pour le dévier (paragr. 9. 8 et 9. 3. 6). La troisième propriété a été utilisée pour retarder de façon continue un signal électrique (paragr. 9. 2. 3).

Examinons maintenant quelques cas d'interaction avec changement de polarisation et en particulier l'interaction colinéaire sans déviation du faisceau.

8. 4. 2. 5. — Diagramme des vecteurs d'onde. Changement de polarisation. — La relation 8. 21 qui définit l'angle d'incidence de Bragg $\alpha = \theta/2$, mise sous la forme :

$$\frac{1}{\Lambda}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2\lambda}$$

conduit au triangle de la figure 8. 16 liant les vecteurs d'onde optiques incident ($\vec{K}_I$) et diffracté ($\vec{K}_D$) et le vecteur d'onde élastique $\vec{k}$. Cette construction explicite la conservation des moments :

$$\boxed{\vec{K}_D = \vec{K}_I \pm \vec{k}} \qquad (8.\ 29)$$

comme la relation entre les fréquences angulaires :

$$\Omega_D = \Omega \pm \omega \qquad (8.\ 30)$$

exprime la conservation de l'énergie.

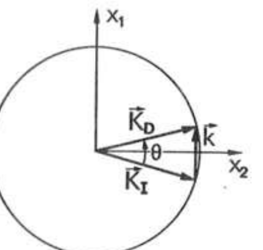


FIG. 8. 16. — *Diagramme des vecteurs d'onde.* Le triangle est pratiquement isocèle si le matériau est optiquement isotrope.

Ce triangle est pratiquement isocèle ($f \ll F \Rightarrow K_D \simeq K_I$) dans les circonstances précédentes : milieu optiquement isotrope, ondes longitudinales, polarisations identiques des faisceaux incident et diffracté. Dans le cas des cristaux anisotropes, les vecteurs d'onde $\vec{K}_I$ et $\vec{K}_D$ n'ont pas la même longueur, en particulier si les polarisations des ondes incidente et diffractée sont différentes les vitesses de propagation ne sont plus identiques. Le triangle n'est plus alors isocèle et les angles d'incidence α_I et de diffraction α_D ne sont plus égaux [12].

Prenons l'exemple d'un *cristal trigonal* appartenant à l'une des *classes 3m, 32, $\bar{3}m$* caractérisé par le tenseur élasto-optique du tableau 8. 6. Une *onde élastique transversale* se propageant suivant Ox_1 (axe cristallographique X) polarisée suivant l'axe optique Ox_3 crée par l'intermédiaire de la déformation $S_{31} = S_{13}$ une variation $\Delta\varepsilon_{il}$ qui se déduit de la formule 8. 10 :

$$\Delta\varepsilon_{il} = -\,2\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ll}p_{il13}S_{13}.$$

Comme les seuls coefficients p_{il13} non nuls sont $p_{1213} = p_{65} = p_{14}$ et $p_{1313} = p_{55} = p_{44}$, le tenseur $\Delta\varepsilon_{il}$ est de la forme :

$$\Delta\varepsilon_{il} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta\varepsilon_{12} & \Delta\varepsilon_{13} \\ \Delta\varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ \Delta\varepsilon_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\Delta\varepsilon_{12} = -\,\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}p_{14}S_5$$

et

$$\Delta\varepsilon_{13} = -\,\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}p_{44}S_5$$

en se souvenant que $S_5 = 2S_{13} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}$.

L'onde lumineuse incidente, polarisée suivant Ox_3 (fig. 8. 17), est accompagnée d'un champ électrique de composantes ($0,\ 0,\ E_3 = E\cos\Omega t$) qui crée une induction (*)

$$D_i = (\varepsilon_{i3} + \Delta\varepsilon_{i3})E_3.$$

Comme

$$\Delta\varepsilon_{i3} = (\Delta\varepsilon_{i3})_0 \sin\omega t$$

l'onde diffractée de fréquence $\Omega + \omega$ provient du produit $\Delta D_i = \Delta\varepsilon_{i3}E_3$. Elle est polarisée suivant Ox_1 car seul $\Delta\varepsilon_{13}$ n'est pas nul. L'interaction élasto-optique change la polarisation du faisceau lumineux. La construction du diagramme des vecteurs d'onde fait donc intervenir les deux nappes de la surface des indices soit, dans le plan Ox_1x_2, deux cercles de rayon n_e et n_0 puisque la surface des indices est de révolution autour de l'axe optique Ox_3. L'extrémité du vecteur d'onde incident $\vec{K}_I$ est située sur le cercle de rayon n_e correspondant à une polarisation parallèle à l'axe optique Ox_3 tandis que l'extrémité du vecteur $\vec{K}_D$ de l'onde diffractée de polarisation perpendiculaire à Ox_3 se trouve sur le cercle de rayon n_0 (fig. 8. 17). Remarquons que pour un rayon extraordinaire incident il existe en général deux rayons diffractés correspondant à des fréquences acoustiques différentes.

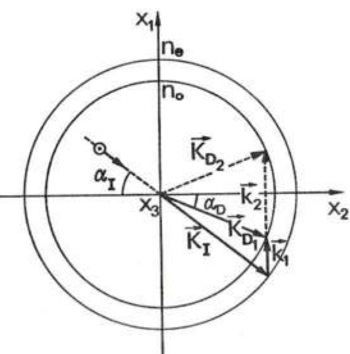


FIG. 8. 17. — *Diagramme des vecteurs d'onde. Cristal uniaxe.* L'interaction d'un rayon incident extraordinaire (indice n_e, vecteur d'onde $\vec{K}_I$) avec une onde élastique transversale (polarisation suivant x_3, vecteur d'onde $\vec{k}_1$ ou $\vec{k}_2$) donne un rayon diffracté ordinaire (indice n_0, vecteur d'onde $\vec{K}_{D_1}$ ou $\vec{K}_{D_2}$).

Examinons, toujours dans un *cristal trigonal de symétrie 32, 3m, $\bar{3}m$*, l'effet d'une *onde élastique longitudinale* se propageant suivant Ox_1 (déformation S_{11}) sur une onde lumineuse polarisée suivant Ox_3 et se propa-

(*) Seule la polarisation de l'onde diffractée nous intéresse : nous prenons $\varepsilon_0 = 1$ dans les formules donnant D_i.

geant aussi suivant Ox_1 (interaction colinéaire). La variation du tenseur des permittivités

$$\Delta\varepsilon_{il} = -\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ll}p_{il11}S_{11}$$

se réduit, compte tenu du tableau des $p_{\alpha\beta}$, à

$$\Delta\varepsilon_{il} = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\varepsilon_{22} & \Delta\varepsilon_{23} \\ 0 & \Delta\varepsilon_{23} & \Delta\varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$\Delta\varepsilon_{11} = -(\varepsilon_{11})^2 p_{11}S_1 \qquad \Delta\varepsilon_{22} = -(\varepsilon_{11})^2 p_{12}S_1$$
$$\Delta\varepsilon_{23} = -\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}p_{41}S_1 \qquad \Delta\varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{33})^2 p_{31}S_1.$$

L'onde de fréquence $\omega + \Omega$ a pour polarisation

$$\Delta D_i = \Delta\varepsilon_{i3}E_3$$

soit

$$\Delta D_1 = 0, \qquad \Delta D_2 = \Delta\varepsilon_{23}E_3, \qquad \Delta D_3 = \Delta\varepsilon_{33}E_3.$$

En interaction colinéaire, la condition de Bragg ne peut être satisfaite avec un vecteur d'onde élastique $\vec{k}$ fini, que par un changement de polarisation du faisceau lumineux (sinon $K_D = K_I$ et $k = 0$). Le rayon diffracté a donc une polarisation ordinaire parallèle à Ox_2 $(0, \Delta\varepsilon_{23}E_3, 0)$. Le diagramme des vecteurs d'onde, représenté sur la figure 8. 18 dans le cas d'un cristal uniaxe positif $(n_e > n_0)$ impose

$$k = K_I - K_D = \frac{2\pi}{\Lambda_0}(n_e - n_0) = \frac{2\pi}{V}f \qquad (8.\ 31)$$

et par conséquent la fréquence des ondes élastiques

$$f = \frac{V}{\Lambda_0}(n_e - n_0). \qquad (8.\ 32)$$

FIG. 8. 18. — *Interaction colinéaire.* Pour obtenir, à partir d'un rayon extraordinaire $(\vec{K}_I)$ de longueur d'onde Λ_0 un rayon diffracté ordinaire $(\vec{K}_D)$, la fréquence des ondes élastiques doit être $f = V(n_e - n_0)/\Lambda_0$.

Par contre pour une fréquence donnée des ondes élastiques, seules les ondes lumineuses satisfaisant à la condition 8. 31 sont diffractées. Basés sur ce principe des filtres optiques, accordables par variation de la fréquence d'ondes élastiques stationnaires ou progressives, ont été construits [13, 14]. Par exemple, en faisant varier entre 40 et 68 MHz la fréquence d'ondes élastiques transversales se propageant dans un cristal de molybdate de calcium ($CaMoO_4$) des ondes lumineuses peuvent être sélectionnées avec une bande passante de 8 Å entre 6 700 et 5 100 Å.

8. 5. — INTERACTION ONDES LUMINEUSES-ONDES ÉLASTIQUES DE SURFACE

Nous avons étudié dans ce chapitre la diffraction de la lumière par des ondes élastiques de volume longitudinales ou transversales. Les ondes lumineuses sont aussi diffractées par les ondes de surface et en particulier par les ondes de Rayleigh. Comme celles-ci comprennent au moins une composante de déplacement longitudinale et une composante transversale, il faut s'attendre dans le cas général à des effets groupant ceux déjà décrits, par exemple une partie seulement de la lumière diffractée subit une rotation de polarisation [15]. De plus, les déformations de la surface propres aux ondes de Rayleigh diffractent la lumière réfléchie. Cette particularité a été utilisée pour visualiser ces ondes [16]. Les effets dus à la perturbation du tenseur diélectrique sont plus importants, surtout si les ondes lumineuses traversent le faisceau d'ondes élastiques latéralement. Toutefois cette condition d'interaction exige une concentration de l'énergie lumineuse près de la surface; une disposition avantageuse (fig. 8. 19) consiste à guider la lumière dans une couche mince déposée sur le substrat piézoélectrique servant de support aux ondes élastiques [17]. Les ondes lumineuses sont introduites et extraites du guide plan, couche de verre d'indice supérieur à celui du substrat, par deux réseaux [18]. L'épaisseur du guide ($\simeq 1$ µm) est inférieure à la longueur d'onde élastique (32 µm dans le quartz à 100 MHz).

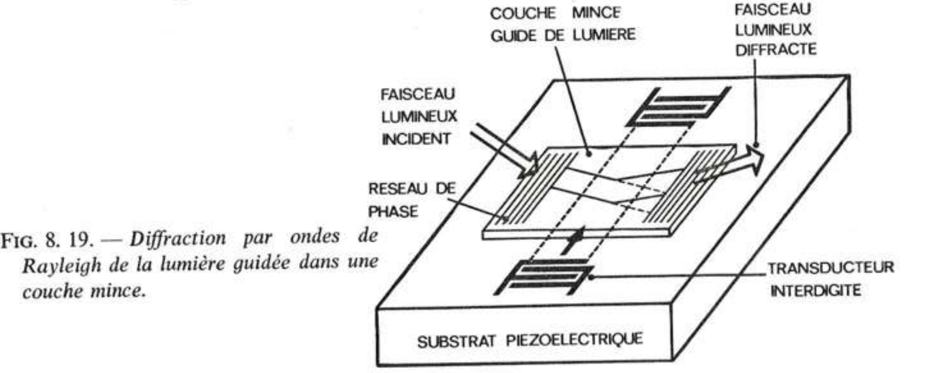


FIG. 8. 19. — *Diffraction par ondes de Rayleigh de la lumière guidée dans une couche mince.*

Ce qui a été dit dans les paragraphes précédents sur les ondes de volume peut en partie être transposé ici : à l'incidence de Bragg un seul faisceau est diffracté. Avec une puissance élastique de l'ordre de 2 W, 50 % de la lumière a déjà été déviée au cours d'expériences en laboratoire [19, 20].

Références

[1] L. Brillouin. — *Ann. de Phys.*, *17*, 88 (1922).
[2] R. Lucas et P. Biquard. — *J. Physique*, *10*, 464 (1932).
[3] P. Debye et F. W. Sears. — *Proc. Nat. Acad. Sc.*, *18*, 409 (1932).
[4] R. Adler. — *IEEE Spectrum*, *4*, 42 (1967).
[5] W. Primak and D. Post. — *J. Appl. Phys.*, *30*, 779 (1959).
[6] D. A. Pinnow and R. W. Dixon. — *Appl. Phys. Letters*, *13*, 156 (1968).
[7] R. W. Dixon. — *J. Appl. Phys.*, *38*, 5149 (1967).
[8] N. Uchida and Y. Ohmachi. — *J. Appl. Phys.*, *40*, 4692 (1969).
[9] F. Pockels. — *Ann. Physik Chem.*, *37*, pp. 269-372 (1889).
[10] T. M. Smith and A. Korpel. — *IEEE J. Quantum Electronics*, *QE-1*, 283 (1965).
[11] D. A. Pinnow. — *IEEE J. Quantum Electronics*, *QE-6*, 223 (1970).
[12] R. W. Dixon. — *IEEE J. Quantum Electronics*, *QE-3*, 85 (1967).
[13] S. E. Harris, S. T. K. Nieh and D. K. Winslow. — *Appl. Phys. Letters*, *15*, 325 (1969).
[14] S. E. Harris, S. T. K. Nieh and R. S. Feigelson. — *Appl. Phys. Letters*, *17*, 223 (1970).
[15] R. M. Montgomery and E. H. Young Jr. — *J. Appl. Phys.*, *42*, 2585 (1971).
[16] R. Adler, A. Korpel and P. Desmares. — *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-15*, 157 (1968).
[17] P. K. Tien, R. Ulrich and R. J. Martin, *Appl. Phys. Lett.*, *14*, 291 (1969).
[18] M. L. Dakss, L. Kuhn, P. F. Heidrich and B. A. Scott. — *Appl. Phys. Lett.*, *16*, 523 (1970).
[19] L. Kuhn, M. L. Dakss, P. F. Heidrich and B. A. Scott. — *Appl. Phys. Letters*, *17*,
[20] 265 (1970).
[18] P. Hartemann, D. Ostrowsky, M. Reiber and R. Torguet. — *J. Physique*, *C 6*, 33, 216 (1972).

Bibliographie

Optique cristalline. Tenseur élasto-optique.

G. Bruhat et A. Kastler. — *Cours de physique générale-Optique*, chap. XX. Paris : Masson et Cie (1965).
J. F. Nye. — *Propriétés physiques des cristaux*, chap. 13. Paris : Dunod (1961).
S. Bhagavantam. — *Crystal symmetry and Physical properties*, chap. 16. London and New York : Academic Press (1966).

Interaction ondes lumineuses-ondes élastiques de volume.

Références 1 à 4.
C. V. Raman and N. S. N. Nath. — The diffraction of light by high frequency sound : Part I, *Proc. Indian Acad. Sci.*, *2*, 406 (1935); Part II, *2*, 413 (1935); Part III, *3*, 75 (1936); Part IV, *3*, 119 (1936); Part V, *3*, 459 (1936). Generalized Theory, *4*, 222 (1936).
A. B. Bhatia and W. S. Noble. — Diffraction of light by ultrasonic waves, *Proc. Roy. Soc.*, *220 A*, 356 (1953).
J. C. Slater. — Interaction of waves in crystals, *Rev. Mod. Phys.*, *30*, 197 (1958).
C. F. Quate, C. D. Wilkinson and D. K. Winslow. — Interaction of light and microwave sound, *Proc. IEEE*, *53*, 1604 (1965).
M. G. Cohen and E. I. Gordon. — Acoustic beam probing using optical techniques, *Bell Syst. Tech. J.*, *44*, 693 (1965).
E. I. Gordon. — A Review of acoustooptical deflection and modulation devices, *Proc. IEEE*, *54*, 1391 (1966).
W. R. Klein and Bill D. Cook. — Unified approach to ultrasonic light diffraction, *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-14*, 123 (1967).
E. G. Spencer, P. V. Lenzo and A. Ballman. — Dielectric materials for electrooptic, elasto-optic and ultrasonic device applications, *Proc. IEEE*, *55*, 2074 (1967).
R. W. Dixon. — Acoustooptics interactions and devices, *IEEE Trans. Electron. Devices*, *ED-17*, 229 (1970).
J. M. Bauza, C. Carles et R. Torguet. — Étude théorique et expérimentale de la déviation de la lumière par effet acousto-électrique, *Acoustica*, vol. 30, n° 4 (janv. 1974).

Interaction ondes lumineuses-ondes élastiques de surface.

A. J. Slobodnik, Jr. — Microwave frequency acoustic surface wave propagation losses in $LiNbO_3$, *Appl. Phys. Lett.*, *14*, 94 (1969).
E. G. Lean and C. G. Powell. — Optical probing of surface acoustic waves, *Proc. IEEE*, *58*, 1939 (1970).
L. Kuhn, P. F. Heidrich and E. G. Lean. — Optical guided wave mode conversion by an acoustic surface wave, *Appl. Phys. Lett.*, *19*, 428 (1971).
R. V. Schmidt, I. P. Kaminow and J. R. Carruthers. — Acousto-optic diffraction of guided optical waves in $LiNbO_3$, *Appl. Phys. Lett.*, *23*, 417 (1973).

EXERCICES

● **8. 1.** Dans un cristal uniaxe, comment varient les indices avec la direction de propagation repérée par l'angle polaire θ (fig. 8. 20).

Solution. Pour la vibration $D^{(1)}$: $n^{(1)} = n_0 \quad \forall\, \theta$.

Pour la vibration $D^{(2)}$:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_0^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1 \quad .$$

avec $\quad x_1 = 0 \quad x_2 = -n \cos\theta \quad x_3 = n \sin\theta$

d'où

$$n^{(2)} = \frac{n_0 n_e}{(n_e^2 \cos^2\theta + n_0^2 \sin^2\theta)^{1/2}} .$$

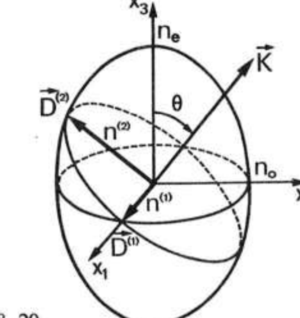


Fig. 8. 20.

● **8. 2.** Un faisceau lumineux monochromatique pénètre suivant x_2 dans un cristal parcouru dans toutes les directions du plan x_1x_3 par des ondes élastiques planes de même fréquence.

Quelle figure observe-t-on sur un écran parallèle à x_1x_3 et distant de D? Cas d'un solide isotrope.

Solution. Le faisceau du premier ordre dévié d'un angle $\theta \simeq \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{vf}{FV}$ (formule 8. 18) donne, dans la direction de propagation $\vec{n}$ de l'onde élastique active, une tache à une distance $d = \frac{Dvf}{F} \cdot \frac{1}{V}$ inversement proportionnelle à la vitesse des ondes élastiques dans la direction $\vec{n}$. Comme celle-ci est quelconque dans le plan x_1x_3, on observe sur l'écran les trois sections, par le plan x_1x_3, de la surface des lenteurs du cristal (paragr. 5. 1. 6) : deux cercles pour un solide isotrope. Cette méthode, due à Schaefer et Bergmann permet de mesurer la vitesse des ondes élastiques.

… sont, pour les conditions d'interaction du tableau 8. 14, les coefficients élasto-optiques et les indices intervenant dans le facteur de mérite de la paratellurite (TeO_2)?

Solution.

1. La propagation suivant [110] de l'onde élastique de polarisation [1$\bar{1}$0] crée les déformations :

$$S_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad S_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -S_{11}, \qquad S_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = 0$$

puisque $\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}$ et ${}^\circ u_2 = -{}^\circ u_1$. En fonction de la vitesse $V = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}}$, la densité de puissance élastique $P = \langle \mathscr{E} \rangle V$ avec :

$$\langle \mathscr{E} \rangle = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} = \frac{1}{2}[c_{11} + c_{22} - 2c_{12}] S_{11}^2 = (c_{11} - c_{12}) S_{11}^2$$

se met sous la forme 8. 25 en posant $S = 2S_{11}$:

$$P = 2\rho V^3 S_{11}^2 = \frac{1}{2}\rho V^3 S^2.$$

D'après la formule 8. 10 :

$$\Delta\varepsilon_{il} = -\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ll}(p_{il11} - p_{il22})S_{11}$$

soit

$$\Delta\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{11}^2(p_{11} - p_{12})S_{11} = -\Delta\varepsilon_{22}$$

$$\Delta\varepsilon_{12} = \Delta\varepsilon_{13} = \Delta\varepsilon_{23} = 0$$

et

$$\Delta\varepsilon_{33} = -\varepsilon_{33}^2(p_{31} - p_{32})S_{11} = 0 \quad \text{car} \quad p_{32} = p_{31}.$$

Étant donné la polarisation (E_1, E_2, 0) de l'onde lumineuse, incidente suivant Z (indice n_0), l'onde diffractée qui provient du terme $\Delta D_i = \Delta\varepsilon_{i1}E_1 + \Delta\varepsilon_{i2}E_2$:

$$\Delta D_1 = \Delta\varepsilon_{11}E_1, \qquad \Delta D_2 = -\Delta\varepsilon_{11}E_2, \qquad \Delta D_3 = 0$$

a une amplitude proportionnelle à $\Delta\varepsilon_{11}$. Cette variation est reliée à $S = 2S_{11}$:

$$\Delta\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{11}^2 \frac{p_{11} - p_{12}}{2} S = -\varepsilon^2 p S$$

par l'intermédiaire du coefficient élasto-optique $p = \frac{p_{11} - p_{12}}{2}$.

2. Pour l'onde élastique longitudinale suivant [001], $S = S_{33}$ et

$$\Delta\varepsilon_{il} = -\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ll}p_{il33}S_{33}$$

soit

$$\Delta\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{11}^2 p_{13} S = \Delta\varepsilon_{22}, \qquad \Delta\varepsilon_{33} = -\varepsilon_{33}^2 p_{33} S \quad \text{et} \quad \Delta\varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

L'onde lumineuse de polarisation (E_1, 0, 0), d'indice n_0, est diffractée en une onde de polarisation ($\Delta D_1 = \Delta\varepsilon_{11}E_1$, 0, 0) avec le module $p = p_{13}$.

• **8. 4.** Vérifier que les valeurs du facteur de mérite de $PbMoO_4$ sont très voisines pour les deux conditions du tableau 8. 14 (polarisation de la lumière parallèle ou perpendiculaire au plan des vecteurs d'onde).

Solution. La déformation S_{33} produit des variations :

$$\Delta\varepsilon_{22} = \Delta\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{11}^2 p_{13} S_{33} \quad \text{et} \quad \Delta\varepsilon_{33} = -\varepsilon_{33}^2 p_{33} S_{33}.$$

a) Polarisation parallèle (0, 0, E_3) ⇒ indice n_e; $\Delta D_3 = \Delta\varepsilon_{33}E_{33}$ ⇒ constante élasto-optique p_{33} ⇒ $M = \frac{n_e^6 p_{33}^2}{\rho V^3} = 23{,}9\ M_0$.

b) Polarisation perpendiculaire (E_1, 0, 0) ⇒ indice n_0; $\Delta D_1 = \Delta\varepsilon_{11}E_1$ ⇒ constante élasto-optique p_{13} ⇒ $M = \frac{n_0^6 p_{13}^2}{\rho V^3} = 23{,}5\ M_0$.

• **8. 5.** Montrer que la bande passante de l'interaction est inversement proportionnelle au temps Δt nécessaire à un front d'onde pour traverser un rayon lumineux à l'indice de Bragg.

Solution.

$$\Delta t = \frac{e\alpha_0}{V} = \frac{e\Lambda}{V^2} f_0 \qquad \text{soit} \qquad \Delta f = \frac{1{,}77}{\Delta t} \qquad \text{(formule 8. 28)}$$

CHAPITRE 9

APPLICATIONS : TRAITEMENT D'UN SIGNAL ÉLECTRIQUE

Les ondes élastiques ont joué un rôle en électronique dès le développement, pendant la première guerre mondiale, des tubes amplificateurs. Jusque-là, l'étude des ondes élastiques avait eu pour but principal d'analyser les modes de propagation des tremblements de terre. En enregistrant, en divers lieux, les instants d'arrivée des ébranlements, les géophysiciens cherchaient à localiser l'épicentre des secousses sismiques.

C. Chilowsky et P. Langevin eurent en 1916 l'idée d'exploiter les ondes élastiques pour repérer, par détection d'échos, les objets sous-marins. Utilisant les travaux de Jacques et Pierre Curie — qui avaient, à la suite de leur découverte de la piézoélectricité en 1880, réalisé une balance à quartz — Paul Langevin élabora des transducteurs piézoélectriques (sandwich quartz-acier) pour émettre dans l'eau des ondes élastiques de fréquence environ 150 000 Hz et détecter les ondes réfléchies par les obstacles. Le développement de ce dispositif, appelé maintenant sonar (*), a été considérable aussi bien dans le domaine civil que dans le domaine militaire. Il est reconnu qu'il a pris une part essentielle, en localisant les sous-marins ennemis, à la réduction des pertes des navires alliés qui assuraient en particulier la navette entre les États-Unis et la Grande-Bretagne pendant la dernière guerre. Le sonar est couramment employé pour repérer les bancs de poissons, relever la carte du fond des océans, asservir la position des navires prospecteurs. Bien que ce livre soit consacré à la propagation des ondes élastiques dans les solides, nous avons cité cette application car elle est d'une grande importance historique et pratique [1].

C'est vers 1920 que W. G. Cady a tiré parti du grand coefficient de surtension des résonateurs piézoélectriques à quartz en les insérant dans des circuits électriques pour filtrer des signaux ou stabiliser la fréquence des oscillateurs. Le résonateur, nous l'avons vu au paragraphe 7. 1. 2, est un cas particulier de transducteur. Les filtres à quartz, constitués de plusieurs résonateurs, sont devenus des composants classiques, encore qu'ils évoluent (filtres monolithiques). Leurs caractéristiques principales ne sont

(*) De l'anglais : SOund NAvigation and Ranging.

ici rappelées (paragr. 9. 4) que pour être comparées à celles de filtres à ondes de Rayleigh.

La mise en mémoire d'une information sous forme d'ondes élastiques date de l'avènement du radar et du calculateur électronique (période 1940-1945). Les premières lignes à retard à milieu de propagation liquide (eau, mercure) ont été étudiées en Angleterre et aux États-Unis; les premières lignes à milieu de propagation solide (verre, silice) ont été fabriquées en Allemagne (voir résumé historique de la référence 2). Ces lignes munies de transducteurs à quartz fonctionnaient vers 10 MHz avec des bandes passantes de quelques MHz. Elles fournissaient des retards de l'ordre de 100 µs. Ce retard a été par la suite décuplé grâce à certains artifices de structure (lignes polygonales à réflexions multiples [2]).

Il y a une douzaine d'années (1960), plusieurs chercheurs des laboratoires Bell [3] ont révélé (*) l'intérêt de la compression d'impulsion dans les systèmes radar (RAdio Detecting And Ranging) et les moyens de produire, avec des ondes élastiques, un effet de dispersion ont été examinés. Divers principes ont été, à partir de cette période, mis en œuvre pour construire des lignes dispersives : variation de la vitesse de groupe de certains modes dans des guides d'ondes (ondes de Lamb), effets d'interférence en ondes de volume puis en ondes de surface (ondes de Rayleigh) avec diverses structures de transducteurs, association de milieux de propagation de vitesses différentes (ondes de Love).

L'objet de ce chapitre est de décrire des réalisations relativement récentes qui illustrent la mise en œuvre de principes. Bien que nous donnions souvent des ordres de grandeur, il n'est pas dans notre intention de citer des performances. Les lignes sont groupées d'après la fonction qu'elles assurent : retard, compression d'impulsion, filtrage, mémoire, convolution. Autant que possible l'état d'exploitation de ces lignes est précisé; certaines en sont encore au stade du laboratoire, les autres sont développées industriellement. Le chapitre se termine par la description d'un coupleur à ondes de surface, d'un modulateur et d'un déviateur de lumière à interaction élasto-optique. Il nous semble utile de présenter d'abord la structure générale d'une ligne à ondes élastiques.

9. 1. — STRUCTURE GÉNÉRALE D'UNE LIGNE A ONDES ÉLASTIQUES

Les lignes à ondes élastiques étudiées dans ce chapitre ont pour rôle de traiter un signal électrique, c'est-à-dire de modifier volontairement les paramètres qui le définissent. Quelle que soit la nature du traitement, il

(*) Cet article est postérieur à des travaux effectués dans différents pays, en particulier aux USA, et non publiés. Par exemple, en France, M. Michel Carpentier, directeur technique à la Thomson-CSF, a réalisé des expériences de compression d'impulsion en 1959. (Brevet français P. V. 800423 du 17 juillet 1959 : M. Carpentier et A. Adamsbaum. *Perfectionnement aux dispositifs à compression d'impulsion.* U. S. Patent 3213452, 19 octobre 1965.)

est possible de représenter la ligne la plus complexe par le schéma de la figure 9. 1.

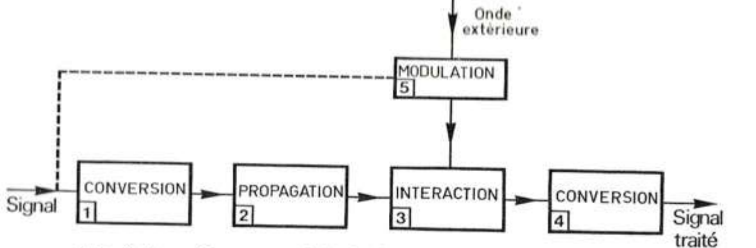


FIG. 9. 1. — *Structure générale d'une ligne à ondes élastiques.*

9. 1. 1. — *Conversion du signal électrique en onde élastique*

Le signal électrique à traiter, modulé en phase ou en amplitude, est, à l'entrée de la ligne (partie 1), converti en onde élastique.

Cette conversion d'énergie, dont le principe consiste à mettre un matériau piézoélectrique en vibrations mécaniques par le champ électrique du signal, peut être effectuée de telle manière que le transducteur soit équivalent à une seule source localisée (paragr. 7. 1) ou bien à un ensemble de sources distribuées, par exemple, sur une surface (paragr. 7. 2). Dans ce cas la « boîte » 1 peut jouer plus qu'un rôle de transducteur, si les phénomènes d'interférence des ondes émises par ces diverses sources sont exploités. La répartition de ces sources ultrasonores peut être déterminée de façon à obtenir la modification souhaitée du signal.

Le transducteur, qui est précédé d'un circuit d'adaptation, donne lieu à des pertes qui dépendent, d'une part de la fréquence centrale et de la largeur du spectre du signal à convertir et d'autre part de la nature de l'onde élastique que l'on veut créer. Ces pertes vont de quelques décibels à une dizaine de décibels et plus. La fréquence des ondes élastiques utilisées dans ces lignes est actuellement comprise entre quelques MHz et plusieurs GHz.

9. 1. 2. — *Propagation de l'onde élastique*

Les ondes élastiques créées se propagent, suivant leur nature, soit dans le cœur du matériau, soit à sa surface, mais toujours à une vitesse environ 10^5 fois inférieure à celle des ondes électromagnétiques. C'est cette propriété des ondes élastiques de se déplacer de quelques millimètres seulement en une microseconde qui est mise en œuvre dans la boîte 2, pour retarder le signal.

Le milieu de propagation supposé ici solide est soit un milieu homogène, isotrope comme un bloc de silice ou anisotrope comme un monocristal d'alumine, soit un milieu stratifié composé par exemple d'une couche sur un substrat. Dans le cas du cristal, la taille doit être convenable pour que la propagation s'effectue bien suivant le mode choisi; la vitesse est constante quelle que soit la fréquence : il en est ainsi parce que la longueur d'onde est grande devant la distance entre atomes (paragr. 1. 2. 2). Dans le cas du milieu stratifié, la vitesse des ondes en fonction de la fréquence varie entre celle de la couche et celle du substrat. Le retard du signal dépend de sa fréquence. Un effet de dispersion s'obtient aussi dans un matériau homogène à condition de guider les ondes (paragr. 1. 1. 2. 2).

Bien des variantes sont possibles : le milieu de propagation peut être un barreau, un bloc polygonal (le chemin de l'onde qui se réfléchit sur les faces du polygone est constitué de lignes brisées, le retard est grand : 1 000 μs), un long ruban métallique (ligne dispersive)... Un changement de mode peut être créé volontairement par réflexion (paragr. 5. 2. 3).

Le coefficient d'atténuation des ondes élastiques (fig. 9. 3), dépend du milieu et de la polarisation de l'onde, il augmente avec la fréquence. Les défauts prennent une grande importance lorsque leurs dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde. Toutes choses égales par ailleurs, les pertes sont plus grandes pour un solide polycristallin que pour un monocristal.

9. 1. 3. — *Interaction de l'onde élastique avec une onde extérieure*

La partie 3 symbolise une interaction entre l'onde élastique et une onde extérieure qui peut être une onde lumineuse ou une onde de charge d'espace associée à un mouvement d'électrons.

S'il s'agit d'une interaction avec une *onde lumineuse*, le produit de l'interaction est une onde lumineuse diffractée qui porte les caractéristiques (fréquence, puissance) du faisceau élastique et celles (modulation spatiale et temporelle) de l'onde lumineuse incidente. La diffraction provient de l'onde de variation d'indice qui accompagne toute onde élastique (paragr. 8. 4). La boîte 5 figure une modulation liée en général à la forme du signal. C'est par exemple un masque d'amplitude, réplique spatiale du code du signal.

S'il s'agit d'une interaction avec des *électrons* mis en mouvement, dans le sens du déplacement de l'onde élastique, l'effet de ce couplage peut être une atténuation ou une amplification de l'onde élastique suivant que ces porteurs se déplacent à une vitesse inférieure ou supérieure à celle du son. Le couplage entre une onde élastique et des porteurs de charge, exige un matériau piézoélectrique pour qu'un champ électrique soit associé à l'onde élastique et un matériau semi-conducteur où se déplacent les porteurs de charge [4]. Un même cristal — sulfure de cadmium, oxyde de zinc — peut posséder la double propriété d'être à la fois piézoélectrique et semiconducteur : le couplage se produit alors à l'intérieur du matériau. Toutefois les possibilités sont plus grandes lorsque chacune de ces propriétés peut être fournie par un matériau distinct : le couplage entre les deux ondes est alors assuré en rapprochant les deux cristaux. Les ondes de surface se prêtent bien à la seconde solution en particulier lorsque le semiconducteur est déposé sous forme de couche sur le substrat piézoélectrique. Les

ondes élastiques peuvent ainsi être amplifiées de plusieurs dizaines de décibels [5]. Cependant nous n'évoquerons pas davantage ces phénomènes d'amplification car à notre connaissance ils n'ont pas encore été exploités en dehors des laboratoires.

9. 1. 4. — Conversion en signal électrique de l'onde résultant de l'interaction

Pour obtenir à la sortie de la ligne le signal traité, il faut convertir l'onde résultant de l'interaction en signal électrique. Cette conversion est effectuée, suivant la nature de cette onde, par un transducteur localisé, ou distribué sur une surface, analogue à celui qui est disposé à l'entrée de la ligne ou par un autre type de transducteur, tel qu'un photomultiplicateur ou une photo-diode si l'onde qui transporte l'information après l'interaction est une onde lumineuse. Les caractéristiques de ce transducteur et de la structure d'adaptation à y associer sont à choisir pour ne pas altérer la transformation subie par le signal.

9. 2. — FONCTION RETARD

Nous nous limitons, dans ce paragraphe, à la description de réalisations assez nouvelles : lignes à ondes de volume à transducteurs à couche mince de fréquence supérieure au gigahertz, lignes à ondes de Rayleigh, lignes à interaction élasto-optique à retard continûment variable. Nous excluons les lignes à ondes élastiques de volume de technologie plus classique utilisant des transducteurs monocristallins soudés à l'indium et amincis (*) ($f < 1\,000$ MHz) ou des transducteurs de céramique collés ($f < 50$ MHz). De nombreux types de lignes fonctionnant à basse fréquence ont été construites [6].

9. 2. 1. — Lignes à ondes de volume

Il n'existait, avant que ces lignes ne soient mises au point, aucun dispositif fournissant des retards de l'ordre de la microseconde dans le domaine de fréquences du gigahertz. Un signal peut être retardé à l'aide d'un câble mais un retard de 2 µs par exemple nécessite une longueur de câble voisine de 400 m et à un volume considérable s'ajoutent des pertes prohibitives (supérieures à 100 dB à 1 GHz). Pratiquement l'utilisation des câbles est limitée à des retards de 0,1 µs au plus, pour des fréquences inférieures au gigahertz. Les lignes à ondes élastiques peuvent, dans un volume de quelques cm^3, retarder de plus de dix microsecondes un signal, avec des pertes raisonnables jusqu'à des fréquences de 5 GHz.

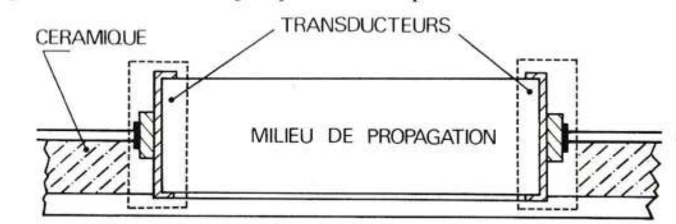


FIG. 9. 2. — *Structure d'une ligne à retard à ondes de volume.*

9. 2. 1. 1. — Structure. — La structure, indiquée sur la figure 9. 2, comprend un transducteur d'entrée, par exemple à oxyde de zinc, engendrant des ondes longitudinales, un monocristal de corindon dont la longueur détermine le retard et un transducteur de sortie (à oxyde de zinc). Les transducteurs sont semblables mais les épaisseurs et, par conséquent, les fréquences de résonance des couches de ZnO sont en général choisies différentes de façon à augmenter la bande passante. Le corindon est choisi comme milieu de propagation car il est disponible, à prix raisonnable, en monocristaux très longs (jusqu'à 30 cm) et son coefficient d'atténuation (1 dB/µs à 2 GHz) est relativement petit comme l'indique la figure 9. 3 qui montre les pertes de propagation de quelques matériaux. Ces pertes augmentent sensiblement comme le carré de la fréquence.

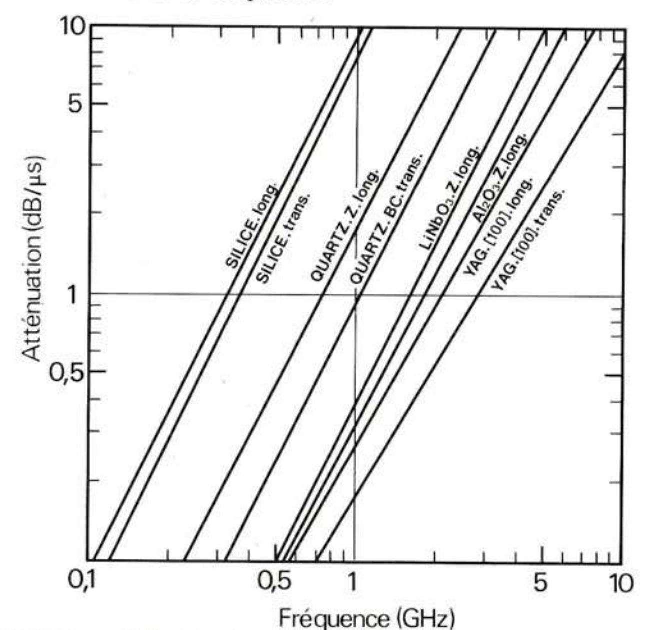
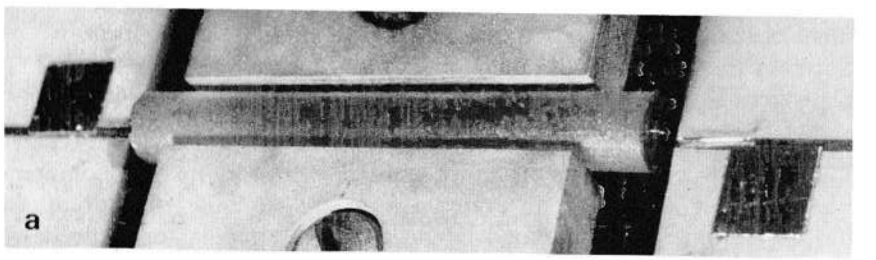


FIG. 9. 3. — *Atténuation des ondes élastiques, en fonction de la fréquence, dans quelques solides.* (D'après la figure 4 de la référence 70.)

(*) Cette technique de soudure par diffusion métallique a progressé. L'épaisseur de transducteurs en niobate de lithium peut actuellement être diminuée jusqu'au micron ($f \simeq 3$ GHz) grâce au bombardement ionique. Il est possible que des lignes à retard fabriquées suivant cette méthode concurrencent à terme les lignes décrites ici, car les transducteurs monocristallins ont des pertes moindres que les transducteurs à couche et autorisent un choix plus grand de milieux de propagation (paragr. 7. 1. 4).

Entre le câble transportant le signal et chaque transducteur est disposée une ligne à ruban réalisée sur céramique sur laquelle s'effectue l'adaptation au générateur du transducteur (fig. 9. 4). La connexion entre le transducteur et le ruban est assurée par un fil d'or (diamètre 50 μm) soudé par thermocompression sur l'électrode externe (aluminium). Le diamètre de cette électrode, inférieur au millimètre, fixe la valeur de la capacité du transducteur et sa partie piézoélectriquement active.



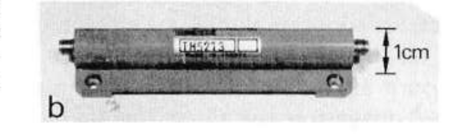


FIG. 9. 4. — *Ligne à retard à ondes de volume.*
a) Monocristal d'alumine de diamètre 3 mm portant à chaque extrémité un transducteur à couche mince d'oxyde de zinc.
b) Ligne de structure coaxiale.

9. 2. 1. 2. — Exemples de caractéristiques. — Comme l'adaptation aux extrémités de la ligne, de longueur l, n'est jamais parfaite, le retard se mesure, à quelques 10^{-4} près, en déterminant les fréquences de résonance

$$f = n\frac{V}{2l} \qquad n \text{ entier}$$

pour lesquelles, une onde stationnaire se superposant à l'onde progressive,

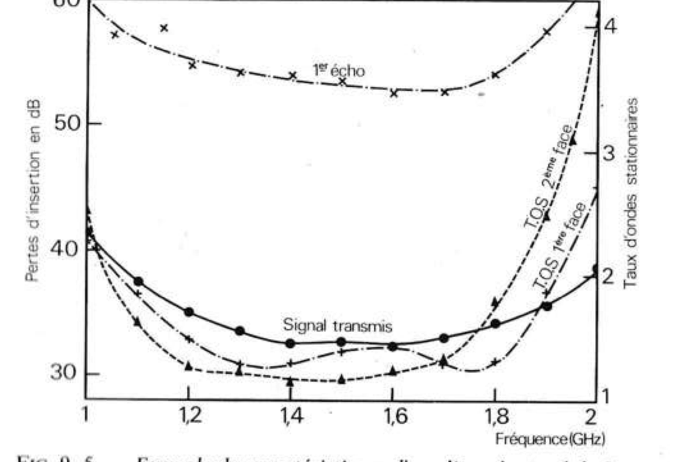


FIG. 9. 5. — *Exemple de caractéristiques d'une ligne à retard de 2 μs et de fréquence centrale 1,5 GHz.*

la tension de sortie est maximale. Le retard τ se déduit du nombre $n_2 - n_1$ de maxima compris entre les fréquences f_2 et f_1 :

$$\tau = \frac{n_2 - n_1}{2(f_2 - f_1)}. \tag{9. 1}$$

La figure 9. 5 représente les principales caractéristiques d'une ligne à retard [7] de 2 μs, de fréquence centrale 1,5 GHz. Les pertes sont de 33 dB pour une bande passante de 700 MHz. Le taux d'ondes stationnaires (paragr. 1. 1. 2. 1) à l'entrée et à la sortie est inférieur à 2. Le signal parasite que constitue le premier écho est à un niveau de − 20 dB par rapport au signal transmis. Le signal non retardé, atteignant la sortie par rayonnement direct, est à − 30 dB du signal utile.

Le tableau suivant précise le domaine de fonctionnement de ce genre de lignes sans que les chiffres donnés soient à considérer comme des limites.

– fréquence centrale f_0	0,5 à 10 GHz
– bande passante relative	⩽ 50 %
– retard τ	0,5 à 10 μs
– variation du retard avec la température ($-50\,°C$ à $120\,°C$) : $\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{d\theta}$ (Al_2O_3)	$25 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$
– taux d'ondes stationnaires	⩽ 2
– niveau du signal rayonné	− 30 dB
– niveau du premier écho	− 15 à − 30 dB
– pertes d'insertion	20 à 80 dB

Les derniers chiffres comprennent les pertes :
— de transduction qui augmentent avec la bande passante relative;
— de propagation proportionnelles au retard et au carré de la fréquence;
— de diffraction (élargissement du faisceau), fonction des dimensions des transducteurs, de la fréquence et du retard (paragr. 1. 3. 6).

La *ligne à échos* comportant un seul transducteur et une extrémité libre, polie pour réfléchir l'onde élastique est une variante de ligne à retard. Une dizaine d'échos séparés par un temps égal au double du temps de transit est facilement engendrée par une impulsion électrique d'hyperfréquence. En donnant aux extrémités du milieu de propagation des formes adéquates (curvilignes) qui focalisent le faisceau à chaque réflexion et évincent les échos parasites, des retards très grands sont accessibles, par exemple (*) 50 μs (pertes 40 dB) et 100 μs (pertes 55 dB) à $f = 1{,}3$ GHz ± 5 %.

(*) Brevet français n° 2144956 du 5 juillet 1971 : J. PUYHAUBERT (L. T. T.). — *Structure de lignes acoustiques à grand retard.*

9. 2. 2. — *Lignes à ondes de Rayleigh*

La propriété des ondes de Rayleigh de se propager à la surface des solides est utilisée pour réaliser des lignes à retard fixe à sorties multiples mais actuellement dans un domaine de fréquences ($f < 400$ MHz) inférieur à celui exploré avec les ondes de volume. Toutefois des lignes fonctionnant au-delà du gigahertz ont été construites en laboratoire [8, 9].

Le substrat est un monocristal piézoélectrique : quartz (coupe Y ou ST, propagation X) ou niobate de lithium (coupe Y, propagation suivant Z). Le retard est d'une microseconde pour un parcours de 3,15 mm sur le quartz et de 3,49 mm sur $LiNbO_3$. La figure 9. 6 représente une ligne en quartz à dix sorties de bande passante supérieure à 6 MHz autour de la fréquence centrale 31 MHz. Chaque transducteur comporte quatre paires de dents de largeur 26 µm. Les pertes voisines de 35 dB, ne varient, entre le premier et le dixième récepteur, que de quelques décibels.

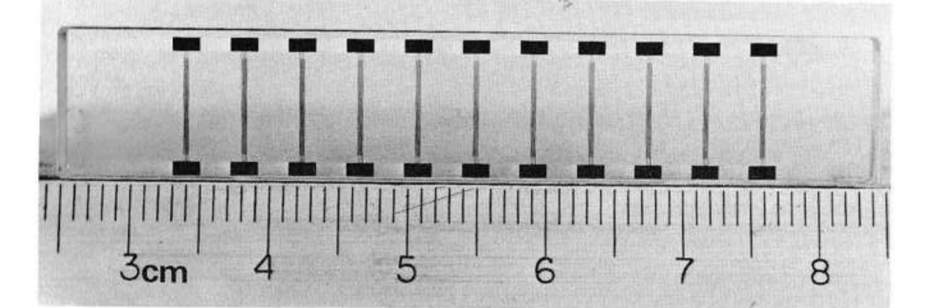


FIG. 9. 6. — *Ligne à retard à ondes de Rayleigh.*
Chaque transducteur comporte 8 doigts de largeur 26 µm.

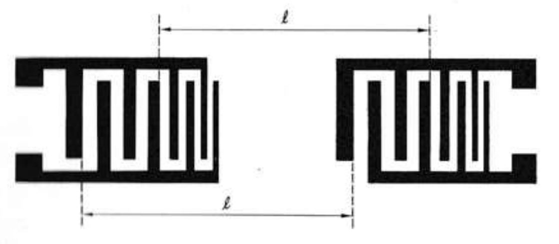


FIG. 9. 7. — *Ligne à retard à grande bande passante.* Les deux transducteurs se correspondent dans une translation de longueur l. Le retard est égal à l/V_R.

Des lignes à sortie unique et à large bande passante (50 %) ont été réalisées avec une géométrie semblable à celle de la figure 9. 7. La distance interdigitale varie, mais le transducteur de sortie se déduit du transducteur d'entrée par une translation qui définit le retard, identique à toutes les fréquences.

Les ondes de Rayleigh se propagent avec des pertes raisonnables sur les surfaces courbes de rayon de courbure grand devant la longueur d'onde [10, 11]. Cette propriété est exploitée dans les lignes à boucle (fig. 9. 8) et même à hélice [12, 13].

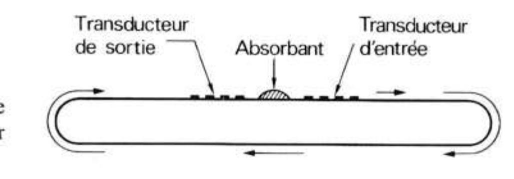


FIG. 9. 8. — *Ligne à boucle.* Le rayon de courbure est grand devant la longueur d'onde.

Des retards importants (1 ms) sont en principe accessibles avec des matériaux à petite vitesse de propagation : une boucle de longueur 10 cm sur un cristal de $Bi_{12}GeO_{20}$ (coupe (111) propagation suivant $[1\bar{1}0]$, V = 1 708 m/s) crée un retard de 58,5 µs. Pour diminuer l'épanouissement du faisceau et les pertes qui en résultent, l'onde peut être guidée par un ruban déposé sur la surface [14]. Une solution envisagée pour compenser l'affaiblissement dû à la propagation (quelques décibels par tour à 100 MHz) dans les lignes de plusieurs dizaines de tours, est l'amplification acousto-électrique par couplage avec des porteurs en mouvement [15, 16] dont le principe a été mentionné au paragraphe 9. 1. 3.

Les lignes à retard à sorties multiples sont un élément essentiel des filtres digitaux. Les échantillons du signal, prélevés par les divers transducteurs sont pondérés puis sommés (paragr. 9. 3. 5. 2).

9. 2. 3. — *Ligne à retard variable à interaction élasto-optique*

Il a été montré au chapitre 8 que la diffraction de la lumière par les ondes élastiques donnait lieu, à l'incidence de Bragg, à un faisceau dévié unique de fréquence $F - f$, F et f étant respectivement les fréquences des ondes lumineuses et des ondes élastiques. Le battement de ce faisceau dévié avec un faisceau lumineux de fréquence F redonne un signal de fréquence f mais ce signal est retardé par rapport au signal électrique appliqué au transducteur d'un temps $\tau = l/V$ où l est la distance qui sépare le transducteur de la zone d'interaction et V la vitesse de propagation des ondes élastiques. Toute variation de l entraîne une variation du retard τ [17]. Des lignes à retard continûment variable ont été construites suivant le schéma de la figure 9. 9 [18].

Le faisceau laser est scindé en deux, la partie diffractée d'un faisceau est superposée à la partie transmise de l'autre. Seul un des faisceaux résultants est reçu par une photodiode. L'intensité du courant, proportionnelle au carré de l'amplitude, contient le terme de même fréquence que le signal électrique appliqué au transducteur.

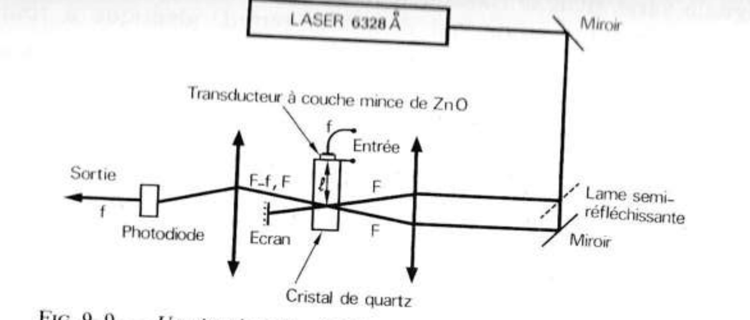


FIG. 9. 9. — *Un signal appliqué à l'entrée est retardé d'un temps $\tau = l/V$.*
Le faisceau laser étant fixe, le retard varie continûment lorsqu'on déplace le cristal.

Voici un exemple de caractéristiques de lignes qui ont été utilisées pour calibrer des altimètres radar :

— retard variable par déplacement manuel du cristal devant le faisceau laser : 50 ns à 6 µs;
— fréquence centrale : 800 MHz;
— bande passante : 200 MHz;
— pertes : 80 dB;
— cristal : quartz $(\underset{\rightarrow}{X})$ V = 5 720 m/s;
— transducteur à couche mince d'oxyde de zinc créant des ondes longitudinales.

Des pertes plus faibles et retards plus courts s'obtiennent avec d'autres cristaux comme le rutile (V_L = 10 670 m/s suivant [001]).

9. 3. — FONCTION COMPRESSION D'IMPULSION

La compression d'impulsion est une technique très utilisée dans les radars et sonars modernes. Son intérêt est d'accroître, à puissance constante, la portée du radar sans altérer son pouvoir de résolution ou inversement d'augmenter la résolution à portée fixée. Les radars classiques émettent des impulsions de fréquence pure dont la durée est fixée par la précision de détection désirée. Le niveau de ces impulsions étant limité pour des raisons de technologie (puissance crête des tubes émetteurs à ne pas dépasser) la portée, une fois la durée d'impulsion choisie, est imposée. Cette incompatibilité entre portée et précision n'est qu'apparente car si la portée est bien fonction de la durée du signal, le pouvoir de résolution dépend uniquement de la largeur du spectre de ce signal et ces deux grandeurs : durée, largeur de spectre peuvent être choisies séparément. Woodward [19] a montré qu'à la plus grande largeur de spectre correspond la meilleure résolution. La largeur du spectre, pour une durée d'im-

pulsion donnée, peut, par exemple, être augmentée par modulation de la fréquence porteuse. Mais l'écho, réfléchi par la cible est, pour un radar moderne comme pour un radar classique, entaché de bruit et l'élimination du bruit par un filtre de bande est plus facile quand le spectre du signal est étroit (radar classique). Dans un radar moderne l'extraction hors du bruit du signal à large spectre exige un système détecteur plus complexe qui doit être *adapté* au signal, compte tenu de la nature du bruit. Dans le cas d'un bruit blanc gaussien, l'extraction de l'information s'effectue dans les meilleures conditions à l'aide d'un filtre qui réalise *l'autocorrélation* du signal [20, 21]. La compression temporelle qui en résulte localise de manière précise l'instant d'arrivée de l'écho et améliore le pouvoir de résolution.

9. 3. 1. — *Filtre adapté à un signal*

La réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre adapté au signal réel $s_1(t)$ doit être :

$$h(t) = s_1(-t) \tag{9. 2}$$

afin que le signal de sortie $s_2(t)$ donné par la formule 1. 29 soit l'autocorrélation de $s_1(t)$ (relation 1. 31) :

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_1(\tau - t)\, d\tau. \tag{9. 3}$$

La relation 9. 2 exprime que *la réponse impulsionnelle du filtre adapté est l'image du signal par rapport à un miroir perpendiculaire à l'axe des temps* (fig. 9. 10). Un tel filtre ne peut être réalisé physiquement : l'effet (réponse impulsionnelle) précéderait la cause [impulsion $\delta(t)$]. Tout filtre introduit un retard t_0. La relation entre signal et réponse impulsionnelle du filtre réel est de la forme

$$h(t) = C\, s_1(t_0 - t) \qquad C = C^{te}. \tag{9. 4}$$

IG. 9. 10. — *La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre réel adapté à un signal $s_1(t)$ est l'inverse dans le temps du signal $s_1(t)$ retardé d'une constante t_0.*

Un filtre adapté réel comprend une ligne à retard. L'équation 9. 4 a pour transformée dans le domaine des fréquences :

$$H(\omega) = C\, S_1^*(\omega)\, e^{-i\omega t_0}. \tag{9. 5}$$

Ainsi, à un déphasage près dû au retard t_0, *la réponse en fréquence* $H(\omega)$ *du filtre adapté est la fonction conjuguée du spectre* $S(\omega)$ *du signal* $s(t)$.

… qui suit la constante f_0, physiquement indispensable, peut être ignorée et seulement réintroduite à la fin des calculs.

En pratique, le signal $s_1(t)$ se présente sous des formes variées. Son spectre peut être élargi par modulation de fréquence, comme nous l'avons déjà dit, ou par d'autres procédés de codage. La variation dans le temps d'une des trois grandeurs caractéristiques de l'onde : amplitude, phase, fréquence peut être continue (codage analogique) ou discrète (codage digital).

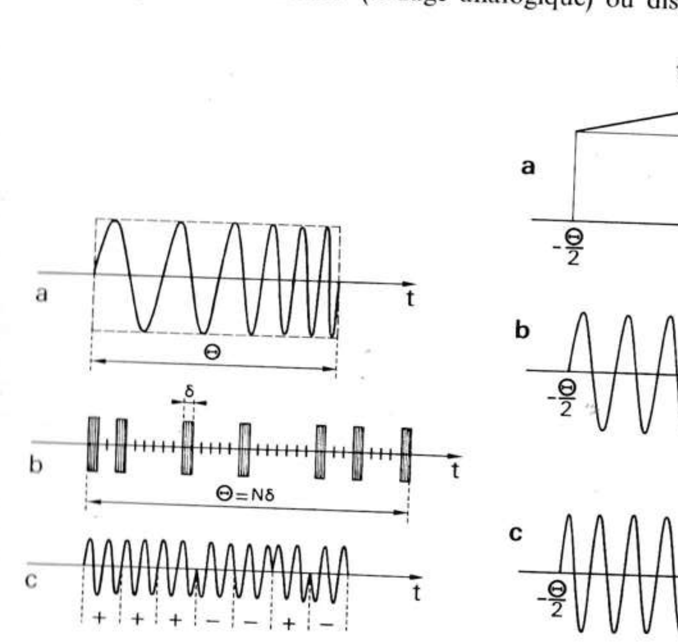


FIG. 9. 11. — *Signaux codés :*
a) *par modulation de fréquence;*
b) *par modulation d'amplitude;*
c) *par inversion de phase.*

FIG. 9. 12. — *Modulation linéaire de fréquence.*
a) Fréquence instantanée en fonction du temps : $f = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi_1}{dt}$.
b) Signal $s(t) = \Pi(t/\Theta)\cos\varphi_1(t)$.
c) Réponse impulsionnelle $h(t) = s(-t)$ du filtre adapté à ce signal.

La figure 9. 11 représente trois exemples de signaux : impulsion rectangulaire de durée Θ avec porteuse modulée en fréquence; train d'impulsions dont la durée totale Θ est divisée en N intervalles (digits) occupés suivant une certaine séquence par des impulsions élémentaires de durée $\delta = \Theta/N$; impulsion de durée Θ avec inversions de phase. Des lignes à ondes élastiques traitant ces trois formes de signaux sont décrites dans les paragraphes qui suivent. Nous analysons plus en détails les lignes dispersives adaptées au signal modulé linéairement en fréquence. L'exercice 9. 1 a pour but de déterminer graphiquement la réponse du filtre adapté au train d'impulsions de la figure 9. 11 *b*.

9. 3. 2. — *Signal modulé linéairement en fréquence*

Dans le cas d'un signal modulé linéairement en fréquence comme l'indique la figure 9. 12, la loi de variation en fonction du temps de la fréquence angulaire instantanée du signal est :

$$\omega = \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_0 + \mu t \qquad \text{pour} \qquad -\frac{\Theta}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\Theta}{2} \tag{9. 6}$$

et le signal $s_1(t)$ d'enveloppe rectangulaire a pour expression

$$s_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{\Theta}\right)\cos\varphi_1(t) \tag{9. 7}$$

avec

$$\varphi_1(t) = \omega_0 t + \frac{\mu}{2}t^2. \tag{9. 8}$$

La réponse impulsionnelle du filtre adapté à ce signal est, compte tenu de 9. 2 :

$$h(t) = C\,\Pi\left(\frac{t}{\Theta}\right)\cos\left(\omega_0 t - \mu\frac{t^2}{2}\right). \tag{9. 9}$$

9. 3. 2. 1. — Impulsion comprimée. — La réponse $s_2(t)$ au signal $s_1(t)$ appliqué au filtre adapté est l'autocorrélation de $s_1(t)$ (formule 9. 3). La figure 9. 13 montre que :

$$s_2(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad |t| > \Theta$$

$$s_2(t) = C\int_{\tau_1}^{\tau_2}\cos\left(\omega_0\tau + \mu\frac{\tau^2}{2}\right)\cos\left[\omega_0(\tau - t) + \mu\frac{(\tau - t)^2}{2}\right]d\tau$$

avec $\quad \tau_1 = t - \frac{\Theta}{2} \quad \tau_2 = \frac{\Theta}{2} \quad$ pour $\quad 0 < t < \Theta$

et $\quad \tau_1 = -\frac{\Theta}{2} \quad \tau_2 = t + \frac{\Theta}{2} \quad$ pour $\quad -\Theta < t < 0. \qquad (9. 10)$

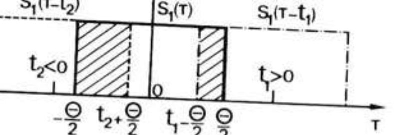


FIG. 9. 13. — *Autocorrélation d'une impulsion modulée linéairement en fréquence.* Suivant le signe de t, l'intervalle d'intégration est $[t - \Theta/2, \Theta/2]$ ou $[-\Theta/2, t + \Theta/2]$.

...ansformant le produit de cosinus en somme

$$= \frac{C}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \cos\left[\omega_0 t + \mu t\left(\tau - \frac{t}{2}\right)\right] d\tau$$

$$+ \frac{C}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \cos\left\{\omega_0(2\tau - t) + \frac{\mu}{2}[\tau^2 + (\tau - t)^2]\right\} d\tau$$

... abandonnant la deuxième intégrale qui conduit à un terme de ...ence $2\omega_0$, éliminé en pratique, il vient

$$s_2(t) = \frac{C}{2}\left[\frac{\sin[\omega_0 t + \mu t(\tau - t/2)]}{\mu t}\right]_{\tau_1}^{\tau_2}$$

$$s_2(t) = \frac{C}{\mu t}\sin\left[\frac{\mu t}{2}(\tau_2 - \tau_1)\right]\cos\left[\omega_0 t + \frac{\mu t}{2}(\tau_2 + \tau_1 - t)\right].$$

D'après les relations 9. 10 :

$$\tau_2 + \tau_1 = t \qquad \text{et} \qquad \tau_2 - \tau_1 = \Theta - |t|$$

...s'écrit :

$$s_2(t) = C\,\frac{\sin\frac{\mu t}{2}(\Theta - |t|)}{\mu t}\cos\omega_0 t \qquad \text{pour} \qquad -\Theta < t < \Theta$$

...ncore

$$s_2(t) = C\,\frac{\sin\frac{\mu t}{2}(\Theta - |t|)}{\frac{\mu t}{2}(\Theta - |t|)}\cdot\frac{(\Theta - |t|)}{2}\cos\omega_0 t. \qquad (9.\ 11)$$

Le signal de sortie, appelé impulsion comprimée, a pour enveloppe, ... l'intervalle $[-\Theta, \Theta]$ où il existe, une courbe en $(\sin x)/x$ multipliée ... les droites $\Theta - |t|$ qui délimitent le triangle d'autocorrélation de ...eloppe rectangulaire du signal d'entrée. L'onde porteuse a une fré...ce fixe égale à la fréquence centrale $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. En désignant par $B = \frac{\mu\Theta}{2\pi}$ ...ursion de la modulation de fréquence du signal d'entrée, l'enveloppe ... de l'impulsion comprimée ne dépend que du produit $B\Theta = R$; en effet ...nction de la variable réduite t/Θ :

$$e_2(t) = C\,\frac{\Theta}{2}\,\frac{\sin\left[\pi R\,\frac{t}{\Theta}\left(1 - \frac{|t|}{\Theta}\right)\right]}{\pi R\,\frac{t}{\Theta}}. \qquad (9.\ 12)$$

La figure 9. 14 représente le signal à la sortie d'un filtre de produit $B\Theta = 10$. Pour des valeurs plus élevées, l'enveloppe de l'impulsion comprimée se rapproche d'une courbe en $(\sin x)/x$ pour les premiers lobes :

$$e_2(t) \simeq \frac{C\Theta}{2}\,\frac{\sin\left(\pi R\,\frac{t}{\Theta}\right)}{\pi R\,\frac{t}{\Theta}}$$

dont la largeur à 3 dB du pic central est

$$\Delta t = \frac{0{,}885}{R}\,\Theta = \frac{0{,}885}{B}. \qquad (9.\ 13)$$

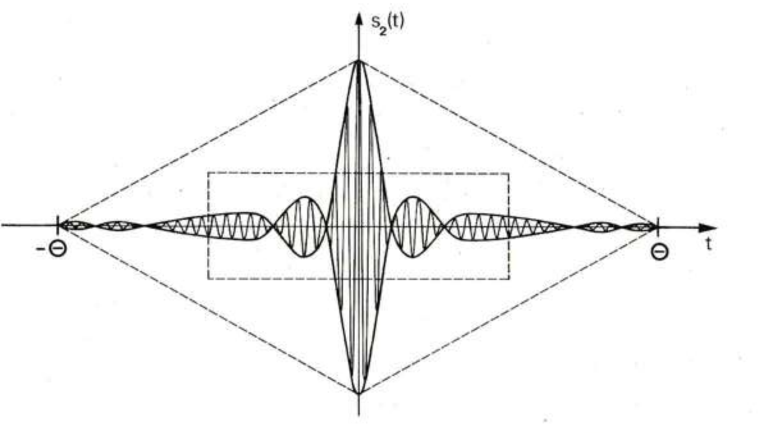


FIG. 9. 14. — *Impulsion comprimée à la sortie d'un filtre de produit $B\Theta = 10$.*
Le rectangle en pointillé est l'enveloppe du signal d'entrée modulé linéairement en fréquence.

Le signal de durée Θ est comprimé dans le temps d'un facteur égal à 1,13 R. Le filtre passif étant supposé sans pertes, la conservation de l'énergie fixe approximativement la hauteur de l'impulsion à $\sqrt{B\Theta} = C\Theta/2$, d'où

$$C \simeq \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}.$$

Par rapport au pic principal, les niveaux des lobes secondaires sont de − 13,3 dB pour les premiers et de − 18 dB pour les seconds.

9. 3. 2. 2. — Spectre du signal. Réponse en fréquence du filtre adapté. — Le spectre du signal modulé linéairement en fréquence, conjugué de la réponse en fréquence du filtre adapté, se calcule par la formule 1. 22 :

$$S_1(\omega) = \frac{1}{2}E_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}E_1^*(\omega + \omega_0). \qquad (9.\ 14)$$

Avec $e_1(t) = \Pi(t/\Theta)$ et $\Psi(t) = \mu t^2/2$, la relation 1. 21 fournit :

$$E_1(\omega) = \int_{-\Theta/2}^{+\Theta/2} \exp\left[\frac{i\mu}{2}\left(t^2 - 2\frac{\omega}{\mu}t\right)\right] dt.$$

En complétant le carré :

$$E_1(\omega) = e^{-i\frac{\omega^2}{2\mu}} \int_{-\Theta/2}^{+\Theta/2} \exp\left[\frac{i\mu}{2}\left(t - \frac{\omega}{\mu}\right)^2\right] dt$$

le changement de variable

$$\sqrt{\mu}\left(t - \frac{\omega}{\mu}\right) = \sqrt{\pi}x \quad \Rightarrow \quad dt = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\, dx$$

s'impose. L'intégrale devient :

$$E_1(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\, e^{-i\frac{\omega^2}{2\mu}} \int_{-X_1}^{X_2} e^{i\pi\frac{x^2}{2}}\, dx \qquad (9.\ 15)$$

où

$$X_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{R}{2}}\left(1 \pm \frac{\omega}{\pi B}\right) \qquad (9.\ 16)$$

Pour des valeurs élevées de R, les bornes d'intégration sont $-\infty$ et $+\infty$ lorsque $|\omega| < \pi B$; comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{R\to\infty} E_1(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega^2}{2\mu}\right)} \qquad \text{pour} \qquad -\pi B < \omega < \pi B.$$

Par contre lorsque $|\omega| > \pi B$ l'intégrale est nulle car les bornes d'intégration sont très voisines. Nous retrouvons le résultat de l'exercice 1. 7 établi par la méthode de la phase stationnaire : l'amplitude du spectre d'un signal modulé linéairement en fréquence est un créneau centré sur la fréquence centrale f_0 et de largeur égale à l'excursion en fréquence B.

Lorsque le produit BΘ est fini, le spectre (9. 15) s'exprime en fonction des intégrales de Fresnel

$$C(X) = \int_0^X \cos\frac{\pi x^2}{2}\, dx \qquad \text{et} \qquad S(X) = \int_0^X \sin\frac{\pi x^2}{2}\, dx \qquad (9.\ 17)$$

par

$$E_1(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\, e^{-i\frac{\omega^2}{2\mu}}\, [C(X_1) + C(X_2) + iS(X_1) + iS(X_2)]. \qquad (9.\ 18)$$

Les courbes de la figure 9. 15 montrent que *l'amplitude* du spectre se rapproche d'un rectangle lorsque R augmente. Ces courbes rappellent celles qui rendent compte, en optique [22], de la diffraction à distance finie de la lumière par une fente à bords rectilignes parallèles (fig. 9. 16).

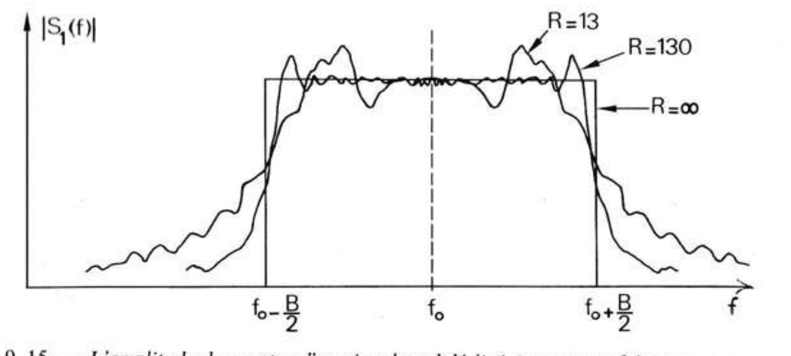


FIG. 9. 15. — *L'amplitude du spectre d'un signal modulé linéairement en fréquence se rapproche d'un rectangle quand le produit BΘ = R augmente.* (D'après la figure 6. 6 de la référence 21.)

L'intensité lumineuse reçue sur un écran placé à une distance b d'une fente de largeur d éclairée par une source distante de a dépend du rapport $R = \dfrac{d^2(a+b)}{\lambda ab}$ qui joue le rôle du produit BΘ; l'abscisse z se substituant à la fréquence et la largeur Δ de l'image géométrique de la fente remplaçant l'excursion en fréquence B. Il est d'ailleurs possible d'établir l'analogie entre un filtre adapté qui comprime dans le temps l'impulsion modulée en fréquence et une lentille qui focalise dans l'espace un faisceau de lumière parallèle [23]. Lorsque tous les points de la fente vibrent en phase ($a = \infty$), les courbes de la figure 9. 15 fournissent (avec $R = d^2/\lambda b$ et $B \to d$) le diagramme de rayonnement à une distance finie b d'un transducteur rectiligne de largeur d petite devant b.

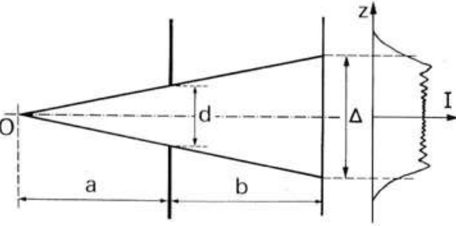


FIG. 9. 16. — *A distance finie d'une fente, la courbe de répartition de l'intensité lumineuse sur un écran est semblable au carré des amplitudes spectrales du signal modulé linéairement en fréquence.*

La *réponse en fréquence* du filtre adapté est d'après 9. 5 et 9. 14

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}}\, S_1^*(\omega)\, e^{-i\omega t_0} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}\, [E_1^*(\omega - \omega_0) + E_1(\omega + \omega_0)]\, e^{-i\omega t_0}$$

compte tenu de la valeur $C = \sqrt{2\mu/\pi}$. En supposant, comme nous l'avons fait implicitement jusqu'ici, que les deux parties du spectre centrées sur les fréquences $\pm\, \omega_0$ se recouvrent très peu, la réponse en fréquence pour $\omega > 0$ est d'après 9. 18 :

$$H(\omega) = \exp i \left[\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} - \omega t_0\right] \frac{(P - iQ)}{\sqrt{2}} \qquad (9.\ 19)$$

en posant $\quad P = C(X_1) + C(X_2) \quad$ et $\quad Q = S(X_1) + S(X_2). \qquad (9.\ 20)$

X_1 et X_2 se déduisent de la formule 9. 16 en remplaçant ω par $\omega - \omega_0$.

La phase de $H(\omega)$ est la somme de deux termes :

$$\Phi(\omega) = \Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega). \qquad (9.\ 21)$$

— Le plus important

$$\Phi_1(\omega) = \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} - \omega t_0 \qquad (9.\ 22)$$

traduit une *variation linéaire du retard de groupe* avec la fréquence :

$$\tau_g = -\frac{d\Phi_1}{d\omega} = t_0 - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} = t_0 - \Theta \frac{f - f_0}{B}. \qquad (9.\ 23)$$

Le filtre adapté à un signal modulé en fréquence est nécessairement dispersif; la pente de la caractéristique « retard-fréquence » étant opposée à celle de la loi de modulation de la fréquence instantanée du signal (fig. 9. 17). Cet effet dispersif explique la compression de l'impulsion : les composantes de basse fréquence qui forment le début du signal sont plus retardées par le filtre que les composantes de haute fréquence arrivant à la fin du signal.

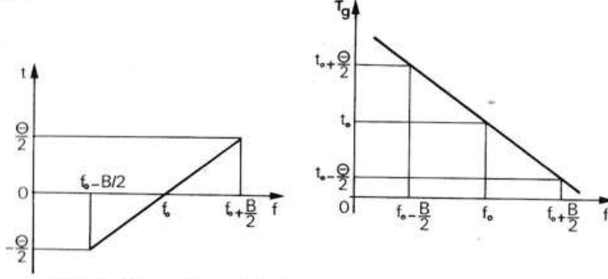


FIG. 9. 17. — *Caractéristique retard de groupe-fréquence.*
La fréquence du signal augmente avec le temps, en conséquence les composantes de basse fréquence sont les plus retardées.

— La deuxième partie de la phase

$$\Phi_2(\omega) = -\operatorname{Arctg} \frac{Q}{P} \qquad (9.\ 24)$$

conduit à des *fluctuations du retard de groupe*

$$\Delta\tau_g = -\frac{d\Phi_2}{d\omega} = \frac{PQ' - QP'}{P^2 + Q^2}.$$

Étant donné les expressions 9. 20 et 9. 17, il vient

$$P' = \frac{dC(X_1)}{d\omega} + \frac{dC(X_2)}{d\omega} = \frac{1}{\pi B}\sqrt{\frac{R}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}X_1^2 - \cos\frac{\pi}{2}X_2^2\right)$$

et

$$Q' = \frac{dS(X_1)}{d\omega} + \frac{dS(X_2)}{d\omega} = \frac{1}{\pi B}\sqrt{\frac{R}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2}X_1^2 - \sin\frac{\pi}{2}X_2^2\right).$$

Après transformation des différences de fonctions trigonométriques en produit, les fluctuations relatives du retard de groupe sont données par la formule

$$\frac{\Delta\tau_g}{\Theta} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{R}}\sin\frac{\pi}{4}(X_1^2 - X_2^2)\,\frac{P\cos\frac{\pi}{4}(X_1^2 + X_2^2) + Q\sin\frac{\pi}{4}(X_1^2 + X_2^2)}{P^2 + Q^2}. \qquad (9.\ 25)$$

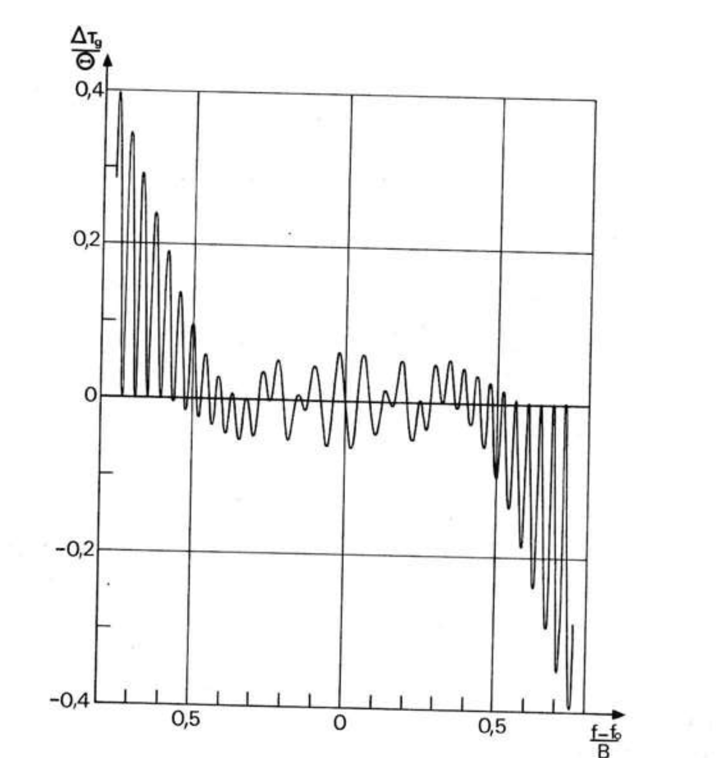


FIG. 9. 18. — *Fluctuations relatives du retard de groupe $\Delta\tau_g/\Theta$ lorsque $B\Theta = 25$.*
D'après P. HARTEMANN (figure 14 de la référence 24).

de l'ordre de $1/\pi\sqrt{R}$, décroît lorsque R augmente. $\Delta\tau_g$ s'annule pour des fréquences telles que :

$$X_1^2 - X_2^2 = 4p \qquad p \text{ entier}$$

soit, d'après 9. 16 :

$$\frac{f - f_0}{B} = \frac{p}{R} \tag{9. 26}$$

les fluctuations sont d'autant plus rapides que R est grand. Ces résultats peuvent se vérifier sur la courbe de la figure 9. 18 tracée pour R = 25.

L'analyse précédente montre que le produit BΘ intervient comme grandeur essentielle aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine spectral. Cependant, une même valeur de R s'obtient soit avec B grand et Θ petit, par exemple B = 20 MHz, Θ = 5 μs, soit avec B petit et Θ grand, par exemple B = 100 kHz, Θ = 1 ms. La première classe de signaux (radar) ne peut être traitée qu'avec des lignes de fréquence centrale élevée, la deuxième classe de signaux (sonar) exige des lignes longues (plusieurs mètres). La majorité des exemples que nous décrivons se rapporte à des lignes traitant des signaux de durée relativement courte, exception faite des lignes à ondes élastiques les plus anciennes : guides à ondes de volume, dont nous rappelons les caractéristiques dans le paragraphe qui suit. Des trois autres types de lignes examinées successivement : lignes à ondes de Love, lignes à ondes de Rayleigh, lignes à interaction élasto-optique, les lignes à ondes de Rayleigh, aptes à traiter des signaux de formes très diverses, sont les plus employées.

9. 3. 3. — *Lignes dispersives à ondes élastiques de volume*

Le principe du filtre adapté a été mis en œuvre de plusieurs façons. Les premiers filtres construits ont été des circuits purement électriques à base de cellules en T ponté. Ils ont pour inconvénient d'exiger un grand nombre de composants et d'être en conséquence volumineux. Dans le domaine de fréquences où ils sont utilisables, différentes lignes à ondes élastiques peu encombrantes les remplacent. La propagation des ondes élastiques dans un milieu homogène n'est pas dispersive, du moins tant que la longueur d'onde est grande devant les distances interatomiques (paragr. 1. 2. 2). Rappelons qu'il faut une fréquence de l'ordre de 3 000 GHz pour que λ = 10 Å. Cette fréquence est hors du domaine radioélectrique, aussi les lignes dispersives *simples* à ondes élastiques de volume sont-elles des *guides*, l'effet de dispersion est dû à la géométrie du milieu de propagation [25].

Dans un solide isotrope, une onde transversale polarisée suivant Ox_2 se propageant suivant Ox_1 crée seulement une contrainte $T_{12} = c_{66}S_{12}$ et satisfait donc à la condition aux limites $T_{i3} = 0$ sur toute surface libre perpendiculaire à Ox_3. Ainsi il existe dans une plaque mince ou un ruban large un mode non dispersif de vitesse V_T (mode d'ordre zéro). Mais cette onde TH, qui se conserve à la réflexion sur les surfaces libres de ce guide, donne lieu à des modes d'ordre supérieur dont les courbes de dispersion sont semblables à celle de la figure 1. 8. La variation du retard de groupe, qui se déduit de cette figure, a été exploitée, entre les fréquences de coupure des deux premiers modes, pour réaliser des lignes adaptées à des signaux modulés (non linéairement) en fréquence [26]. Des rapports de compression de 100 avec des impulsions de durée supérieure à 500 μs pour une fréquence de quelques MHz sont possibles. Un des défauts de ce genre de lignes est l'existence de signaux parasites, dus au mode d'ordre zéro, difficiles à réduire.

De ce point de vue les *ondes de Lamb* [27] fournissent de meilleurs résultats. L'effet de dispersion résulte de la variation avec la fréquence de la proportion des ondes longitudinales (L) et transversales (TV) de vitesses différentes constituant ces ondes. La courbe du retard de groupe en fonction de la fréquence, tracée sur la figure 9. 19 pour le premier mode d'extension, présente un point d'inflexion au voisinage duquel le retard varie linéairement (*). Des lignes ont été construites [26] en alliage d'aluminium pour des fréquences inférieures à 5 MHz et en acier, plus facile à former en ruban mince, jusqu'à des fréquences de 30 MHz. Les défauts de linéarité limitent l'excursion en fréquence à 10 % en valeur relative. Le rapport de compression atteint 100, la durée d'impulsion est comprise entre 50 μs et plusieurs millisecondes (pour une milliseconde, la longueur du ruban d'aluminium est de 4 m environ). Les pertes sont en général inférieures à 40 dB et le niveau des lobes secondaires est inférieur à – 30 dB. Pour réduire les écarts de linéarité, des rubans à tronçons d'épaisseurs différentes (fig. 9. 20) ou à variation continue d'épaisseur ont été essayés [28]. Toutes choses égales par ailleurs (linéarité, taux de compression), la bande passante relative est augmentée (40 %), la longueur et les pertes de la ligne sont en conséquence diminuées.

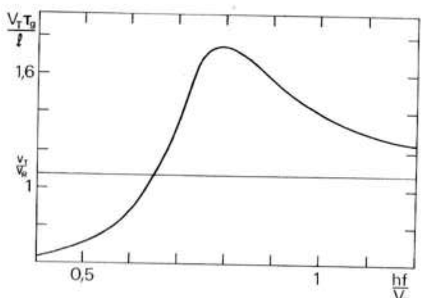


FIG. 9. 19. — *Ondes de Lamb. Variation du retard de groupe τ_g en fonction de la fréquence f pour le premier mode symétrique dans un ruban isotrope, de longueur l, d'épaisseur h et de rapport $V_T/V_L = 0,5$.* A basse fréquence, la proportion d'ondes longitudinales est plus importante que celle des ondes transversales, à haute fréquence c'est l'inverse. A fréquence très élevée (λ ≪ h) la vitesse tend vers celle des ondes de Rayleigh V_R.

(*) Cette courbe se déduit de relations de dispersion classiques [27] appelées équations de Rayleigh-Lamb. Elles n'ont pas été établies dans ce livre (pas plus que celles de Pochhammer-Chree se rapportant aux cylindres) puisque l'étude générale des ondes guidées par des rubans ou tubes était exclue de notre programme.

Des ondes de flexion et d'extension, semblables aux ondes de Lamb peuvent être guidées par des fils ou des tubes. Des lignes à fréquence centrale de quelques centaines de kHz et de durée d'impulsion de plusieurs millisecondes ont été réalisées.

FIG. 9. 20. — *Ligne dispersive à tronçons d'épaisseurs différentes.*

D'autres principes que le guidage des ondes élastiques de volume ont été appliqués, par exemple celui de la *diffraction par un réseau* [29, 30]. La figure 9. 21 représente une ligne à deux réseaux perpendiculaires. Le réseau E constitué d'éléments sources excités en phase émet des ondes transversales non dispersives. Le réseau R, comprenant des éléments associés en parallèle, est le transducteur récepteur. L'effet de dispersion est lié au chemin, différent suivant la fréquence, que parcourent les ondes entre les deux transducteurs. Comme le milieu de propagation est isolant (silice), la fréquence centrale de fonctionnement et donc la bande passante de ce genre de ligne est plus élevée, par exemple 45 MHz et 20 MHz [6]. Des taux de compression de 400 ont été mentionnés.

FIG. 9. 21. — *Ligne dispersive à diffraction à réseaux perpendiculaires.* La répartition des transducteurs est choisie pour que le trajet varie avec la fréquence.

De la géométrie précédente peut être rapprochée celle de la *ligne à coin* [31, 32] bien qu'elle fonctionne suivant un autre principe (fig. 9. 22).

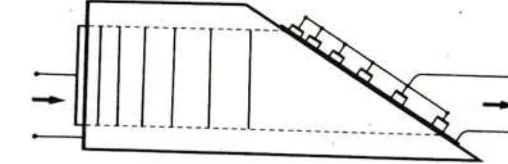


FIG. 9. 22. — *Ligne dispersive à coin.* Les fréquences de résonance des transducteurs de sortie sont différentes.

Les éléments constituant le transducteur récepteur se comportent comme des résonateurs. Ils sont disposés de façon que la distance entre deux éléments adjacents et le transducteur émetteur unique diffère d'une longueur d'onde à leur fréquence de résonance. La loi de dispersion désirée est obtenue en ajustant l'écart entre les résonateurs. La pente du retard en fonction de la fréquence est positive ou négative selon que les résonateurs de fréquence élevée sont les plus éloignés ou les plus proches du transducteur émetteur.

9. 3. 4. — *Lignes dispersives à ondes de Love*

La vitesse des ondes élastiques se propageant dans un milieu constitué d'une couche et d'un substrat semi-infini varie, en fonction de la fréquence. Le cas des ondes de Love a été étudié au paragraphe 5. 2. 4 : à fréquence basse la vitesse de phase est celle du substrat (V′) et à fréquence élevée celle de la couche (V < V′). Cet effet dispersif se prête à la réalisation de filtres adaptés à des signaux modulés linéairement en fréquence puisque la courbe du retard de groupe en fonction de la fréquence (fig. 5. 39) présente un point d'inflexion autour duquel elle est assimilable à une droite.

Divers couples de matériaux ont été essayés [34] : cuivre sur béryllium, tungstène sur béryllium, verre sur silice, silice sur silicium... Le dernier couple offre un avantage technologique; la couche est obtenue par oxydation thermique du substrat qui est monocristallin. Les couches métalliques polycristallines restreignent l'emploi des deux premières structures à des fréquences inférieures à 50 MHz. Par contre les lignes à couche amorphe (silice) fonctionnent à des fréquences plus élevées. L'épaisseur de la couche, fonction de la fréquence et des matériaux est de quelques dizaines de microns vers 10 MHz. L'uniformité et l'homogénéité de la couche sur toute la longueur du substrat sont des problèmes difficiles à résoudre qui mettent en cause la reproductibilité des caractéristiques des lignes. La figure 9. 23 montre un exemple de structure de ligne munie de deux transducteurs soudés sur la surface. Ceux-ci sont des résonateurs, plaquettes de céramique ou de niobate de lithium suivant la fréquence, créant des ondes transversales horizontales (TH). La largeur de l'électrode est approximativement égale à une demi-longueur d'onde à la fréquence centrale de façon que le diagramme de rayonnement du transducteur soit très ouvert : une partie de l'énergie se réfléchit à l'interface couche-substrat et chemine dans la couche.

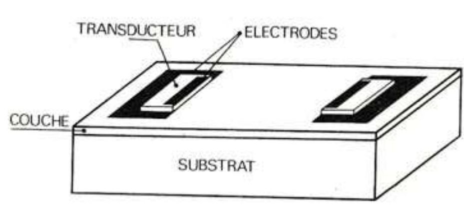


FIG. 9. 23. — *Ligne à ondes de Love munie de deux transducteurs soudés sur la surface, de largeur active égale à $\lambda_0/2$, à diagramme de rayonnement très ouvert.* Les ondes TH créées se réfléchissent à l'interface et cheminent dans la couche. (Fig. 5 de la référence 34.)

La figure 9. 24 se rapporte à une ligne W/Be de fréquence centrale 32,5 MHz (épaisseur $h = 4$ µm) et de longueur 7,5 cm. La linéarité est bonne sur une plage de fréquences voisine de 100 %, mais la variation importante (14 dB) des pertes limite en pratique l'excursion en fréquence à moins de 10 MHz. La caractéristique retard-fréquence d'une ligne SiO_2/Si

portée sur la figure 9. 25 : Θ = 0,8 μs, B ≃ 80 MHz autour de 130 MHz
5 μm). Les pertes inférieures à 50 dB varient de 5 dB dans la bande. laboratoire un taux de compression voisin de 1 000 a été atteint = 300 MHz, B = 215 MHz, Θ = 4,65 μs) mais avec des variations des es supérieures à 10 dB [35].

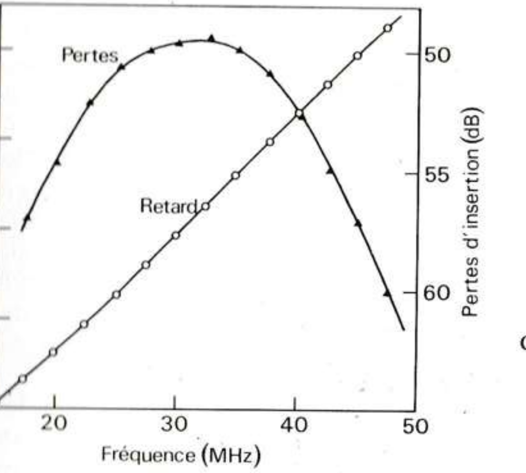
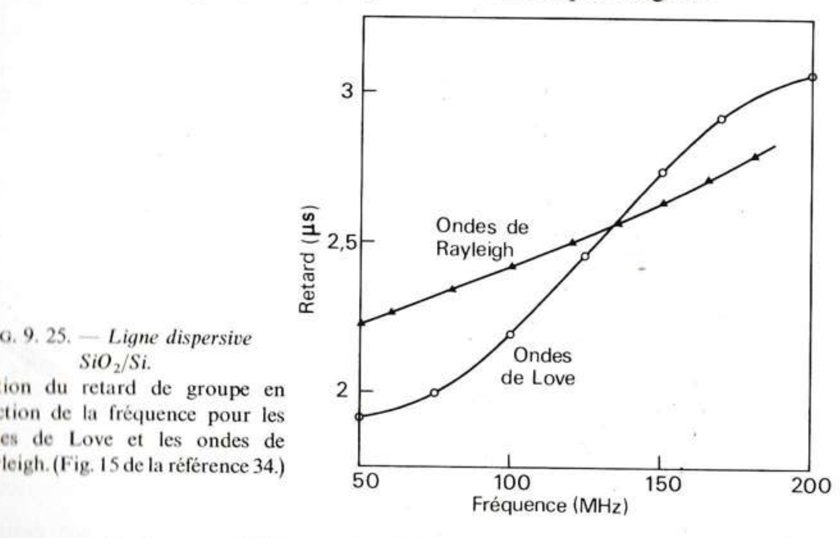


FIG. 9. 24. — *Ligne dispersive à ondes de Love (W/Be).* Courbes du retard de groupe et des pertes en fonction de la fréquence. (Fig. 12 et 13 de la référence 34.)

Cette structure stratifiée autorise aussi l'excitation et la propagation des de Rayleigh dispersives (voir fig. 9. 25). Le transducteur est alors nté de façon à engendrer l'onde polarisée dans le plan sagittal.



G. 9. 25. — *Ligne dispersive SiO_2/Si.* ion du retard de groupe en ction de la fréquence pour les es de Love et les ondes de leigh. (Fig. 15 de la référence 34.)

9. 3. 5. — *Filtres adaptés à ondes de Rayleigh*

La complexité des ondes de Rayleigh est compensée par un avantage amental : elles sont excitées (détectées) par des transducteurs à électrodes digitées, de technologie simple, qui sont équivalents à une distribution discrète de sources (récepteurs) ultrasonores dont la phase et l'intensité relatives sont déterminées indépendamment par la position et la longueur active des doigts (paragr. 7. 2. 4). La synthèse d'une grande variété de réponses impulsionnelles peut ainsi être effectuée avec des géométries appropriées de transducteurs.

9. 3. 5. 1. — Lignes dispersives pour signal modulé en fréquence. — Le schéma de fonctionnement d'un filtre adapté à un signal modulé en fréquence est illustré sur la figure 9. 26. L'effet dispersif provient de la variation le long du transducteur émetteur de l'espacement entre doigts. Les composantes de fréquence basse sont émises préférentiellement par les zones à grande distance interdigitale, les composantes de fréquence élevée par les zones à petite distance interdigitale. Tout se passe comme si la source d'ondes de Rayleigh se déplaçait avec la fréquence. Comme le transducteur récepteur, à grande bande passante, est bien localisé, le trajet parcouru par les ondes élastiques varie avec la fréquence. La comparaison entre le signal et le dessin du transducteur — ou sa réponse impulsionnelle (fig. 9. 26 *a*) — montre que la relation $h(t) = s(t_0 - t)$ est satisfaite.

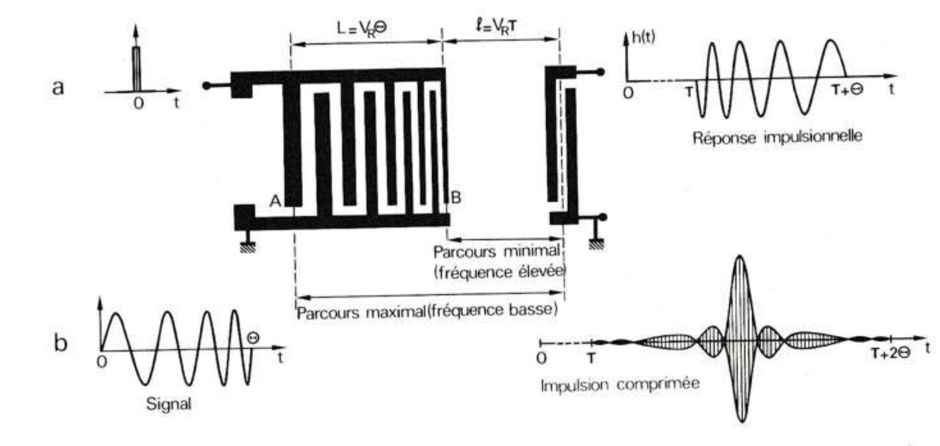


FIG. 9. 26. — *Ligne dispersive à ondes de Rayleigh adaptée à un signal modulé en fréquence.*

a) *Réponse impulsionnelle.* La comparer au signal dont elle doit être l'inverse dans le temps.
b) *Impulsion comprimée.* Les composantes de fréquence élevée, de la fin du signal, excitent l'extrémité B du transducteur au moment où arrivent les ondes de Rayleigh engendrées à l'entrée A des peignes par les composantes de basse fréquence du début du signal.

La phase de la réponse impulsionnelle du filtre adapté à un signal modulé linéairement en fréquence est, d'après la relation 9. 9 :

$$\frac{\varphi(t)}{2\pi} = f_0 t - \frac{B}{\Theta}\frac{t^2}{2} \qquad -\frac{\Theta}{2} < t < +\frac{\Theta}{2}.$$

Conformément à la méthode des sources discrètes exposée au paragraphe 7. 2. 4 les sources sont à distribuer aux points $x_n = V_R t_n$, les

instants t_n étant déterminés par la condition $\varphi(t_n) = n\pi$:

$$\frac{B}{\Theta} t_n^2 - 2 f_0 t_n + n = 0$$

soit

$$t_n = \frac{\Theta f_0}{B} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{nR}{(f_0 \Theta)^2}} \right]. \tag{9. 27}$$

La durée Θ de la réponse impulsionnelle limite les valeurs de l'entier n

$$- \left(f_0 + \frac{B}{4} \right) \Theta \leqslant n \leqslant \left(f_0 - \frac{B}{4} \right) \Theta .$$

Par exemple pour $f_0 = 50$ MHz, $\Theta = 6$ µs le transducteur comprend $N = 2 f_0 \Theta = 600$ doigts. La longueur de recouvrement entre dents adjacentes se déduit de la formule 7. 96, compte tenu du fait que l'enveloppe est rectangulaire :

$$l_n = \frac{l_0 f_0}{f(t_n)} = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{nR}{(f_0 \Theta)^2}}}. \tag{9. 28}$$

Dans le cas envisagé ici, où l'adaptation au signal est assurée par le seul transducteur d'entrée, le transducteur de sortie n'a pour rôle que de restituer un signal électrique. Sa bande passante Δf doit être supérieure à l'excursion de fréquence; il ne comporte en conséquence qu'un nombre restreint de doigts puisque, d'après la formule 7. 37 :

$$N - 1 = 1{,}77 \frac{f_0}{\Delta f}.$$

Le calcul précédent est mené dans des conditions idéales car il y est négligé en particulier la variation de vitesse des ondes de Rayleigh sous les doigts métalliques qui annulent la composante tangentielle du champ électrique associé à l'onde, l'effet de masse des électrodes (plus faible avec l'aluminium qu'avec l'or), le couplage entre sources par effet piézoélectrique inverse. Néanmoins l'expérience confirme bien l'analyse lorsque le cristal est faiblement piézoélectrique comme le quartz. D'autre part il est possible, en cas de besoin, d'apporter de légères corrections au dessin du transducteur afin d'obtenir la réponse impulsionnelle désirée. De nombreuses lignes ont été construites sur ce principe et fonctionnent dans le domaine suivant :

— Fréquence centrale		$10 \text{ MHz} < f_0 < 400 \text{ MHz}$
— Excursion relative de fréquence		$\frac{B}{f_0} < 50\ \%$
— Durée du signal		$1\ \mu s < \Theta < 50\ \mu s$
— Produit $B\Theta = R$		$10 < R < 1\,000$
— Pertes (quartz α)		30 à 50 dB
— Coefficient de température $\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{d\theta}$ pour le quartz α, propagation suivant X [36]	coupe Y	$-2{,}4 \cdot 10^{-5}\ (°C)^{-1}$
	coupe ST	0

Bien que donnant lieu à des pertes moindres, le niobate de lithium est moins employé que le quartz en raison de son coefficient de température élevé ($8{,}5 \cdot 10^{-5}$) et des effets parasites dus à son grand coefficient de couplage.

La photographie 9. 27 représente une des premières lignes fabriquées. Elle est en quartz (coupe Y, propagation suivant X) et fonctionne autour de 14 MHz ($B = 5{,}5$ MHz, $\Theta = 4$ µs) avec un rapport de compression de 24. En fait le transducteur d'entrée a été prolongé à gauche et à droite de la partie utile. Sa longueur de 14,7 mm correspond aux fréquences extrêmes de 10,8 et 17,1 MHz. D'autre part les doigts des peignes ont une longueur constante. Il était en effet prévu à l'époque de mettre en forme la réponse impulsionnelle par un limiteur (pour supprimer l'effet de convolution avec le peigne récepteur) et un écrêteur (pour obtenir une amplitude constante). L'impédance d'entrée est équivalente à une capacité de l'ordre de 20 pF et à une résistance en parallèle de 70 kΩ. Le transducteur récepteur ne comporte que 6 dents de largeur 56 µm. Le niveau des lobes secondaires de l'impulsion comprimée (fig. 9. 28)

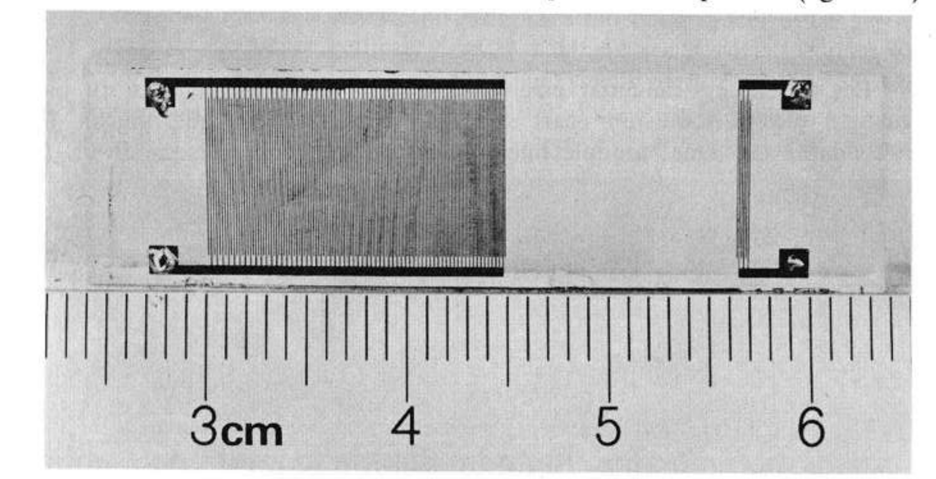
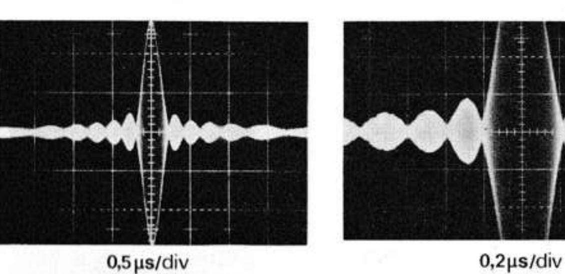


FIG. 9. 27. — *Ligne dispersive à ondes de Rayleigh en quartz.*
$f_0 = 14$ MHz, $B = 5{,}5$ MHz, $\Theta = 4$ µs. La largeur moyenne des doigts est 56 µm.



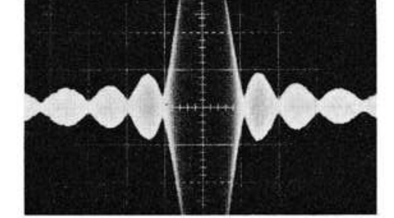


FIG. 9. 28. — *Impulsion comprimée fournie par la ligne de la figure 9. 27.*
Largeur à 3 dB : 0,17 µs, niveau des lobes secondaires : − 16 dB.

pic central. La photographie 9. 29 montre la réponse en fréquence de cette ligne. Pour vérifier que la réponse en fréquence se rapproche d'un créneau quand le produit BΘ augmente, conformément aux prévisions du paragraphe 9. 3. 2. 2, nous avons juxtaposé la réponse en fréquence d'une ligne dispersive de produit BΘ = 90.

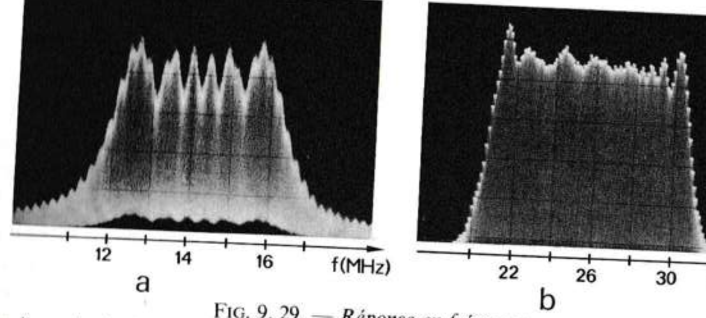


FIG. 9. 29. — *Réponse en fréquence.*
a) de la ligne de la figure 9. 27 (BΘ = 22); b) d'une ligne de produit BΘ = 90 (f_0 = 26 MHz, B = 9 MHz, Θ = 10 µs). Comparer ces courbes avec celles de la figure 9. 15.

Les utilisateurs de radar exigent en général entre les niveaux du pic principal et des lobes un écart supérieur aux 13,3 dB que fournit le filtre adapté au signal modulé linéairement en fréquence lorsque BΘ ≫ 1.

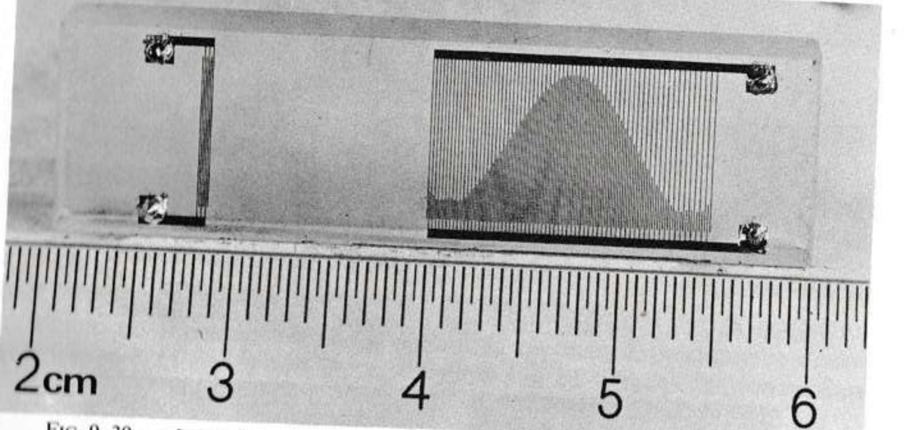
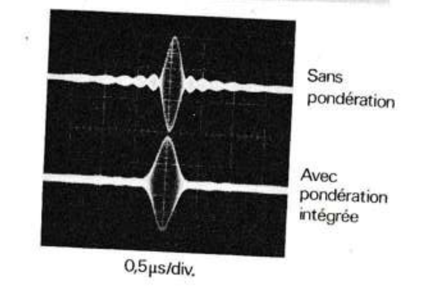


FIG. 9. 30. — *Ligne dispersive à pondération d'amplitude.*
… = 14 MHz, B = 5,5 MHz, Θ = 4 µs.



…G. 9. 31. — *Comparaison entre les impulsions comprimées des lignes des figures 9. 27 et 9. 30.* La pondération réduit les lobes secondaires mais élargit l'impulsion.

Un écart plus grand peut être obtenu par deux procédés :

Le premier consiste à faire varier selon une loi appropriée la longueur de recouvrement des doigts du transducteur d'entrée, sans modifier leur position [37]. La ligne de la figure 9. 30 avec une pondération de Dolph-Tchebycheff [38], prévue pour un écart de 40 dB avec l'hypothèse d'un peigne illimité, a donné expérimentalement 27 dB. La différence, qui provient de la limitation du peigne, est importante parce que le taux de compression est faible. Cependant cet avantage n'est acquis qu'au prix d'un élargissement de l'impulsion comprimée (fig. 9. 31) et d'une augmentation des pertes. Le filtre n'est d'ailleurs plus adapté au signal puisque la réponse impulsionnelle modifiée ne satisfait plus à la relation 9. 2.

Le deuxième procédé procurant le même avantage sans cet inconvénient est préférable mais il exige un signal modulé non linéairement en fréquence [39]. La loi de variation en fonction du temps de la fréquence instantanée est, par exemple, une courbe en forme de S résultant de l'association d'une droite et d'une période de sinusoïde (fig. 9. 32). Le niveau des lobes secondaires dépend de l'amplitude relative de la sinusoïde [40]. La figure 9. 33 montre l'impulsion comprimée à la sortie d'une ligne de fréquence centrale f_0 = 14 MHz (B = 5,5 MHz, Θ = 4 µs) prévue pour une réjection de — 27,5 dB. La valeur mesurée est − 25 dB. Le signal d'autocorrélation n'a plus la forme d'une courbe en $(\sin x)/x$, sa durée Δt à 3 dB est supérieure à 1/B si bien que le rapport des durées du signal et de l'impulsion comprimée (18) est inférieur au produit BΘ = 22.

f
$f_o+\frac{B}{2}$
f_o
$f_o-\frac{B}{2}$
$-\frac{\Theta}{2}$
0
$\frac{\Theta}{2}$
t

FIG. 9. 32. — *Caractéristique fréquence instantanée-temps d'un signal modulé non linéairement en fréquence.*

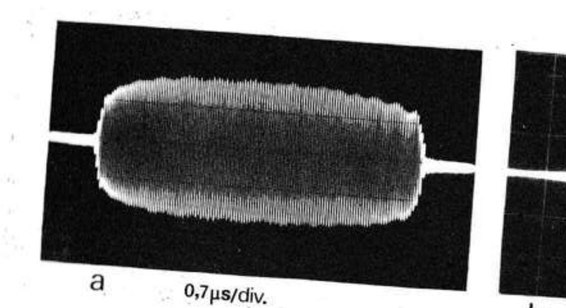
0,5µs/div.

FIG. 9. 33. — *Impulsion comprimée à la sortie d'une ligne à courbe de retard en forme de S* : f_0 = 14 MHz, B = 5,5 MHz, Θ = 4 µs, *lobes secondaires* : − 25 dB.

Une ligne fonctionnant à fréquence un peu plus élevée (f_0 = 22 MHz, B = 5 MHz, Θ = 5,6 µs) est représentée sur la figure 9. 34. Les extrémités de la réponse impulsionnelle (fig. 9. 35 *a*) ne sont pas abruptes : c'est le résultat de la convolution du signal émis par le transducteur d'entrée avec la réponse impulsionnelle rectangulaire du transducteur récepteur (de durée 0,17 µs). L'impulsion comprimée (fig. 9. 35 *b*) a une largeur

… est – 25 dB. Le premier
… petit que les suivants, conformément à la théorie (exercice 9. 2).

Fig. 9. 34. — *Photographie d'une ligne dispersive à courbe de retard en S :* $f_0 = 22$ MHz, $B = 5$ MHz, $\Theta = 5{,}6$ µs.



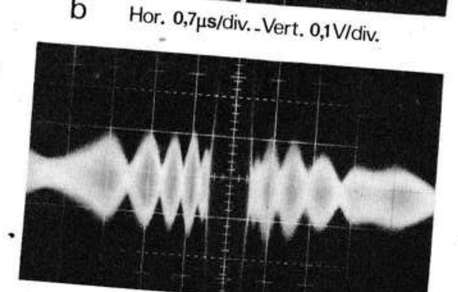
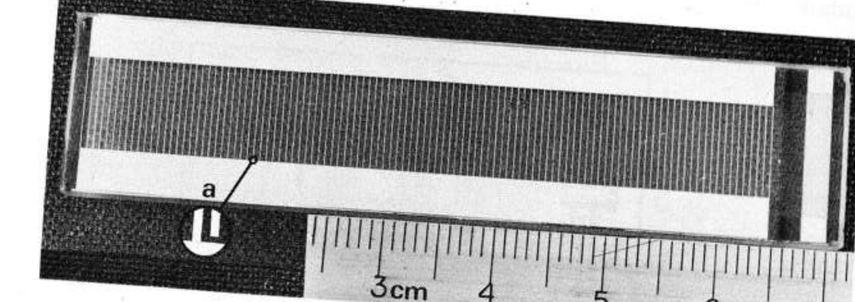


Fig. 9. 35. — *Réponse de la ligne de la figure 9. 34.*
a) *à une impulsion brève;*
b) et c) *au signal.*

Pour des impulsions longues ($\Theta > 15$ µs) il est possible, comme il a été indiqué au paragraphe 7. 2. 4, de réduire le nombre de doigts des peignes en *échantillonnant* le transducteur. La ligne a alors l'aspect de la figure 9. 36

pour une durée $\Theta = 20$ µs et un facteur d'échantillonnage $Q = 15$. Les sources, constituées de deux dents de largeur $\lambda/4 = 20$ µm à la fréquence centrale $f_0 = 40$ MHz, sont distribuées suivant une loi de variation temporelle de la fréquence en forme de S. Les échantillons sont distants de $15\ \lambda/2$. Le transducteur récepteur comporte un grand nombre de doigts ($N = 40$) car l'excursion relative de fréquence n'est que de 1/20 ($B = 2$ MHz). Le signal est comprimé dans un rapport de 30 avec des lobes secondaires à − 24 dB (fig. 9. 36 *b*).



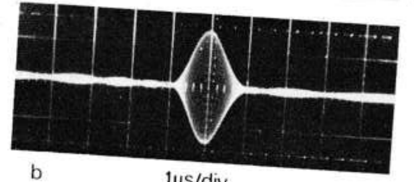


Fig. 9. 36. — *Ligne échantillonnée à courbe de retard en S :* $Q = 15$, $f_0 = 40$ MHz, $B = 2$ MHz, $\Theta = 20$µs.
a) détail d'une source;
b) impulsion comprimée.

Remarque : *Lignes à réseaux réfléchissants.* — Les ondes élastiques, comme toutes les ondes, se réfléchissent sur des discontinuités. Il a été remarqué [71] qu'une suite de discontinuités, réparties suivant une loi appropriée, soit sur un ruban où se propagent des ondes de volume TH soit sur une surface où se propagent des ondes de Rayleigh, pouvait donner lieu à un effet dispersif contrôlable. Ces discontinuités sont à priori des traits en surépaisseur ou des sillons. La réflexion sur des sillons a été spécialement étudiée ces dernières années; elle a été exploitée d'une part dans des lignes à ruban métallique à fréquence basse [72], d'autre part dans des lignes à ondes de Rayleigh [73]. Le principe de fonctionnement tel qu'il a été mis en œuvre au laboratoire Lincoln (M. I. T., USA), avec des ondes de Rayleigh [74], est expliqué sur la figure 9. 37. La ligne comprend deux transducteurs à peignes, non dispersifs, et deux réseaux de sillons inclinés, à pas variable. Les ondes lancées par le transducteur émetteur sont réfléchies, à angle droit, par le premier réseau oblique dans la zone où le pas du réseau est égal à la longueur d'onde. Comme la période du réseau croît à partir de l'entrée, les ondes de haute fréquence parcourent un trajet moins grand que les ondes de basse fréquence. Le second réseau oblique, jouant un rôle identique au premier, dirige les ondes vers le transducteur de sortie.

Le coefficient de réflexion r est fonction de la profondeur h des sillons [75].

Pour des valeurs $h/\lambda < 10^{-2}$:

$$|r| \simeq \frac{1}{3}\frac{h}{\lambda}$$

et la vitesse des ondes se propageant sous le réseau n'est pratiquement pas modifiée. Ainsi, en faisant varier la profondeur des sillons (et le cas échéant leur longueur) la courbe des amplitudes peut être pondérée et les lobes secondaires de l'impulsion comprimée réduits.

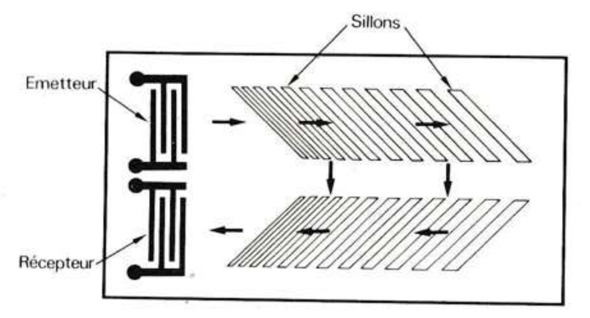


FIG. 9. 37. — *Ligne à réseau réfléchissant dispersif.*
Les ondes de Rayleigh sont réfléchies à angle droit dans la zone où le pas du réseau est égal à la longueur d'onde.

Cette technique donne naissance à une nouvelle génération de lignes dispersives à taux de compression élevé, par exemple 1 500 [74] ($f_0 = 200$ MHz, B = 50 MHz, $\Theta = 30$ µs, pertes $\simeq 40$ dB, lobes secondaires : -15 dB sans pondération, substrat : $LiNbO_3$). Le chiffre de 5 000 a été dépassé [77] ($f_0 = 1\,000$ MHz, B = 512 MHz, $\Theta = 10$ µs, pertes $\simeq 60$ dB, lobes secondaires : -20 dB avec pondération interne, substrat : $LiNbO_3$). L'usinage des nombreux sillons réflecteurs (12 000 dans le deuxième exemple) est effectué par bombardement ionique [76]. La rupture d'impédance qui produit la réflexion étant purement mécanique des substrats non piézoélectriques sont utilisables mais alors se pose le problème d'excitation des ondes de Rayleigh. Il peut, en principe, être résolu par des transducteurs soudés en bout comme dans la ligne à ruban à ondes TH de basse fréquence déjà citée [72]. Indiquons que dans ce cas des taux de compression supérieurs à 1 000 ont aussi été obtenus mais avec de grandes durées d'impulsion ($f_0 = 10$ MHz, B = 5 MHz, T = 250 µs, pertes 30 dB).

9. 3. 5. 2. — Filtres transversaux. — La modulation de fréquence n'est, comme nous l'avons déjà dit, qu'un exemple de codage. Des *codes discrets* sont utilisés en télécommunications. Le code le plus simple est le code binaire : c'est une suite d'informations 1, 0 ou 1, -1, se succédant dans le temps à intervalles réguliers. Le codage et décodage binaire est simple à réaliser avec les ondes de Rayleigh, que l'information soit portée par l'amplitude ou la phase. Le principe dans l'un et l'autre cas est illustré par les figures 9. 38 et 9. 39. L'application d'une impulsion brève sur le transducteur d'entrée du codeur engendre le signal codé. Après propagation le signal est reçu par le décodeur dont le transducteur de sortie, filtre transversal adapté au signal, délivre la fonction d'autocorrélation. A titre d'exemple la figure 9. 40 *a* montre l'autocorrélation d'un signal binaire codé par inversion de phase suivant la séquence $(+++-++--+-+----)$. La fréquence porteuse est 60 MHz. Si au lieu du signal $s(t)$ on applique son inverse dans le temps $s(-t)$, identique à la réponse impulsionnelle du décodeur, il n'y a plus adaptation et le signal de sortie a l'aspect de la figure 9. 40 *b*.

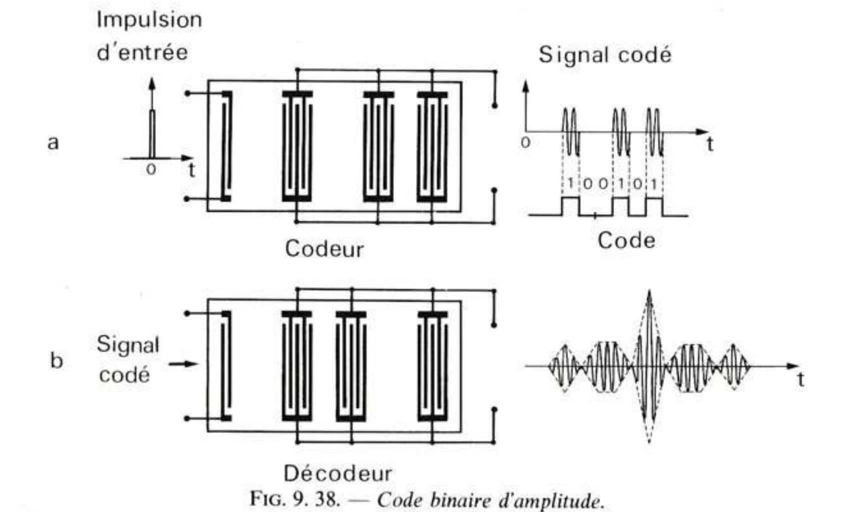


FIG. 9. 38. — *Code binaire d'amplitude.*
a) Génération du signal par application d'une impulsion brève à l'entrée de la ligne à ondes de Rayleigh. *b*) Réception par le filtre adapté au signal (décodeur).

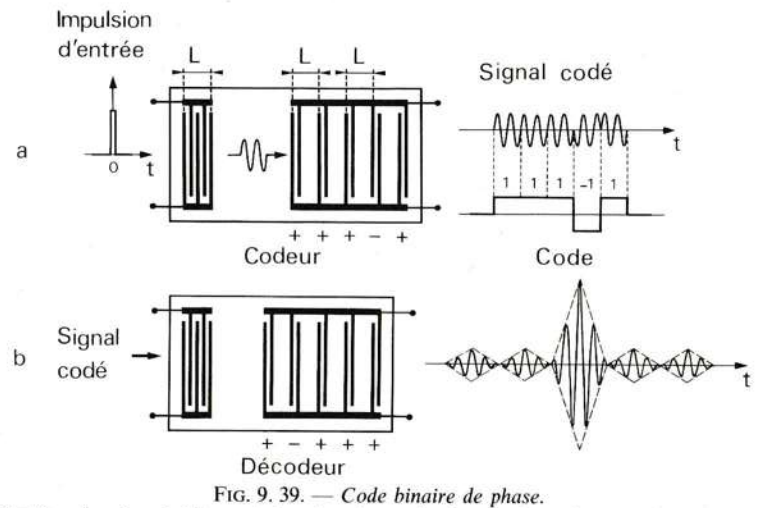


FIG. 9. 39. — *Code binaire de phase.*
a) Génération du signal. L'opposition de phase résulte du branchement inverse des doigts des récepteurs des ondes de Rayleigh. *b*) Réception par le filtre adapté au signal (décodeur).

Parmi les codes binaires de phase, les séquences de Barker à N bits fournissent un signal d'autocorrélation présentant un pic de hauteur N et des lobes de hauteur 1 au plus. Les valeurs du signal d'autocorrélation, à chaque multiple de la durée du bit, sont donc N et 0, $\pm$ 1. Ces conditions limitent la longueur du code à 13 bits lorsque N est impair; il n'a pas été trouvé de codes de ce type de longueur supérieure à 4 lorsque N est pair. Le code de la figure 9. 39 est une séquence de Barker à 5 bits.

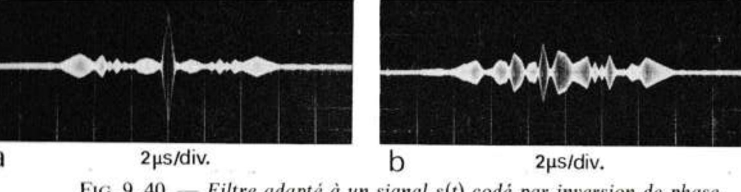


FIG. 9. 40. — *Filtre adapté à un signal s(t) codé par inversion de phase suivant la séquence (+ + + − + + − − + − + − − − −) de fréquence porteuse 60 MHz.* a) Autocorrélation de $s(t)$. *b)* Réponse au signal inversé dans le temps $s(t)$, non adapté au filtre.

La disposition en ligne des éléments du transducteur peut être avantageusement remplacée par une disposition en biais, en particulier lorsque les phénomènes parasites dus aux réflexions sur le substrat fortement piézoélectrique sont à éviter. Les deux photographies de la figure 9. 41 montrent, avec un code de Barker à 13 bits, la différence entre les réponses pour un substrat de niobate de lithium.

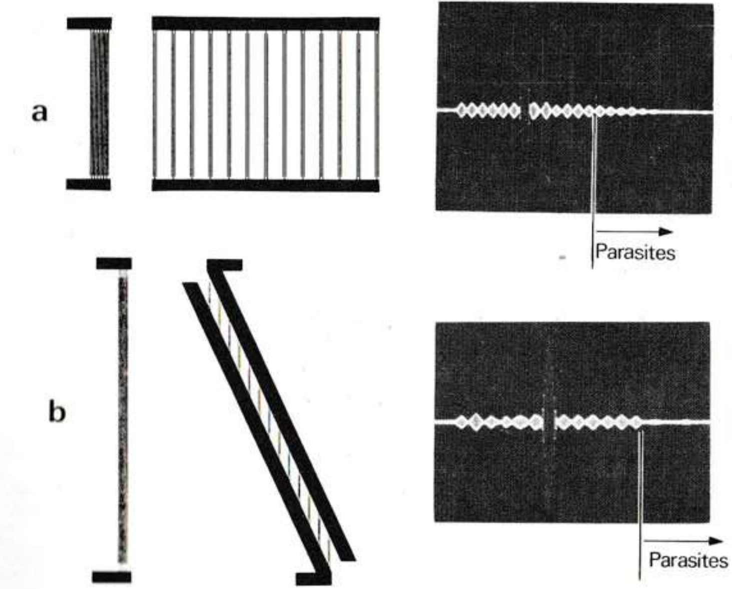


FIG. 9. 41. — *Disposition en ligne* (a), *en biais* (b) *du transducteur somme sur substrat de niobate de lithium. Comparaison des signaux d'autocorrélation pour un code de Barker à 13 bits engendré par ondes de Rayleigh.* (Figure aimablement communiquée par R. H. TANCREL, Raytheon-Waltham, Mass. USA.)

Les éléments du transducteur de sortie du codeur peuvent être répartis de manière à former un *code polyphasé* : la phase varie de quantités $2\pi/n$ et non plus simplement de π. D'autre part, il est possible en modifiant la longueur active des éléments de réduire les lobes secondaires. Le même substrat peut porter des lignes indépendantes avec codes complémentaires (exemple code de Golay) : la somme des signaux d'autocorrélation issus de chaque ligne est un signal sans lobe secondaire. Le lecteur peut s'en rendre compte en faisant l'exercice 9. 3.

9. 3. 6. — *Filtres adaptés à interaction élasto-optique*

La reconnaissance des formes en optique fait aussi appel au principe du filtre adapté. La référence est disposée sur le trajet d'un faisceau lumineux focalisé par une lentille; les différents objets examinés défilent, comme les images d'un film, devant la référence (fig. 9. 42). Le passage de l'objet recherché fournit un maximum de lumière au foyer de la lentille. La nécessité de transcrire les informations sur un support diffère dans le temps le résultat de l'analyse. Grâce à la diffraction de la lumière

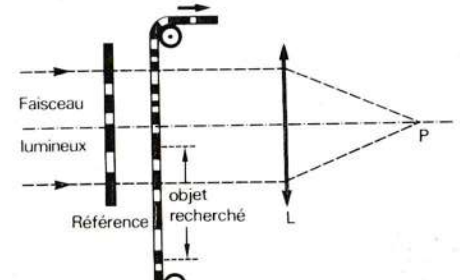


FIG. 9. 42. — *Reconnaissance d'une forme.* Le passage de l'objet recherché devant la référence donne lieu à un maximum de lumière au foyer P de la lentille L.

par les ondes élastiques, il est possible de traiter en temps réel des signaux électriques suivant le schéma 9. 43. Soit un signal codé en amplitude avec une porteuse de fréquence fixe. Il est appliqué au transducteur qui le transforme immédiatement en un train d'ondes longitudinales par exemple. La lumière diffractée à l'angle de Bragg correspondant à la fréquence porteuse est concentrée en un point du plan focal. Le faisceau lumineux incident est modulé par un masque d'amplitude, réplique spatiale du code. L'intensité lumineuse détectée, proportionnelle au carré de la fonction d'autocorrélation du signal, passe par un maximum lorsque tous les éléments du train d'ondes coïncident avec les fenêtres de la référence. Dans le cas d'un signal codé en phase, le masque d'amplitude est remplacé par une lame de phase.

Citons les conditions principales d'une expérience effectuée par R. Torguet et J. M. Bauza avec un signal modulé en phase se propageant sous

ctant un faisceau laser (6 328 Å) :

— code : binaire, 255 bits de durée 20 ns ;

— fréquence porteuse : 175 MHz ;

— transducteur : plaquette de $LiNbO_3$ soudée à l'indium, bande nte 70 MHz ;

— ligne : $PbMoO_4$ propagation [001] (V_L = 3 630 m/s), longueur 19,125 mm ;

— quantité de lumière déviée : 60 % pour une puissance électrique W.

— lame de phase : silice, un déphasage de π est créé par une ellation de 0,69 µm.

Le résultat est représenté sur la figure 9. 44. La durée du pic de ation de 20 ns est en accord avec le taux de compression ique de 255.

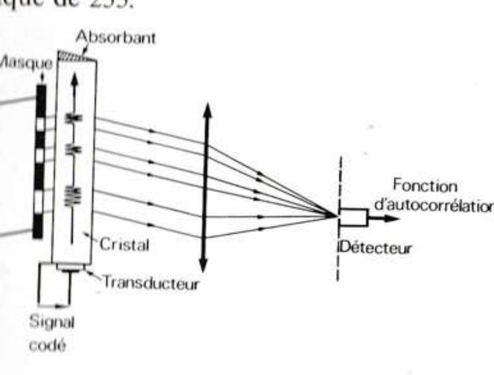
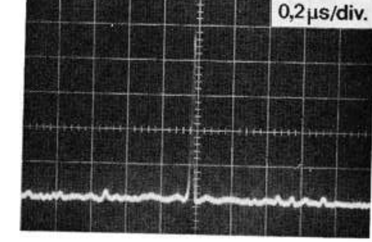


FIG. 9. 43. — *Filtre adapté à interaction élasto-optique.* La lumière diffractée par le signal converti en onde élastique, concentrée en un point du plan focal de la lentille, passe par un maximum quand les éléments du train d'onde sont devant les fenêtres du masque (réplique du code).

est à mentionner que le code a été engendré à partir d'une ion brève appliquée à l'entrée d'une ligne semblable à la précédente t le masque modulé en amplitude ayant servi à graver (par bombar- ionique) la lame de phase. La propagation de l'impulsion élastique le masque produit le code à la sortie du photomultiplicateur qui la lumière diffractée. Le signal est obtenu en injectant code et e dans un modulateur en anneau qui crée les inversions de phase.



. — *Filtre adapté à interaction élasto-optique.* Impulsion comprimée.

dispositif se simplifie quand le signal est modulé linéairement en ce car il n'y a plus besoin de masque portant la réplique du code.

Nous avons montré au paragraphe 8. 4. 2. 1 que l'angle de déviation θ du faisceau lumineux était proportionnel à la fréquence des ondes élastiques. Cet angle

$$\theta \simeq \frac{\Lambda_0}{\lambda} = \frac{\Lambda_0}{V} f$$

varie donc le long de la ligne suivant la loi

$$\theta \simeq \frac{\Lambda_0}{V} f_0 + \frac{\Lambda_0}{V} \frac{B}{\Theta} \left(t - \frac{x_1}{V} \right)$$

qui tient compte de la modulation de fréquence (formule 9. 6) et de la propagation du signal acoustique dans la direction x_1. Le faisceau diffracté converge dans la direction de déviation moyenne $\theta_0 = \Lambda_0 f_0 / V$ à une distance D telle que (fig. 9. 45) :

$$\frac{1}{D} = -\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{\Lambda_0 B}{V^2 \Theta} \qquad (9.\ 29)$$

Avec B = 50 MHz, Θ = 5 µs, Λ_0 = 0,632 8 µm, V = 3 630 m/s ($PbMoO_4$) : D = 2,1 m. Cette distance peut être réduite à l'aide d'une optique simple.

FIG. 9. 45. — *Compression d'impulsion par diffraction de Bragg.*
L'angle de déviation θ variant avec la fréquence, le faisceau diffracté converge à une distance $D = \Theta V^2 / B\Lambda_0$.

Signal modulé linéairement en fréquence

Si un détecteur est disposé au point de convergence, la variation dans le temps de l'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de la fonction d'autocorrélation du signal modulé linéairement en fréquence. Des taux de compression de quelques centaines ont ainsi été obtenus [41, 42].

9. 4. — FONCTION FILTRE DE BANDE

Il n'est pas dans notre intention de décrire ici en détails les filtres à ondes élastiques de volume. Les caractéristiques du résonateur piézoélectrique, élément essentiel de ces filtres, ont été rappelées au paragraphe 7. 1. 2. Les filtres classiques à quartz, fabriqués à ce jour à plusieurs centaines de millions d'exemplaires, sont utilisés dans un domaine

de fréquences s'étendant de 50 kHz à 150 MHz (au-delà de 30 MHz les lames de quartz vibrent à une fréquence harmonique car leur épaisseur ne peut guère être inférieure à 50 μm). Ils ont été l'objet de nombreuses publications depuis les travaux de P. Langevin et la construction par Cady en 1918 du premier oscillateur stabilisé par un quartz [43]. Leur emploi en grand nombre s'explique par les qualités du quartz, cristal dur, peu sensible à l'environnement; le résonateur à quartz allie à un coefficient de surtension élevé ($> 10^4$) une excellente stabilité de fréquence en température (dérive inférieure à 10^{-6} °C^{-1}) et en temps. La bande passante de ces filtres est limitée par l'écart entre les fréquences de résonance et d'antirésonance c'est-à-dire par le coefficient de couplage électromécanique : $\Delta f/f \lesssim K^2/2$. Les filtres à quartz ($K^2 \simeq 10^{-2}$) sont donc très sélectifs. Les céramiques piézoélectriques ont un coefficient K^2 plus grand ($K^2 \simeq 0{,}1 \;\Rightarrow\; \Delta f/f \lesssim 5$ %) mais leur médiocre stabilité en température et leurs pertes restreignent leurs applications à des fréquences basses ($f < 30$ MHz) dans le domaine du grand public. Des matériaux nouveaux, comme le tantalate de lithium ($LiTaO_3$) sont actuellement examinés.

Aux filtres à quartz composés d'éléments discrets s'ajoutent maintenant des *filtres monolithiques*. Dans cette structure intégrée, les résonateurs disposés sur la même plaquette sont couplés par la vibration mécanique, évanescente en dehors des zones métallisées [44].

Le filtre à *ondes de volume* est un dispositif à ondes *stationnaires*. La fonction de transfert peut difficilement s'écarter d'un créneau centré sur la fréquence de résonance liée à l'épaisseur de la plaquette, la bande passante est limitée par le matériau, les pertes d'insertion sont très faibles avec des monocristaux à fort coefficient de surtension mécanique (< quelques dB).

Dans les filtres à *ondes de Rayleigh* décrits par la suite, les ondes élastiques sont *progressives*. La fonction de transfert est définie par le dessin des transducteurs dont la largeur des doigts est imposée par la fréquence qui peut atteindre plusieurs centaines de MHz. En raison des difficultés d'adaptation les pertes sont d'autant plus importantes (> 20 dB) que le coefficient de couplage électromécanique du matériau est petit et la bande passante relative large. Aux pertes de transduction s'ajoutent, à fréquence élevée, des pertes de propagation. C'est, à l'heure actuelle, un obstacle au développement industriel de ces filtres de bande.

La fonction de transfert d'une ligne à ondes de Rayleigh dont un des transducteurs est formé de doigts de longueur constante, supérieure à la largeur du faisceau élastique émis par l'autre transducteur, est égale au produit des fonctions de transfert des deux transducteurs (*). Si le récepteur a peu de doigts, donc une bande passante large, fonction de transfert et réponse impulsionnelle sont déterminées par le dessin de l'émetteur. Une

(*) Ceci n'est plus vrai quand la longueur des doigts de chaque transducteur varie. L'analyse est alors plus compliquée et la synthèse d'un filtre très difficile [45].

variation en $\left|\frac{\sin}{x}\right.$ … ne conduit à une

fonction de trans… onse en fréquence

en forme de crén… :

correspond la rép… (9. 30)

… $f_>$

… 18) : (9. 31)

Conformémen…

discrètes sont à dis… 7. 2. 4, les sources

soit en des points é…

$2f_0$

et leur amplitude es…

Le filtre de la f…

les électrodes sont … rat de quartz ($\underline{Y}$, $\underline{X}$),

de la fonction (sin … de phase aux zéros

d'onde deux dents … d'une demi-longueur

réponse impulsionnelle … L'enveloppe de la

en fréquence est co… nsducteur. La réponse

Ces deux courbes di… la courbe théorique.

sions finies et la for… ducteur a des dimen-

limité de lobes. La fré… que par un nombre

le taux de réjection 21… ande passante 2 MHz,

sont de l'ordre de 30 … du grand transducteur,

Une fonction de t…

active de doigts variar… ransducteur à longueur

type ont été associés … 8 –. Deux filtres de ce

… ur de fréquence [47].

de fréquences s'étendant de 50 kHz à 150 MHz (au-delà de 30 MHz les lames de quartz vibrent à une fréquence harmonique car leur épaisseur ne peut guère être inférieure à 50 μm). Ils ont été l'objet de nombreuses publications depuis les travaux de P. Langevin et la construction par Cady en 1918 du premier oscillateur stabilisé par un quartz [43]. Leur emploi en grand nombre s'explique par les qualités du quartz, cristal dur, peu sensible à l'environnement; le résonateur à quartz allie à un coefficient de surtension élevé ($> 10^4$) une excellente stabilité de fréquence en température (dérive inférieure à 10^{-6} °C^{-1}) et en temps. La bande passante de ces filtres est limitée par l'écart entre les fréquences de résonance et d'antirésonance c'est-à-dire par le coefficient de couplage électromécanique : $\Delta f/f \lesssim K^2/2$. Les filtres à quartz ($K^2 \simeq 10^{-2}$) sont donc très sélectifs. Les céramiques piézoélectriques ont un coefficient K^2 plus grand ($K^2 \simeq 0{,}1 \Rightarrow \Delta f/f \lesssim 5$ %) mais leur médiocre stabilité en température et leurs pertes restreignent leurs applications à des fréquences basses ($f < 30$ MHz) dans le domaine du grand public. Des matériaux nouveaux, comme le tantalate de lithium ($LiTaO_3$) sont actuellement examinés.

Aux filtres à quartz composés d'éléments discrets s'ajoutent maintenant des *filtres monolithiques.* Dans cette structure intégrée, les résonateurs disposés sur la même plaquette sont couplés par la vibration mécanique, évanescente en dehors des zones métallisées [44].

Le filtre à *ondes de volume* est un dispositif à ondes *stationnaires.* La fonction de transfert peut difficilement s'écarter d'un créneau centré sur la fréquence de résonance liée à l'épaisseur de la plaquette, la bande passante est limitée par le matériau, les pertes d'insertion sont très faibles avec des monocristaux à fort coefficient de surtension mécanique (< quelques dB).

Dans les filtres à *ondes de Rayleigh* décrits par la suite, les ondes élastiques sont *progressives.* La fonction de transfert est définie par le dessin des transducteurs dont la largeur des doigts est imposée par la fréquence qui peut atteindre plusieurs centaines de MHz. En raison des difficultés d'adaptation les pertes sont d'autant plus importantes (> 20 dB) que le coefficient de couplage électromécanique du matériau est petit et la bande passante relative large. Aux pertes de transduction s'ajoutent, à fréquence élevée, des pertes de propagation. C'est, à l'heure actuelle, un obstacle au développement industriel de ces filtres de bande.

La fonction de transfert d'une ligne à ondes de Rayleigh dont un des transducteurs est formé de doigts de longueur constante, supérieure à la largeur du faisceau élastique émis par l'autre transducteur, est égale au produit des fonctions de transfert des deux transducteurs (*). Si le récepteur a peu de doigts, donc une bande passante large, fonction de transfert et réponse impulsionnelle sont déterminées par le dessin de l'émetteur. Une

(*) Ceci n'est plus vrai quand la longueur des doigts de chaque transducteur varie. L'analyse est alors plus compliquée et la synthèse d'un filtre très difficile [45].

variation en $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ de la longueur des doigts d'un peigne conduit à une fonction de transfert *rectangulaire.* En effet à une réponse en fréquence en forme de créneau de largeur B centré à la fréquence f_0 :

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f-f_0}{B}\right) \qquad \text{pour} \qquad f > 0 \qquad (9.\ 30)$$

correspond la réponse impulsionnelle (voir tabl. 1. 18) :

$$h(t) = 2B\,\frac{\sin \pi B t}{\pi B t}\cos 2\pi f_0 t. \qquad (9.\ 31)$$

Conformément à la méthode exposée au paragraphe 7. 2. 4, les sources discrètes sont à distribuer aux instants t_n tels que

$$\varphi(t_n) = 2\pi f_0 t_n = n\pi \quad \Rightarrow \quad t_n = \frac{n}{2f_0}$$

soit en des points équidistants d'abscisses

$$x_n = n\,\frac{V_R}{2f_0}$$

et leur amplitude est proportionnelle à

$$A_n = \frac{\sin\left(n\,\frac{\pi B}{2f_0}\right)}{n\,\frac{\pi}{2}\,\frac{B}{f_0}}.$$

Le filtre de la figure 9. 46 *a* a été réalisé sur substrat de quartz (Y, X), les électrodes sont en aluminium [46]. Les inversions de phase aux zéros de la fonction $(\sin x)/x$ sont effectuées en séparant d'une demi-longueur d'onde deux dents adjacentes d'une même électrode. L'enveloppe de la réponse impulsionnelle reproduit bien le dessin du transducteur. La réponse en fréquence est comparée sur la figure 9. 46 *c* à la courbe théorique. Ces deux courbes diffèrent d'un rectangle car le transducteur a des dimensions finies et la fonction $(\sin x)/x$ n'est déterminée que par un nombre limité de lobes. La fréquence centrale est 25 MHz, la bande passante 2 MHz, le taux de réjection 21 dB. Les pertes, avec adaptation du grand transducteur, sont de l'ordre de 30 dB.

Une fonction de transfert *triangulaire* requiert un transducteur à longueur active de doigts variant en $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ – voir tableau 1. 18 –. Deux filtres de ce type ont été associés pour former un discriminateur de fréquence [47].

La réponse de chaque filtre est nulle à la fréquence centrale de l'autre (28 MHz, 32 MHz). Après soustraction des tensions continues fournies par des diodes détectrices branchées à la sortie de chaque filtre, on obtient une caractéristique linéaire de 0,7 MHz autour de 30 MHz (fig. 9. 47), mais les pertes sont élevées (45 dB) sur un substrat de quartz.

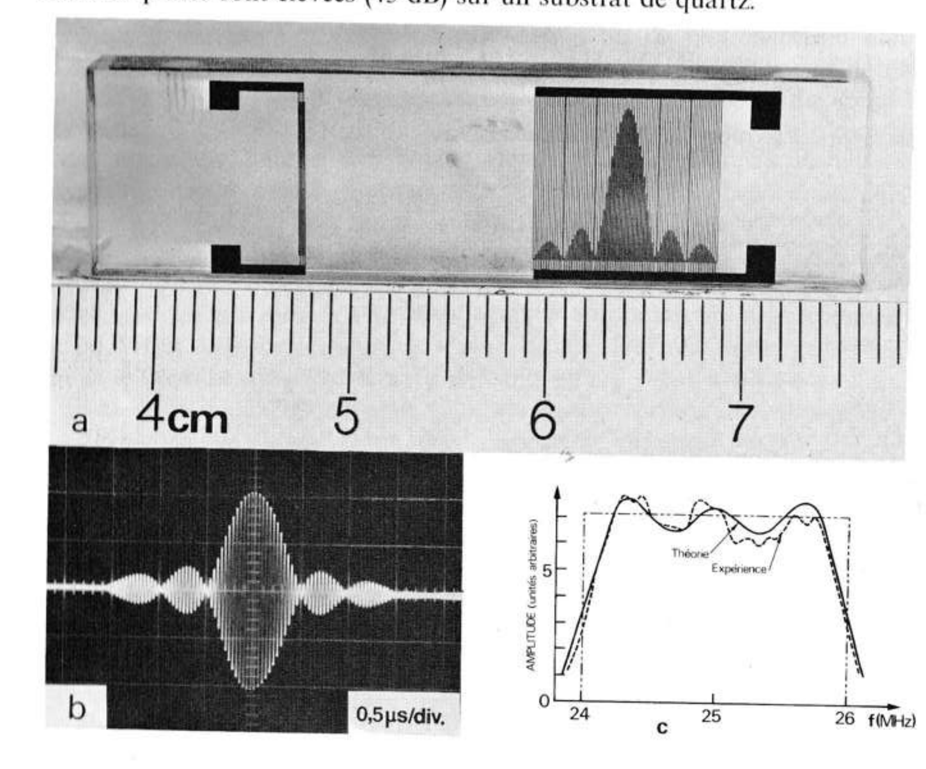


Fig. 9. 46. — *Filtre de bande.*

a) Peigne en $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$.

b) Réponse impulsionnelle.

c) Réponses en fréquence théorique et expérimentale.

Une bande passante relative *étroite* exige un ou deux transducteurs à grand nombre de doigts. Par exemple une bande passante de 100 kHz autour de 100 MHz nécessite une ligne à deux transducteurs identiques de 1 270 doigts chacun (formule 7. 38). Un moyen de diminuer ce nombre excessif consiste à échantillonner les deux transducteurs [48], la distance

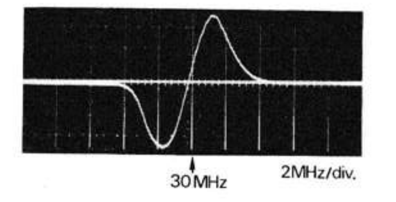


Fig. 9. 47. — *Réponse d'un discriminateur de fréquences à ondes de Rayleigh.*

entre les échantillons étant un multiple n (différent pour chaque transducteur : n_1 et n_2) de la période interdigitale $2d = V_R/f_0$. La réponse en fréquence de chaque transducteur est une suite de pics aux fréquences $f_0 + pf_0/n$. L'intervalle de fréquence entre deux pics voisins est l'inverse du temps de propagation n/f_0 entre deux échantillons (exercice 9. 4). La fonction de transfert du filtre présente des maxima aux fréquences de coïncidence $f_0 + \delta f$ des pics des deux transducteurs :

$$\delta f = \frac{p_1}{n_1} f_0 = \frac{p_2}{n_2} f_0$$

soit pour la fréquence centrale f_0 et les fréquences distantes de celle-ci d'un multiple de f_0/q où q est le plus grand commun diviseur de n_1 et n_2. La figure 9. 48 montre un filtre sur quartz ($n_1 = 55$, $n_2 = 45$) de fréquence centrale 102,5 MHz et de bande passante 36 kHz. Les pertes sont de l'ordre de 20 dB avec circuits d'adaptation.

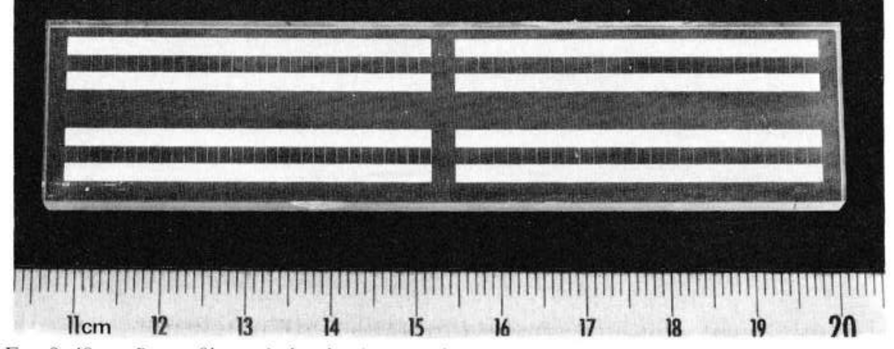


Fig. 9. 48. — *Deux filtres à bande étroite identiques sur un même monocristal de quartz* ($f_0 = 102{,}5$ MHz, $\Delta f = 32$ kHz). La distance entre les échantillons, constitués de deux dents, du transducteur d'entrée (de sortie) est 55 λ_0 (45 λ_0).

Pour obtenir une fonction de transfert *s'annulant* à des fréquences choisies, il est possible d'associer en parallèle deux lignes identiques aux retards près qui diffèrent d'une quantité τ. A la réponse impulsionnelle de l'ensemble $h(t) + h(t - \tau)$ correspond, d'après le théorème de translation (paragr. 1. 3. 2), la réponse en fréquence :

$$\mathscr{H}(f) = \mathrm{H}(f) + \mathrm{H}(f)\, e^{-i2\pi f\tau} = 2\mathrm{H}(f)\, e^{-i\pi f\tau} \cos \pi f\tau$$

nulle pour les fréquences

$$f_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\tau}.$$

La figure 9. 49 est un exemple de réponse d'un filtre de fréquence centrale 100 MHz, l'écart entre les zéros est 3,3 MHz.

En conclusion, une fonction de transfert quelconque peut être synthé- par un dessin approprié de transducteur qui se déduit de la réponse ılsionnelle désirée par la méthode des sources discrètes. Ce principe ıctuellement appliqué au cas du filtre de moyenne fréquence de télé- n (25 à 40 MHz) [49, 50]. Les principaux problèmes sont le niveau ›ertes, la nature du substrat et donc le prix de revient.

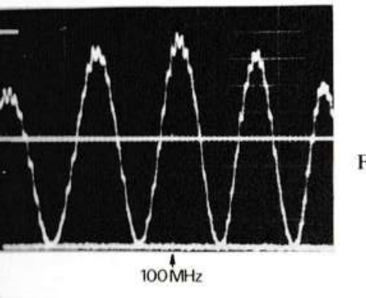


FIG. 9. 49. — *Filtre de réjection.* Réponse en fréquence d'un filtre constitué de deux lignes à retards différents. Écart entre zéros adjacents : 3,3 MHz.

REMARQUES : 1° *Filtres à réseaux réfléchissants.* — La technique des ıux réfléchissants, décrite dans la remarque du paragraphe 9. 3. 5. 1, é appliquée [78] à la réalisation de filtres de bande à ondes de Rayleigh : fréquence centrale 200 MHz, bande passante relative 3 %, pertes dues éflecteur 10 dB). C'est le réseau réflecteur caractérisé par son pas et limensions de ses sillons qui assure la fonction filtre. Cette technique it particulièrement adaptée aux filtres à bande étroite (< 0,5 MHz à MHz).

2° *Filtres à transducteurs à doigts de longueur constante.* — Compte des égalités

$$s(t) = e(t) \cos \omega_0 t = \cos \psi(t) \cos \omega_0 t$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \cos [\omega_0 t + \psi(t)] + \frac{1}{2} \cos [\omega_0 t - \psi(t)] \qquad (9.\ 32)$$

$$e(t) = \cos \psi(t) \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = \text{Arc} \cos e(t)$$

ignal $s(t)$ modulé en amplitude peut être considéré comme la somme leux signaux, d'amplitude constante, modulés en phase. Si $e(t)$ est une tion paire $\psi(-t) = \psi(t)$. En désignant par $g(t)$ le premier terme du nd membre de 9. 32, $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = g(t) + g(-t).$$

ée de composer $s(t)$ à partir de la fonction $g(t)$ et de son inverse dans mps a été appliquée aux filtres à ondes de Rayleigh [79] en particulier r obtenir la réponse impulsionnelle de la formule 9. 31. La ligne prend un transducteur central T_0 traduisant la fonction g et deux sducteurs latéraux T_1 et T_2 à large bande. Une impulsion brève appli- à T_0 engendre deux ondes se propageant en sens opposés, l'une repré-sentant $g(t)$ excite T_1, l'autre représentant $g(-t)$ excite T_2. L'addition des signaux fournis par T_1 et T_2 donne $s(t)$. Puisque les longueurs des doigts sont constantes, ce type de filtre a pour avantage de ne pas créer de distorsion du front d'onde (remarque du paragraphe 7. 2. 4).

9. 5. — FONCTION MÉMOIRE

Étant donné la vitesse de propagation des ondes élastiques ($1 < V < 13$ mm/µs) et la longueur des milieux de propagation solides disponibles avec des pertes acceptables, il est possible d'emmagasiner dans une ligne un grand nombre d'informations. Comme celles-ci ne peuvent être figées, du moins de manière simple, leur circulation dans la ligne est entretenue par une boucle qui assure, grâce à un amplificateur, la compensation des pertes. Les caractéristiques de ces mémoires circulantes sont conditionnées par celles des lignes à retard qui en sont la partie essentielle : la fréquence de répétition f_R est une fraction de la fréquence porteuse, le temps d'accès τ_A est d'autant plus grand que la ligne est longue donc la capacité élevée... Une ligne à ondes de volume fonctionnant avec une fréquence de répétition $f_R = 100$ MHz par exemple peut garder en mémoire $f_R \tau_A = 1\,000$ bits, le temps d'accès étant $\tau_A = 10$ µs.

Les lignes à ondes de surface offrent deux avantages : l'information peut être codée et extraite par des prises intermédiaires (réduction du temps d'accès).

Une *mémoire circulante* constitue un dispositif de compression dans le temps (DELTIC (*) [51]) d'un signal préalablement échantillonné.

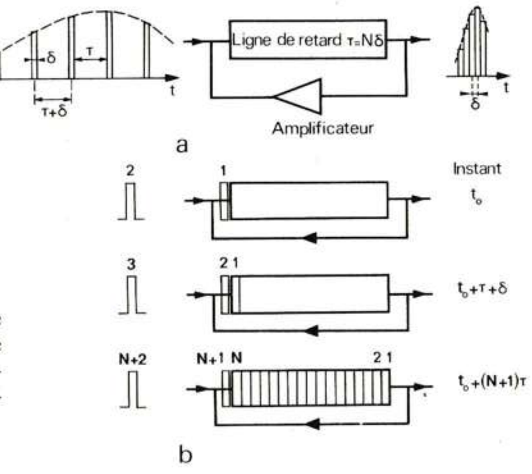


FIG. 9. 50. — *DELTIC.*
a) Les échantillons d'un signal de durée très grande qui exigerait un filtre adapté impossible à réaliser sont regroupés à l'aide d'une mémoire circulante.
b) Regroupement des échantillons.

(*) DELTIC : DElay Line for TIme Compression.

A la sortie de la ligne de retard τ les échantillons, de durée $\delta = \tau/N$ et équidistants de $\tau + \delta$, sont groupés par paquets de N, comme l'indique la figure 9. 50 *a*. Le principe de fonctionnement est le suivant : quand l'échantillon 1 retardé par une première traversée de la ligne, y pénètre à nouveau, l'échantillon 2 qui l'a rattrapé, se met à sa suite. Ces deux échantillons après un parcours dans la ligne sont rejoints par l'échantillon 3 et ainsi de suite (fig. 9. 50 *b*). Lorsque la ligne est remplie, les N échantillons qu'elle contient ($\tau = N\delta$) sont évacués en un seul paquet. Ainsi les échantillons séparés avant leur entrée dans la ligne par le temps $\tau + \delta = (N+1)\delta$ ne sont plus distants à la sortie que de δ et la fréquence instantanée du signal est multipliée par $N+1$. Un signal très long ($\Theta \simeq 1$ s, $B \simeq 100$ Hz), de sonar par exemple, exigeant un filtre adapté impossible à réaliser, peut être traité de cette manière. Le signal, découpé en N échantillons ($N \simeq 1\,000$) :

$$\Theta = N(N+1)\delta = (N+1)\tau$$

est comprimé en une impulsion de durée $\tau(\simeq 1$ ms) et d'excursion en fréquence $(N+1)B$ ($\simeq 100$ kHz) susceptible d'être traité (après changement de fréquence) par une ligne dispersive à ruban (paragr. 9. 3. 3).

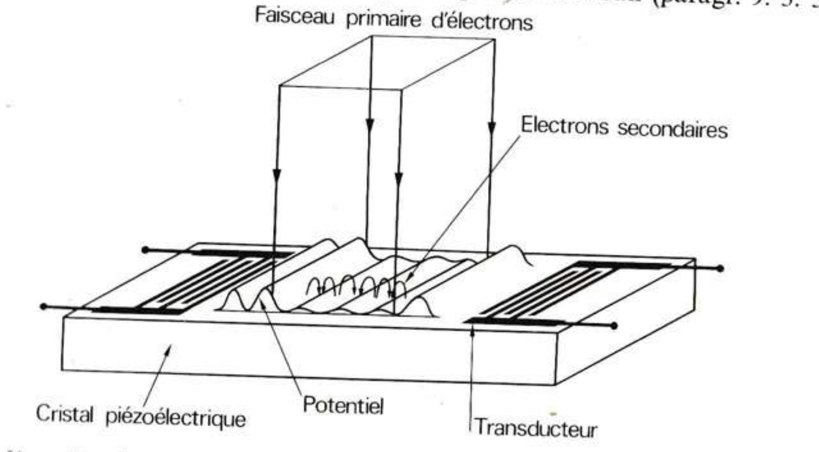
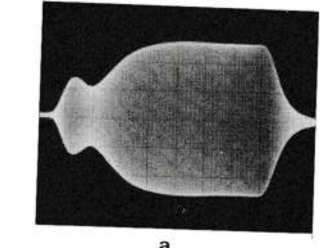
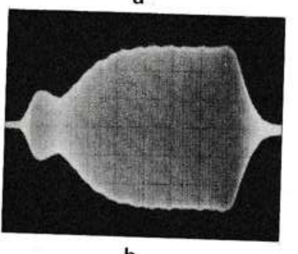


FIG. 9. 51. — *Fonction mémoire (et inversion dans le temps).* Les électrons secondaires se répartissent suivant le potentiel électrique associé à l'onde de Rayleigh et forment une image électrostatique du signal. Ils restent figés sur le substrat isolant en maintenant des contraintes. Un nouveau flash d'électrons libère ces contraintes et crée deux ondes se propageant en sens opposés. (Fig. 1 de la référence 52.)

Le principe d'une *mémoire statique*, étudiée en laboratoire [52], mérite d'être signalé. Il consiste à « imprimer » sur une surface une image de l'information, à l'aide d'un faisceau d'électrons. La figure 9. 51 explique le fonctionnement. Le signal qui a été traduit en ondes élastiques de Rayleigh se propage, accompagné d'une onde de champ électrique puisque le substrat est piézoélectrique. La surface est alors soumise à un bombardement d'élec-

trons primaires de quelques centaines d'électron-volts durant un temps court par rapport à la période de la porteuse. Ces électrons primaires extraient du matériau isolant des électrons secondaires, qui, en raison de leur énergie faible — quelques eV — sont sensibles au potentiel de l'ordre du volt créé par l'onde élastique. Ceux qui retombent sur la surface viennent peupler préférentiellement les régions à potentiel positif qui les attirent. Le substrat étant isolant, ils y restent figés et l'onde élastique continue à progresser. La répartition superficielle de ces charges maintient le cristal en état de contraintes et forme une image électrostatique du signal; elle peut être conservée pendant des temps excessivement grands (plusieurs minutes) si la surface est très isolante et ne reçoit pas de charges parasites. La lecture de l'information se fait en illuminant à nouveau le substrat par un flash d'électrons qui a pour effet d'annuler, ou de réduire, le potentiel électrique et donc les contraintes maintenues par les charges emmagasinées. Le relâchement brusque de ces contraintes engendre deux ondes qui partent dans des directions opposées : celle qui se propage vers le transducteur de sortie est la réplique du signal, l'autre qui se dirige vers le transducteur d'entrée en est une image inversée dans le temps.


a


b

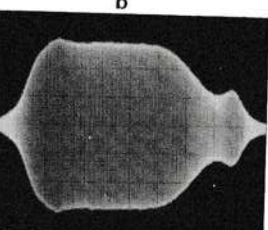

c

FIG. 9. 52. — *Signaux du dispositif de la figure 9. 51 reçus, sur le transducteur de sortie* a) *sans mise en mémoire,* b) *après une mise en mémoire de 160 ms,* c) *sur le transducteur d'entrée après mise en mémoire de 160 ms.* (Figure 2 de la référence 52, aimablement communiquée par A. G. BERT.)

Des expériences ont été effectuées sur quartz à 30 MHz. Un exemple de résultats est reproduit sur la figure 9. 52 qui montre (*a*) le signal reçu par le transducteur de sortie après traversée de la ligne sans mise en

mémoire, (*b*) le signal reçu par le même transducteur après une mise en mémoire de 160 ms, (*c*) le signal inversé dans le temps reçu par le transducteur d'entrée après le même temps de stockage. Les pertes de mise en mémoire, mesurées par le rapport des puissances des signaux 9. 52*a* et 9. 52*b*, sont de l'ordre de 60 dB. Comme la conversion énergie électrique-énergie mécanique intervient deux fois, elles sont proportionnelles à K^4. La densité de courant électronique nécessaire à l'inscription et à la lecture est de 100 mA/cm^2.

9. 6. — FONCTION CONVOLUTION

Il a été implicitement admis jusqu'ici que l'amplitude des déformations *i. e.* la variation relative des distances dans le solide restait très inférieure au seuil ($S < 10^{-4}$) pour lequel cessent d'être valables l'expression simplifiée des déformations (paragr. 4. 1) et la loi de Hooke (paragr. 4. 3). Lorsqu'il n'y a plus proportionnalité entre contraintes et déformations, la théorie linéaire, établie dans les chapitres précédents, n'est plus exacte. L'analyse des effets non linéaires exige l'introduction de constantes élastiques supplémentaires. Une première approche consiste à ajouter, dans les expressions des lois utilisées en théorie linéaire, un terme d'ordre immédiatement supérieur à celui des termes qui y figurent. A la forme quadratique de l'énergie potentielle élastique (formule 4. 34) s'adjoignent des termes d'ordre trois tels que $c_{ijklpq}S_{ij}S_{kl}S_{pq}$. La relation entre contraintes et déformations s'écrit :

$$T_{ij} = c_{ijkl}S_{kl} + c_{ijklpq}S_{kl}S_{pq}.$$

Il en résulte une équation de propagation des ondes élastiques compliquée par la présence des constantes élastiques du troisième ordre [53]. Cette équation peut néanmoins être explicitée dans les cas simples (ondes longitudinales dans un milieu illimité, par exemple). Les résultats (qualitativement prévisibles sans calcul) sont les suivants : une onde monochromatique engendre au cours de sa propagation des ondes de fréquences harmoniques [54], deux ondes de fréquences f_1 et f_2 interagissant dans le solide donnent naissance à des ondes de fréquence égale à la somme $f_1 + f_2$ et à la différence $f_1 - f_2$. L'adjonction à l'équation de propagation des conditions aux limites rend l'étude des effets non linéaires en ondes de surface extrêmement difficile à aborder [55]. Il est hors de l'objet de ce livre d'insister davantage sur cet aspect mathématique de la non-linéarité. Nous sommes intéressés ici par l'exploitation possible de ces effets en vue d'effectuer un produit.

Soient deux signaux modulés en amplitude

$$s_1(t) = A_1(t) \cos \omega_1 t \quad \text{et} \quad s_2(t) = A_2(t) \cos \omega_2 t$$

produisant deux ondes se propageant en sens opposés à la vitesse V :

$$u_1(t, x) = A_1\left(t - \frac{x}{V}\right) \cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

et

$$u_2(t, x) = A_2\left(t + \frac{x}{V}\right) \cos(\omega_2 t + k_2 x).$$

Leur interaction engendre deux ondes

$$u_3(t, x) = B\, A_1\left(t - \frac{x}{V}\right) A_2\left(t + \frac{x}{V}\right) \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]$$

et

$$u'_3(t, x) = B\, A_1\left(t - \frac{x}{V}\right) A_2\left(t + \frac{x}{V}\right) \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 + k_2)x].$$

B est une constante de non linéarité. A la sortie d'un transducteur de longueur L, détectant par exemple l'onde de vecteur d'onde $k_1 - k_2$, on obtient une tension électrique de fréquence porteuse $\omega_1 + \omega_2$ et d'amplitude

$$A_3(t) = \beta \int_{-L/2}^{+L/2} A_1\left(t - \frac{x}{V}\right) A_2\left(t + \frac{x}{V}\right) dx. \qquad (9.\ 33)$$

Si les deux signaux sont des impulsions de durée brève devant le temps de transit L/V sous le transducteur, celui-ci peut être considéré comme infiniment long et le changement de variable $t - x/V = \tau$ fait apparaître $A_3(t)$ comme la fonction de convolution des enveloppes des deux signaux :

$$A_3(t) = \beta V \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\tau) A_2(2t - \tau)\, d\tau. \qquad (9.\ 34)$$

Toutefois, par rapport au produit de convolution (formule 1. 30), $A_3(t)$ est comprimé dans le temps d'un facteur 2. En effet, contrairement à ce que nous avons vu jusqu'à présent où une des fonctions était réalisée par un peigne immobile, les deux termes du produit sont portés par des ondes qui se déplacent en sens inverse à une vitesse relative égale à 2V.

Ce genre d'opération a été effectuée en ondes de volume [56] et en ondes de surface [57, 58]. L'accessibilité des ondes de Rayleigh sur un matériau piézoélectrique et leur densité de puissance élastique élevée facilitent l'expérience. Le produit de convolution est détecté par un transducteur à peignes dont la distance interdigitale $d_3 = \lambda_3/2$ est fixée par la longueur d'onde $\lambda_3 = \dfrac{2\pi}{|k_1 - k_2|}$. Lorsque les deux signaux ont la même fréquence, d_3 est infini, le transducteur se réduit à une plaque et le champ électrique de fréquence 2ω associé, qui ne dépend plus que du temps, est détecté entre cette plaque et une électrode de masse (fig. 9. 53). La figure 9. 54 montre le résultat obtenu avec un monocristal de $LiNbO_3$ quand une impulsion de durée 6 µs, de puissance 1 watt, de fréquence porteuse 150 MHz est appliquée aux deux transducteurs d'entrée. Le signal de sortie, de fréquence 300 MHz, de puissance inférieure au microwatt a bien la forme d'un triangle.

Si un des signaux, considéré comme signal de référence, est l'inverse dans le temps de l'autre signal, le signal de sortie est la fonction d'autocorrélation. Un des avantages de ce dispositif par rapport aux filtres adaptés décrits au paragraphe 9. 3. 5 est que le signal de référence peut être « électroniquement » changé si bien que l'autocorrélation de signaux distincts, *i. e.* codés différemment, peut être effectuée rapidement. Il présente toutefois l'inconvénient de ne pas accepter de variations très grandes du niveau d'entrée : la dynamique est actuellement limitée à 20 dB. Ce genre de dispositif qui évolue avec l'adjonction de semi-conducteurs [59] n'est pas, à notre connaissance, sorti du domaine du laboratoire.

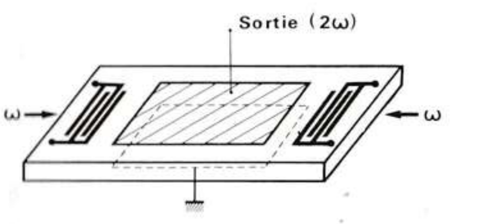


FIG. 9. 53. — *Schéma de principe d'une expérience de convolution (par effet non linéaire en ondes de Rayleigh) de deux signaux de même fréquence.*

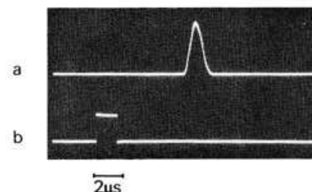


FIG. 9. 54. — *Autoconvolution* (a) *d'une impulsion rectangulaire* (b). Fréquence porteuse 150 MHz. Remarquer que la base du triangle est égale à la largeur de l'impulsion et non au double.

9. 7. — COUPLEUR A RÉSEAU A ONDES DE SURFACE

En électromagnétisme, deux guides d'ondes peuvent être couplés de façon que l'énergie se propageant dans l'un soit transférée partiellement ou totalement dans l'autre [60]. La méthode qui consiste à accoler les guides et à pratiquer des ouvertures dans la paroi commune est transposable en élasticité : deux guides d'ondes de surface formés par exemple de rubans métalliques déposés sur un substrat peuvent être localement juxtaposés pour qu'il y ait couplage par le substrat. Mais il existe une autre solution originale et très ingénieuse [61, 62]. Le couplage entre les deux voies est assuré, comme l'indique la figure 9. 55, par un réseau de traits métalliques tracés sur un substrat piézoélectrique. Une onde de Rayleigh lancée suivant la voie A induit une tension électrique entre les traits. Cette tension apparaissant aussi sur la voie B, y engendre une onde de Rayleigh. Le transfert intégral de l'onde d'une voie à l'autre est atteint pour une longueur du coupleur L_t qui se détermine facilement en faisant appel à la notion classique de modes [63]. L'onde A se décompose en un mode symétrique et en un mode antisymétrique (fig. 9. 55). La vitesse V_S du mode symétrique n'est pas affectée par la présence des barres puisque aucun courant ne peut circuler dans la direction de propagation. Par contre la vitesse V_A du mode antisymétrique est égale à la vitesse V_0 des ondes de Rayleigh lorsque la surface est recouverte d'une couche métallique (paragr. 6. 2. 2. 4) car le potentiel électrique associé à ce mode est annulé sur la surface par le déplacement des charges le long des bandes métalliques. D'après la formule 6. 91 :



$$\frac{V_S - V_A}{V_S} = \frac{K^2}{2} \tag{9. 35}$$

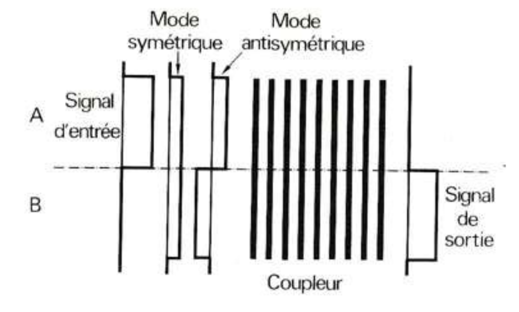


FIG. 9. 55. — *Coupleur à réseau à ondes de surface.* Les deux modes se propagent, sous le coupleur, à des vitesses différentes; sa longueur est choisie pour qu'il y ait déphasage de π à la sortie.

La différence de phase entre ces deux modes est égale à π pour une longueur L_t du coupleur telle que :

$$2\pi f\left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_S}\right) L_t = \pi$$

soit

$$L_t = \frac{1}{2f} \cdot \frac{V_S V_A}{V_S - V_A}$$

ou encore en fonction du coefficient de couplage K et de la longueur d'onde λ des ondes de Rayleigh

$$L_t = \frac{\lambda}{K^2}.$$

En désignant par d le pas du réseau, le nombre de traits est :

$$N_t = \frac{\lambda}{K^2 d}. \tag{9. 36}$$

Ainsi les deux modes se détruisant sur la voie A et s'ajoutant sur la voie B, l'onde qui a pénétré suivant A sous le coupleur de longueur L_t en ressort suivant B. En fait la formule simple 9. 35 suppose le coupleur formé d'une couche uniforme parfaitement isolante suivant la direction de propagation et parfaitement conductrice dans la direction perpendiculaire. Cette anisotropie est en pratique obtenue par les bandes métalliques. La périodicité du coupleur réel introduit des coupures en fonction de la fréquence (la première coupure se produit à la fréquence de résonance

$f_0 = V/2d$) et réduit l'efficacité du couplage. En considérant que la présence des bandes équivaut, sur la voie A, à un échantillonnage d'un signal sinusoïdal et sur la voie B à sa reconstitution par une structure périodique le facteur de réduction [64] est égal à $\left(\frac{\sin \theta/2}{\theta/2}\right)^2$ où $\theta = \frac{2\pi\alpha d}{\lambda}$, αd représentant la largeur active d'une bande métallique. La formule 9. 36 devient alors

$$N_t = \frac{\lambda}{K^2 \alpha d \left(\frac{\sin \theta/2}{\theta/2}\right)^2} = \frac{\pi}{K^2} \frac{\theta}{1 - \cos \theta}. \qquad (9.\ 37)$$

En réalité, les paramètre α et K^2 doivent être ajustés pour retrouver es résultats expérimentaux. α ne s'identifie pas à la fraction a de la surace métallisée du coupleur ($\alpha = ra$) et il faut corriger, par un facteur F, a valeur de K^2 :

$$N_t = \frac{\pi}{FK^2} \frac{\pi raf/f_0}{1 - \cos (\pi raf/f_0)} \qquad \text{avec} \quad f_0 = \frac{V}{2d}. \qquad (9.\ 38)$$

Comme pour le transducteur à peignes, l'efficacité maximale du couleur (FK^2 maximum) est obtenue lorsque $a = 1/2$. Pour le niobate de thium ($\underline{Y}\ \underline{Z}$) avec $a = 1/2$, $r = 1{,}7$ et $FK^2 = 0{,}043$ la formule pratique [65] st

$$N_t = \frac{195 f/f_0}{1 - \cos (153 f/f_0)} \qquad (9.\ 39)$$

ngle du cosinus étant exprimé en degrés.

L'excellent fonctionnement de ce coupleur extrêmement simple est ouvé par les photographies 9. 56 se rapportant à un coupleur de 0 traits sur $LiNbO_3$. Les pertes de transfert d'une voie à l'autre sont

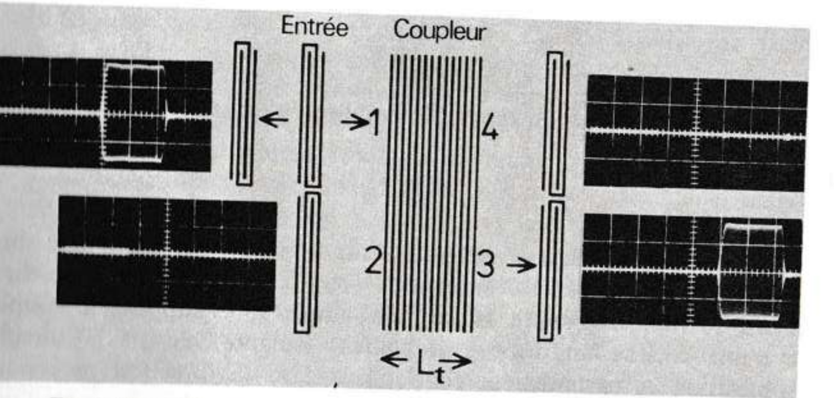


FIG. 9. 56. — *Réponse en transmission et en réflexion du coupleur à réseau.*
Pour la longueur L_t du coupleur, le signal entré en 1 sort presque intégralement en 3
(Figure 6 de la référence 62, aimablement communiquée par E. G. S. PAIGE.)

de 0,5 dB à 45 MHz, la réjection entre les deux voies de sortie est supérieure à 30 dB. Parmi les nombreuses applications réalisées (sur $LiNbO_3$, $\underline{Y}\ \vec{Z}$) ou prévues par les inventeurs de ce dispositif [65] citons le réjecteur d'ondes de volume (le coupleur ne transmet pas les ondes de volume créées par le transducteur d'entrée), le coupleur entre substrats distincts, le diviseur de faisceau (coupleur à 3 dB, $L = L_t/2$), le T magique, le compresseur de faisceau.

9. 8. — DÉFLECTEUR ET MODULATEUR DE LUMIÈRE A ONDES ÉLASTIQUES

A la fin du paragraphe 8. 4. 2. 5 il a été dit que l'interaction colinéaire entre ondes lumineuses et ondes élastiques avait été utilisée pour réaliser un filtre optique accordable et dans les paragraphes 9. 2. 3 et 9. 3. 6 il a été rapporté deux applications de cette interaction : ligne à retard variable, filtre adapté. Il nous paraît utile de préciser ici la structure du composant qu'est le déviateur ou modulateur de lumière à ondes élastiques. Un faisceau d'ondes lumineuses est un excellent support d'information et les ondes élastiques constituent un bon moyen de le moduler spatialement ou temporellement.

STRUCTURE. — La figure 9. 57 représente un déflecteur fonctionnant sous incidence de Bragg à une fréquence centrale voisine de 300 MHz. Le milieu d'interaction est un cristal de molybdate de plomb. L'une de ses

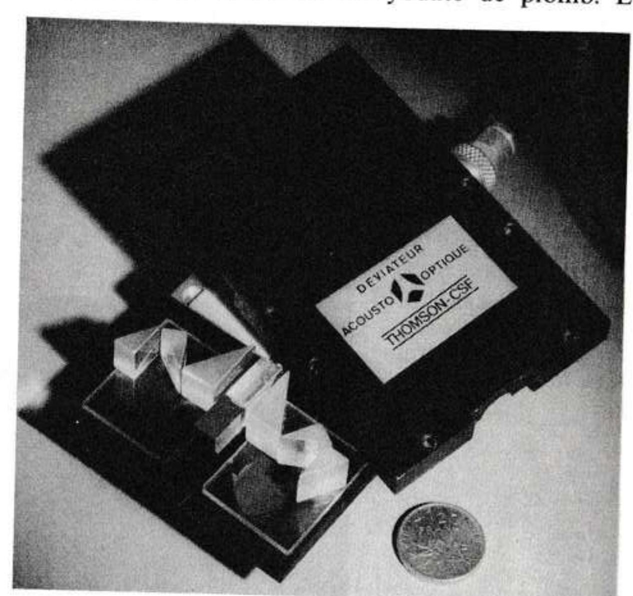


FIG. 9. 57. — *Déflecteur de lumière à interaction élasto-optique.*
Les ondes élastiques se propagent dans le cristal parallélépipédique de molybdate de plomb. Le rôle des prismes d'entrée est d'élargir le faisceau lumineux afin d'augmenter le nombre de directions distinctes. Les prismes de sortie restituent un faisceau de dimensions identiques au faisceau incident.

extrémités porte un transducteur en niobate de lithium qui a été soudé sous vide à l'indium. L'autre extrémité est munie d'un absorbant d'ondes élastiques. L'adaptation électrique du transducteur au générateur de signaux se fait au moyen d'une ligne à ruban. Des prismes sont situés de chaque côté du cristal. Leur rôle [66] est à l'entrée d'élargir, suivant l'axe du barreau de $PbMoO_4$ le faisceau lumineux incident — pour accroître le temps de transit des ondes élastiques (paragr. 8. 4. 2. 4) — et de diminuer, à la sortie, le faisceau diffracté, le déflecteur restituant un faisceau dévié identique au faisceau entrant. Les prismes ont l'avantage sur les lentilles de conserver les ondes planes et aussi d'augmenter l'angle de déviation.

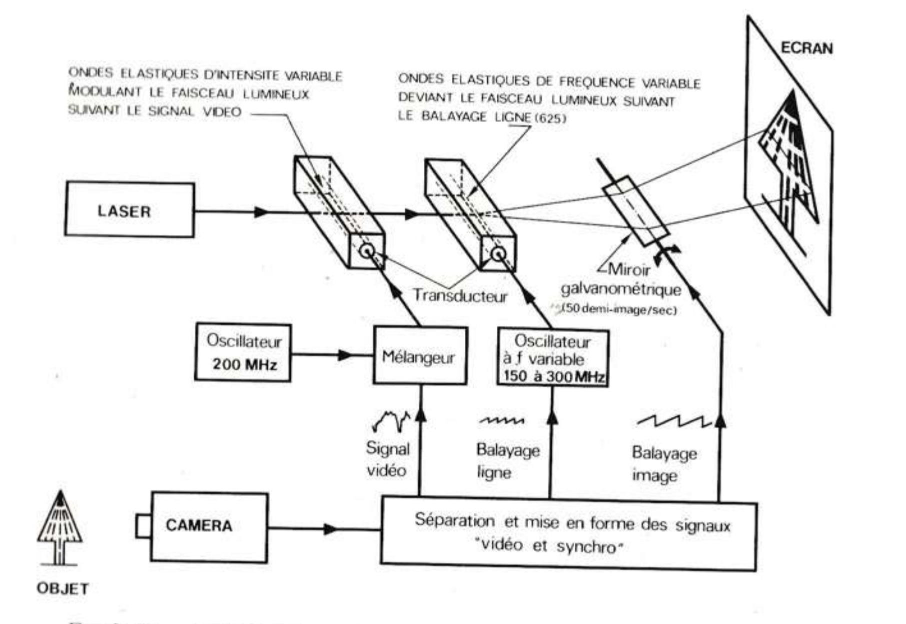


FIG. 9. 58. — *Schéma d'une expérience de télévision.* Le faisceau lumineux est modulé en intensité (dévié horizontalement) par des ondes élastiques d'intensité (de fréquence) variable.



FIG. 9. 59. — *Photographie de l'image projetée sur l'écran* (largeur 50 cm).

Pour une puissance électrique appliquée sur le transducteur de l'ordre du watt environ 50 % de la lumière incidente se trouve déviée et le nombre de directions distinctes est voisin de 500 [67]. Un modulateur élasto-optique a le même aspect qu'un déflecteur à la différence près qu'il ne comporte pas de prismes agrandisseurs de faisceau; le cristal est aussi moins long. Voici un exemple de caractéristiques de modulateur :

— quantité de lumière déviée : 70 %;
— temps de montée d'une impulsion : 30 ns;
— puissance de commande : 1 W.

EXPÉRIENCE DE TÉLÉVISION. — Pour illustrer les possibilités du déflecteur et du modulateur élasto-optique plusieurs expériences de télévision ont été montées en laboratoire [68]. Indiquons le schéma (fig. 9. 58) de celle effectuée dans notre laboratoire par R. Torguet. Le signal de vidéofréquence est appliqué au modulateur qui agit directement sur le faisceau issu d'un laser à argon. Le faisceau lumineux modulé est dévié horizontalement par un déflecteur dont la fréquence de commande est celle du balayage des lignes. Comme une image de durée 20 ms est définie par 625 lignes, chaque ligne est parcourue en 32 µs. La déviation verticale plus lente du faisceau lumineux est assurée par un miroir galvanométrique qui reçoit un signal en dent de scie de fréquence 50 Hz. L'image peut être projetée sur un écran de plus d'un mètre carré avec un laser d'une puissance de 2 W [69].

Il est évidemment possible si on a besoin — en-dehors de toute expérience de télévision — d'une déviation rapide dans deux directions d'associer un déflecteur X à un déflecteur Y.

En conclusion, un dispositif d'un volume de quelques centimètres cubes constitué d'un cristal muni d'un transducteur qui transforme en ondes élastiques un signal électrique de commande peut moduler très profondément, presque à 100 %, un signal lumineux, le dévier suivant plusieurs centaines de directions distinctes en un temps extrêmement court (10 µs). Les applications de ce composant, qui sort actuellement des laboratoires devraient se situer dans les domaines de la téléreprographie, de la projection sur écran, de l'impression rapide de caractères.

RÉFÉRENCES

[1] F. V. HUNT. — *Electroacoustics. The analysis of transduction, and its historical background*, chap. 1. New York : John Wiley and Sons (1954).
[2] D. L. ARENBERG. — Réf. 5 du chapitre 5.
[3] J. R. KLAUDER, A. C. PRICE, S. DARLINGTON and W. J. ALDERSHEIM. — The theory and design of chirp radars, *Bell Syst. Tech. J. 39*, 745 (1960).
[4] J. H. MCFEE. — Transmission and amplification of acoustic waves in piezoelectric semiconductors. In *Physical Acoustics* (W. P. MASON and R. N. THURSTON Eds) Vol. *4 A*, chap. 1. New York : Academic Press (1966).
[5] J. H. COLLINS, K. M. LAKIN and P. J. HAGON. — *Proc. IEEE, 57*, 740 (1969).
[6] J. H. EVELETH. — *Proc. IEEE, 53*, 1406 (1965).
[7] Ph. DEFRANOULD. — *European Microwave Conference* Stockholm (1971).
[8] Référence 25 du chapitre 7.
[9] P. HARTEMANN and C. ARNODO. — *Electron. Lett., 8*, 265 (1972).
[10] B. RULF. — *J. Acoust. Soc. Am., 45*, 493 (1969).
[11] Réf. 8 du chap. 5, p. 29-42.
[12] W. L. BOND, T. REEDER, H. J. SHAW. — *Electron. Letters, 7*, 79 (1971).
[13] M. F. LEWIS and E. PATTERSON. — *Appl. Phys. Letters, 18*, 143 (1971).
[14] L. R. ADKINS and A. J. HUGHES. — *J. Appl. Phys., 42*, 1819 (1971).
[15] G. KINO and T. M. REEDER. — *IEEE Trans. Electron. Devices, ED-18*, 909 (1971).
[16] L. A. COLDREN. — *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-20*, 17 (1973).
[17] M. J. BRIENZA and A. J. DEMARIA. — *Appl. Phys. Letters, 9*, 312 (1966).
[18] O. CAHEN, E. DIEULESAINT et R. TORGUET. — *C. R. Acad. Sc. Paris, 266*, 1009 (1968).
[19] P. M. WOODWARD. — *Probability and information theory, with application to radar*, Oxford : Pergamon Press (1953). En français. *Probabilités. Analyse fréquentielle. Information. Théorie du radar*, Paris : Eyrolles (1960).
[20] M. CARPENTIER. — *Radars. Concepts nouveaux*, chap. 2. Paris : Dunod (1966).
[21] C. E. COOK and M. BERNFELD. — *Radars signals : an introduction to theory and application*, chap. 2. New York : Academic Press (1967).
[22] G. BRUHAT et A. KASTLER. — *Cours de physique générale. Optique*, p. 202-209. Paris : Masson et Cie (1965).
[23] P. TOURNOIS. — *Ann. de Radioélectricité 78*, 267 (1964).
[24] P. HARTEMANN. — Filtres dispersifs à ondes élastiques de Rayleigh. *Thèse, université de Paris-Sud (Orsay)* (1973).
[25] T. R. MEEKER and A. H. MEITZLER. — Guided wave propagation in elongated cylinders and plates. In *Physical Acoustics* (W. P. MASON Ed.). Vol. *1 A*, p. 111-167. New York : Academic Press (1964).
[26] J. E. MAY, Jr. — Guided wave ultrasonic delay lines. In *Physical Acoustics* (W. P. MASON Ed.). Vol. *1 A*, p. 417-483. New York : Academic Press (1964).
[27] Référence 8 du chap. 5, chap. 2.
[28] A. H. FITCH. — *J. Acoust. Soc. Am., 35*, 709 (1963).
[29] R. S. DUNCAN and M. R. PARKER, Jr. — *Proc. IEEE, 53*, 413 (1965).
[30] G. A. COQUIN and R. TSU. — *Proc. IEEE, 53*, 581 (1965).
[31] D. E. MILLER and M. R. PARKER. — *Proc. IEEE, 54*, 891 (1966).
[32] W. S. MORTLEY. — *Marconi Rev., 28*, 273 (1965).
[33] P. TOURNOIS and C. LARDAT, *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-16*, 107 (1969).
[34] C. LARDAT, C. MAERFELD and P. TOURNOIS. — *Proc. IEEE, 59*, 355 (1971).
[35] C. LARDAT and P. TOURNOIS. — *IEEE Ultrasonics Symposium Proc.*, p. 280 (1972).
[36] M. B. SCHULZ, B. J. MATSINGER and M. G. HOLLAND. — *J. Appl. Phys., 41*, 2755 (1970).

[37] P. HARTEMANN and E. DIEULESAINT. — *Electron. Letters, 5*, 219 (1969).
[38] Référence 21, p. 178.
[39] E. L. KEY, E. N. FOWLE and R. D. HAGGARTY. — *Lincoln Lab., M. I. T., Lexington Massachusetts, Tech. Rept.* 207 (sept. 1969).
[40] P. HARTEMANN et E. DIEULESAINT. — *Onde électrique, 51*, 523 (1971).
[41] M. B. SCHULZ, M. G. HOLLAND and L. DAVIS Jr. — *Appl. Phys. Lett., 11*, 237 (1967).
[42] J. H.COLLINS, E. G. H. LEAN and H. J. SHAW. — *Appl. Phys. Lett., 11*, 240 (1967).
[43] Référence 1, p. 53-57.
[44] W. J. SPENCER. — Monolithic crystal filters. In *Physical Acoustics* (W. P. MASON and R. N. THURSTON Eds). Vol. *9*, p. 167-220. New York : Academic Press (1972).
[45] Référence 16 du chapitre 7.
[46] P. HARTEMANN and E. DIEULESAINT. — *Electron. Letters, 5*, 657 (1969).
[47] P. HARTEMANN and O. MENAGER. — *Electron. Letters, 8*, 214 (1972).
[48] P. HARTEMANN. — *Electron. Letters, 7*, 674 (1971).
[49] A. J. DE VRIES, R. ADLER, J. F. DIAS and T. J. WOJCIK. — Paper G-5, *IEEE Ultrasonics Symp.* (St-Louis U.S.A. 1969).
[50] D. CHAUVIN, G. COUSSOT and E. DIEULESAINT. — *Electron. Letters, 17*, 491 (1971).
[51] V. C. ANDERSON. — *Harvard Acoust. Lab., Cambridge, Mass., Tech. Mem., N° 37* (1956).
[52] A. G. BERT, B. EPSZTEIN, G. KANTOROWICZ. — *Appl. Phys. Lett. 21*, 50 (1972).
[53] R. N. THURSTON. — Wave propagation in fluids and normal solids. In *Physical Acoustics* (W. P. MASON Ed.). Vol. *1 A*, p. 91-109. New York : Academic Press (1964).
[54] E. ADLER, E. BRIDOUX, G. COUSSOT and E. DIEULESAINT. — *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-20*, 13 (1973).
[55] V. E. LJAMOV, TZU-HWA HSU and R. M. WHITE. — *J. Appl. Phys., 43*, 800 (1972).
[56] C. F. QUATE and R. B. THOMPSON. — *Appl. Phys. Letters, 16*, 494 (1970).
[57] L. O. SVAASAND. — *Appl. Phys. Letters, 15*, 300 (1969).
[58] M. LUUKKALA and G. S. KINO. — *Appl. Phys. Letters, 18*, 393 (1971).
[59] P. DAS, M. N. ARAGHI and W. C. WANG. — *Appl. Phys. Letters., 21*, 152 (1972).
[60] P. GRIVET. — *Physique des lignes HF et UHF*, tome *III*, chap. 10. Paris : Masson et Cie (1974).
[61] F. G. MARSHALL and E. G. S. PAIGE. — *Electron. Letters, 7*, 460 (1971).
[62] F. G. MARSHALL, C. O. NEWTON and E. G. S. PAIGE. — *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-21*, 206 (1973).
[63] W. H. LOUISELL. — *Coupled mode and parametric electronics*, chap. 1. New York : Wiley (1960).
[64] J. MAX. — *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, tome *I*, chap. 7. Paris : Masson et Cie (1972).
[65] F. G. MARSHALL, C. O. NEWTON and E. G. S. PAIGE. — *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-21*, 216 (1973).
[66] F. GIRES. — *Revue Phys. Appliquée, 4*, 505 (1969).
[67] R. TORGUET and E. DIEULESAINT. — *Electron. Letters, 5*, 632 (1969).
[68] A. KORPEL, R. ADLER, P. DESMARES and W. WATSON. — *Appl. Optics, 5*, 1667 (1966).
[69] R. TORGUET. — Étude théorique et expérimentale de l'interaction de la lumière avec des ondes acoustiques de forte puissance. *Thèse, université de Paris VI* (1973).
[70] R. W. DAMON. — *IEEE Spectrum*, p. 87 (june 1967).
[71] E. K. SITTIG and G. A. COQUIN. — *IEEE Trans. Son. Ultrason., SU-15*, 111 (1968).
[72] T. A. MARTIN. — *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-21*, 186 (1973).
[73] R. C. WILLIAMSON and H. I. SMITH. — *Electron. Lett., 8*, 401 (1972).
[74] R. C. WILLIAMSON and H. I. SMITH. — *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-21*, 195 (1973).
[75] R. C. M. LI. — *IEEE Ultrasonics Symposium Proc.*, p. 263 (1972).
[76] H. I. SMITH, R. C. WILLIAMSON and W. T. BROGAN. — *IEEE Ultrasonics Symposium Proc.*, p. 198 (1972).
[77] R. C. WILLIAMSON, V. S. DOLAT and H. I. SMITH. — *IEEE Ultrasonics Symposium Proc.*, p. 490 (1973).

[78] J. MELNGAILIS, J. M. SMITH and J. H. CAFARELLA. — *IEEE Ultrasonics Symposium Proc.*, p. 221 (1972).
[79] C. ATZENI, G. MANES and L. MASOTTI. — *IEEE Ultrasonics Symposium Proc.*, p. 414 (1973).

BIBLIOGRAPHIE

La liste des références comprend des ouvrages et des articles de synthèse se rapportant aux différents domaines abordés, par exemple les références 20, 21, 25, 26, 44. Ajoutons quelques autres articles d'intérêt général pour ce chapitre.

R. M. WHITE. — Surface elastic waves, *Proc. IEEE, 58*, 1238 (1970).
E. DIEULESAINT. — Lignes à ondes élastiques : application au traitement des signaux électriques, *L'onde électrique, 50*, 899 (1970).
J. BURNSWEIG, E. H. GREGORY and R. J. WAGNER. — Surface-wave device applications and component developments, *IEEE J. Solid. state circuits, SC-5*, 310 (1970).
H. SABINE and P. H. COLE. — Surface acoustic waves in communications engineering, *Ultrasonics, 9*, 103 (1971).
G. S. KINO and H. MATTHEWS. — Signal processing in acoustic surface wave devices, *IEEE Spectrum, 18*, 22 (August 1971).
D. A. GANDOLFO, C. L. GRASSE and E. J. SCHMITT. — Surface acoustic waves : new processing tools for ew, *Microwaves, 10*, Nb 10, 44 (1971).
A. GLOWINSKI, Microacoustique et télécommunications, *L'onde électrique*, 52, 54 (1972).
E. DIEULESAINT. — Traitement de signaux électriques par ondes élastiques de Rayleigh. *J. Physique, 33*, C6-176 (1972).
J. DE KLERK. — Past, present and future of surface elastic waves, *J. Physique, 33*, C6-182 (1972).
E. DIEULESAINT and P. HARTEMANN. — Acoustic surface wave filters, *Ultrasonics, 11*, 24 (1973).
G. S. KINO and J. SHAW. — Acoustic surface waves, *Scientific American*, oct. 1972, p. 51.
R. H. TANCRELL, M. B. SCHULZ, H. H. BARRET, L. DAVIS Jr, and M. G. HOLLAND. — Dispersive delay lines using ultrasonic surface waves, *Proc. IEEE (letters), 57*, 1211 (1969).
C. ATZENI. — Sensor number minimization in acoustic surface-wave matched filters, *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-18*, 193 (1971).
M. E. PEDINOFF, H. M. GERARD, G. W. JUDD. — Electrical probe measurements of wavefront phase distortion from apodized wide band surface wave transducers, *IEEE Trans. Son. Ultrason., SU-19*, 395 (1972).
W. D. SQUIRE, H. J. WHITEHOUSE and J. M. ALSUP. — Linear signal processing and ultrasonic transversal filter, *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. M. T. T-17*, 1020 (1969).
W. S. JONES, C. S. HARTMANN and L. T. CLAIBORNE. — Evaluation of digitally coded acoustic surface-wave matched filter. *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-18*, 21 (1971).
C. C. TSENG. — Signal multiplexing in surface-wave delay lines using orthogonal pairs of Golay's complementary sequences, *IEEE Trans. Son. Ultrason. SU-18*, 103 (1971).
C. ATZENI and L. MASOTTI. — Band-pass filtering by acoustic planar processing techniques, Alta Frequenza, *52*, 84 (1973).

EXERCICES

• **9. 1.** Déterminer la réponse du filtre adapté au signal de la figure 9. 11 *b*.

Solution. L'autocorrélation du signal, effectuée par exemple graphiquement selon les indications du paragraphe 1. 3. 4 est dessinée sur la figure 9. 60.

FIG. 9. 60.

9. 2. Calculer, à l'aide de la méthode de la phase stationnaire exposée au paragraphe 1. 3. 2, l'impulsion comprimée $s_2(t)$ à la sortie d'un filtre adapté à un signal $s_1(t) = \Pi(t/\Theta) \cos [2\pi f_0 t + \psi(t)]$ dont la modulation en fréquence suit une loi en S de la forme :

$$t = \Theta \left[\frac{f - f_0}{B} + \frac{a}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{f - f_0}{B} \right) \right] \qquad a = C^{te}$$

pour $-\frac{\Theta}{2} < t < \frac{\Theta}{2}$ soit $f_0 - \frac{B}{2} < f < f_0 + \frac{B}{2}$.

Solution. Le signal $s_2(t)$ se déduit de son spectre $S_2(f) = H(f) S_1(f) = |S_1(f)|^2$ par :

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(f)|^2 e^{i2\pi ft} df.$$

La relation 1. 26 fournit comme $e_1[t(f)] = \Pi\left(\frac{f - f_0}{B}\right)$

$$|E_1(f - f_0)|^2 \simeq \Pi\left(\frac{f - f_0}{B}\right) \frac{\Theta}{B} \left[1 + a \cos \left(2\pi \frac{f - f_0}{B} \right) \right].$$

D'après 1. 22 :

$$|S_1(f)|^2 = \frac{1}{4} |E_1(f - f_0)|^2 + \frac{1}{4} |E_1(f + f_0)|^2$$

et le signal de sortie $s_2(t) = e_2(t) \cos (2\pi f_0 t)$ a pour enveloppe

$$e_2(t) = \frac{\Theta}{2B} \int_{-B/2}^{+B/2} \left(1 + a \cos \frac{2\pi f}{B} \right) e^{i2\pi ft} df$$

soit

$$e_2(t) = \frac{\Theta}{2} \frac{\sin \pi Bt}{\pi Bt} \left[1 + a \frac{(Bt)^2}{1 - (Bt)^2} \right].$$

La figure 9. 61 montre que la multiplication du terme $\frac{\sin \pi Bt}{\pi Bt}$ par la fonction entre crochets,

qui s'annule pour $Bt = \frac{\ }{\sqrt{1-a}}$, a pour effet d'élargir le pic central et de réduire le premier lobe beaucoup plus que les suivants qui sont sensiblement multipliés par $1 - a$.

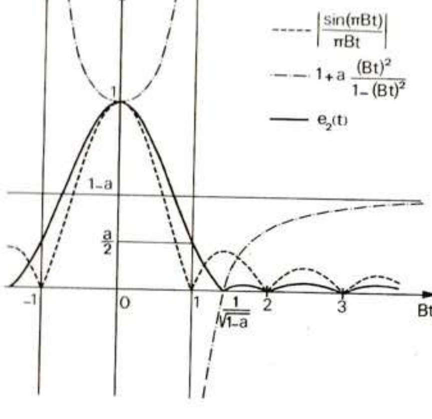


FIG. 9. 61. — *Enveloppe de l'impulsion comprimée fournie par une ligne dispersive à courbe de retard en forme de S lorsque $a = 1/2$* (courbe en trait plein).

• **9. 3.** Montrer que la somme des signaux d'autocorrélation pour chaque paire de signaux de la figure 9. 62 *a* n'a pas de lobe secondaire.

Réponse. Figure 9. 62 *b*.

FIG. 9. 62. — *Codes complémentaires de Golay.*

• **9. 4.** Quelle est la réponse en fréquence d'un transducteur constitué d'une infinité d'échantillons distants de $n\lambda_0$ et formés de cinq doigts?

Solution. La réponse impulsionnelle est une succession d'impulsions de largeur $2/f_0$ et distantes de $\tau = n/f_0$:

$$h(t) = \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Pi\left[\frac{f_0(t - m\tau)}{2}\right]\right] \cos 2\pi f_0 t.$$

D'après les résultats du paragraphe 1. 3. 2, le spectre de l'enveloppe est

$$E(f) = \frac{\sin\frac{2\pi f}{f_0}}{\pi f} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi m f\tau}$$

soit compte tenu de la formule 1. 40 :

$$E(f) = \frac{\sin\frac{2\pi f}{f_0}}{\pi f} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(f\tau - p).$$

La réponse en fréquence $H(f) = \frac{1}{2}E(f - f_0) + \frac{1}{2}E(f + f_0)$ est une succession de pics aux fréquences $f = \pm f_0 + p\frac{f_0}{n}$, de hauteur modulée par une courbe en $\frac{\sin x}{x}$.

• **9. 5.** Comment choisir la période d'échantillonnage T à l'entrée d'un DELTIC pour inverser le signal dans le temps.

Réponse. $T = (N - 1)\delta$.

